Formule de Parseval
Équation de la chaleur sur le cercle

Léo Gayral

2017-2018

ref : FGN – Oraux X-ENS, Analyse 4 – p.49

Remarque 1 (Rappels)**.** Soit $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On considère la famille d'applications continues $(e_n : x \mapsto e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$, ainsi que les coefficients de Fourier $c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\frac{dx}{2\pi} = \langle f, e_n\rangle$, bien définis pour $f \in L^1(\mathbb{T}) \supset L^2(\mathbb{T})$.

Théorème 1 (Formule de Parseval)**.** La famille (e_n) est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$. On a alors l'égalité $\|f\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$, qui induit une isométrie $L^2(\mathbb{T}) \cong l^2(\mathbb{Z})$.

Démonstration.
La famille (e_n) est orthonormale, ce qui donne $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 \leq \|f\|_2^2 < \infty$ par inégalité de Bessel. Pour montrer que cette famille est totale, considérons $D_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k$ le noyau de Dirichlet et $K_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k \in \mathrm{Vect}\,(e_k, |k| \leq n)$ le noyau de Féjer. (K_n) est une approximation de l'unité : $K_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2$, $\|K_n\|_1 = 1$ et $\int_\delta^{2\pi-\delta} K_n(x)\frac{dx}{2\pi} \leq \frac{1}{n\sin(\delta/2)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, on a $K_n\frac{dx}{2\pi}$ un mesure de probabilités sur $\mathbb{T}$ donc, pour $f \in L^2(\mathbb{T})$:

$$\begin{array}{rcl}
\|f * K_n - f\|_2^2 & = & \int_0^{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(t)K_n(x-t)\frac{dt}{2\pi} - f(x)\right|^2\frac{dx}{2\pi} \\
& \leq & \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)-f(x)|^2 K_n(x-t)\frac{dt}{2\pi}\frac{dx}{2\pi} \\
& \leq & \int_0^{2\pi} \|\tau_u f - f\|_2^2 K_n(u)\frac{du}{2\pi} \\
& = & o(1)
\end{array}$$

d'où Vect $(e_n, n \in \mathbb{Z})$ dense dans $L^2(\mathbb{T})$, (e_n) une base hilbertienne.

En particulier, $D_n * f = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e_k$ est la projection orthogonale de f sur Vect $(e_k, |k| \leq n)$. Comme $K_n * f$ est dans ce même espace, on en déduit $\|D_n * f - f\| \leq \|K_n * f - f\| \to 0$, donc $\|f\|_2^2 = \lim \|D_n * f\|_2^2 = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$.

$\square$

Application 1. Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$. Alors $\exists ! u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{T})$ telle que :

$$\begin{cases} \forall (t,x) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{T}, \partial_t u = \Delta u \\ u_t \xrightarrow[t\to 0]{L^2(\mathbb{T})} u_0 \end{cases}$$

Analyse, Unicité.
Par le théorème précédent, on a $u_t(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$. Par dérivation sous l'intégrale, on a en fait $c_n \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^{+*}\right)$ et plus précisément :

$$\begin{array}{rcl} c_n'(t) & = & \int\limits_0^{2\pi} \partial_t u_t(x) e^{-inx} \frac{dx}{2\pi} \\ & = & \int\limits_0^{2\pi} \partial_x^2 u_t(x) e^{-inx} \frac{dx}{2\pi} \\ & = & -\int\limits_0^{2\pi} \partial_x u_t(x) \times (-in) e^{-inx} \frac{dx}{2\pi} \\ & = & \int\limits_0^{2\pi} u_t(x) \times (-in)^2 e^{-inx} \frac{dx}{2\pi} \\ & = & -n^2 c_n(t) \end{array}$$

donc, pour $t > 0$, on a $c_n(t) = c_n^0 e^{-n^2 t}$. Or $u_t \xrightarrow{L^2} u_0$, donc par l'isométrie $L^2(\mathbb{T}) \cong l^2(\mathbb{Z})$ donnée par la formule de Parseval on a $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(t) - c_n(0)|^2 \to 0$ et en particulier $c_n^0 = c_n(0)$. $\square$

Synthèse, Existence.
Considérons donc la fonction $u_t(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{-n^2 t} e^{inx}$. Elle est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{T}$: $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée, donc u est continue par convergence normale sur les $[\epsilon, \infty[\times \mathbb{T}$.

On a plus généralement $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{T})$ en constatant la convergence normale des dérivées partielles car $\left|\partial_t^a \partial_x^b c_n e^{-n^2 t} e^{inx}\right| = |n|^{2a+b} e^{-n^2 t}$. On a en particulier $\partial_t e^{-n^2 t} e^{inx} = -n^2 e^{-n^2 t} e^{inx} = \partial_x^2 e^{-n^2 t} e^{inx}$, donc en passant à la limite dans les sommes associées $\partial_t u = \Delta u$.

La régularité de u garantit $u_t \in L^2(\mathbb{T})$, et par l'isométrie déjà évoquée, $\|u_t - u_0\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^2 \times \left(1 - e^{-n^2 t}\right)^2$. On peut dominer cette famille par (c_n^2). Or chaque terme converge simplement vers 0, donc par convergence dominée on a enfin $u_t \overset{L^2}{\to} u_0$. $\square$