Théorème de Burnside

Léo Gayral

2017-2018

ref : FGN – Oraux X-ENS, Algèbre 2 – p.171

Lemme 1. Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$. On a M nilpotente ssi $\forall k > 0, \operatorname{tr}\left(M^k\right) = 0$.

Démonstration.
Dans le cas général, si $\chi_M = \prod\limits_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$, on a $\operatorname{tr}(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. En particulier, si M nilpotente, $\chi_M = X^n$ donc $\operatorname{tr}(M) = 0$ et le résultat se propage aux puissances de M, nilpotentes également.

Réciproquement, supposons que $\forall k > 0, \operatorname{tr}(M^k) = 0$. On pose $\chi_M = \prod\limits_{j=1}^{r}(X-\lambda_j)^{m_j}$, donc quitte a trigonaliser on voit que $\operatorname{tr}\left(M^k\right) = \sum\limits_{j=1}^{r} m_i \times \lambda_i^k = 0$. Autrement dit :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \cdots & \lambda_r^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \cdots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix} = 0$$

et la matrice ci-dessus a pour déterminant $\lambda_1 \dots \lambda_r \times V(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ où V est le déterminant de Vandermonde, non nul puisque les λ_i sont deux à deux distincts.

Si tous les λ_i sont non nuls, la matrice est inversible, ce qui contredit $m_1, \dots, m_r \geq 1$. On peut donc supposer, quitte à permuter, $\lambda_r = 0$. En outre, si $r \geq 2$, alors on a en particulier :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \cdots & \lambda_{r-1}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \cdots & \lambda_{r-1}^{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{r-1} \end{pmatrix} = 0\,.$$

Ceci est à nouveau impossible, donc $r = 1$ et $\chi_M = X^n$. $\square$

Application 1. Soit $G < (GL_n(\mathbb{C}), \times)$ un sous-groupe d'exposant fini :

$$\exists d \in \mathbb{N}, \forall M \in G, M^d = I_n .$$

Alors G est un groupe fini.

Démonstration.
On considère $(M_i) \in G^m$ une base de $\mathrm{Vect}\,(G)$ et on définit l'application $f : \begin{array}{ccc} G & \to & X^m \\ A & \mapsto & (\mathrm{tr}(AM_i)) \end{array}$ où $X = \{\mathrm{tr}(A), A \in G\} \subset \mathbb{C}$. Si f est injective et X fini, alors on aura le résultat voulu : $|G| \leq |X|^m < \infty$.

D'une part, comme l'exposant de G est fini, pour $A \in G$ quelconque on a $\sigma(A) \subset \mathbb{U}_d$ donc $\mathrm{tr}(A)$ est une somme de m racines d-ièmes de l'unité. Il en découle $|X| \leq d^m$.

Supposons maintenant $f(A) = f(B)$. De façon équivalente, par linéarité de la trace, $\mathrm{tr}(AM) = \mathrm{tr}(BM)$ pour $M \in \mathrm{Vect}\,(G)$ quelconque.

On va montrer que $AB^{-1} - I_n$ est nilpotente. Soit $D = AB^{-1} \in G$. Montrons $\mathrm{tr}(D^k) = n$ par récurrence. Le résultat est direct pour $k = 0$ et, comme $B^{-1}D^k \in G$, alors $\mathrm{tr}(D^{k+1}) = \mathrm{tr}(A \times B^{-1}D^k) = \mathrm{tr}(B \times B^{-1}D^k) = \mathrm{tr}(D^k)$. Il en découle :

$$\mathrm{tr}\left((I_n - D)^k\right) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i \mathrm{tr}(D^i) = n \times (1-1)^k = 0$$

d'où $D - I_n$ nilpotente par le lemme précédent. En outre, comme $D \in G$ on a $D^d = I_n$. $X^d - 1$, scindé à racines simples, annule D qui est donc diagonalisable. On en déduit que $D - I_n$ est diagonalisable nilpotente, donc nulle. Autrement dit, $A = B$, ce qui conclut la preuve. $\square$