La fonction d'Ackermann n'est pas récursive primitive

Léo Gayral

2017-2018

ref : Dehornoy – Mathématiques de l'informatique – p.190

Définition 1. On définit les fonctions A_n récursives primitives et A récursive – on va montrer qu'elle est non primitive – par :

— $A_0(m) = m + 1$
— $A_{n+1}(0) = A_n(1)$
— $A_{n+1}(m + 1) = A_n \circ A_{n+1}(m)$
— $A(n, m) = A_n(m)$

Lemme 1 (admis)**.** $A_1(m) = m + 2$ et $A_2(m) = 2m + 3$.

Lemme 2. Les fonctions A_n vérifient les inégalités suivantes :

1. $A_n(m) > m$
2. Stricte croissance en m : $A_n(m + 1) > A_n(m)$
3. Croissance en n : $A_{n+1}(m) \geq A_n(m)$
4. Croissance jointe : $A_{n+1}(m) \geq A_n(m + 1) = A_n \circ A_0(m)$
5. Majoration de la composition : $A_k \circ A_n(m) \leq A_{2+\max(k,n)}(m)$

Démonstration.

Montrons d'abord les deux premiers points par récurrence sur le rang n. L'inégalité est clairement vraie pour A_0, égale à la fonction successeur donc strictement croissante. Supposons ces inégalités vérifiées pour tout m, à un rang n fixé. Alors $A_{n+1}(0) = A_n(1) > 0$ et $A_{n+1}(m + 1) = A_n(A_{n+1}(m) >$

$A_{n+1}(m)$ donc en particulier $A_{n+1}(m+1) > m+1$. Par récurrence sur m, le résultat est vrai au rang $n+1$.

La troisième inégalité découle des deux précédentes. En effet, $A_{n+1}(0) = A_n(1) > A_n(0)$ et, avec l'inégalité large $A_{n+1}(m) \geq m+1$, par croissance de A_n on obtient $A_{n+1}(m+1) = A_n(A_{n+1}(m)) \geq A_n(m+1)$.

La quatrième inégalité se montre par récurrence sur m, à $n \geq 1$ fixé. En effet, $A_{n+1}(0) = A_n(1)$ et $A_{n+1}(m+1) = A_n \circ A_{n+1}(m) \geq A_{n-1} \circ A_n(m+1) = A_n(m+2)$. Le cas $n = 0$, non nécessaire pour prouver le dernier point, se déduit directement du premier lemme.

Pour la dernière majoration, posons $s = \max(k, n)$. On a alors la chaîne d'inégalités $A_k \circ A_n(m) \leq A_s \circ A_{s+1}(m) = A_{s+1}(m+1) \leq A_{s+2}(m)$.

□

Lemme 3. Soit $f(x_1, \ldots, x_k)$ une fonction récursive primitive. Alors il existe un entier n tel que $f(x_1, \ldots, x_k) \leq A_n(\sum_{i=1}^{k} x_i)$.

Démonstration.
Nous allons montrer le résultat par *induction structurelle* sur l'ensemble des fonctions récursives primitives. Le résultat est clairement vrai pour la fonction nulle, la fonction successeur (égale à A_0) et les projections π_i^j $(1 \leq i \leq j)$. Pour alléger les notations par la suite, on pose $X = (x_1, \ldots, x_j)$ et $S = x_1 + \cdots + x_j$.

Pour le schéma de composition, considérons $f(g_1, \ldots, g_r)(X)$. On associe les entiers n à f et k_i à g_i et on pose $m = \max(n, k_1, \ldots, k_r, 2)$. Alors $f(g_1, \ldots, g_r)(X) \leq A_n(r \times A_m(S)) \leq A_m \circ A_2^{(r)} \circ A_m(S) \leq A_{m+2r}(S)$.

Pour le schéma de récurrence, considérons $f(0, X) = g(X)$ et $f(y+1, X) = h(f(y, X), y, X)$. On associe n et k à g et h et on pose $m = \max(n, k+5)$. On a bien $f(0, X) \leq A_n(S) \leq A_m(0 + S)$. Supposons maintenant $f(y, X) \leq A_m(y + S)$. On en déduit :

$$f(y+1, X) \leq A_k(y + S + A_m(y + S)) \leq A_k \circ A_2 \circ A_m(y + S)$$

$$f(y+1, X) \leq A_{k+4} \circ A_m(y + S) \leq A_{m-1} \circ A_m(y + S) \leq A_m(y + 1 + S)$$

□

Théorème 1. La fonction A d'Ackermann n'est pas récursive primitive.

Démonstration.
Supposons par l'absurde que A est récursive primitive. Alors on définit la

fonction récursive primitive $\phi(n) = A(n, n+1)$. Par le lemme 3, il existe un entier k tel que $\phi \leq A_k$. Mais alors $\phi(k) = A_k(k+1) \leq A_k(k)$, ce qui contredit la stricte croissance de A_k établie au lemme 2. $\square$