Algorithme de Floyd-Warshall

Léo Gayral

2017-2018

ref : Froidevaux – Types de données et algorithmes – p.477

Remarque 1. Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté valué. Autrement dit, $V = [\![0, n-1]\!]$ et $A \in M_n(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$, où l'infini correspond à une absence d'arête.

On cherche à déterminer les chemins de poids minimaux au sein du graphe G. Ainsi, lorsqu'on considère un chemin $x \to \cdots \to y \to \cdots \to z$ de x à z de poids minimal, on remarque que les sous-chemins $x \to \cdots \to y$ et $y \to \cdots \to z$ sont également minimaux.

Notons cependant que, lorsque G a un cycle de poids strictement négatif, cette notion n'est pas bien définie puisqu'on peut boucler autant de fois qu'on le désire.

Définition 1. On définit la valuation suivante au sein du graphe :

$$d_k(x, y) = \min \left\{ \sum_{i=0}^{r-1} A[s_i, s_{i+1}], r \in \mathbb{N}, s_0 = x, s_r = y, 0 \leq s_1, \ldots, s_{r-1} \leq k \right\}.$$

d_k représente le poids minimal, dans $\overline{\mathbb{R}}$, d'un chemin de x à y dont les sommets intermédiaires sont dans $[\![0, k]\!]$. Lorsqu'on n'a pas de cycle de poids strictement négatif, on a en particulier $d_k(i, j) > -\infty$, atteint pour un chemin de longueur au plus $k+3$. En effet, étant donné un chemin de i à j de longueur au moins $k+4$, on extrait un chemin de longueur au moins $k+2$ entièrement contenu dans $[\![0, k]\!]$, non injectif, donc avec un cycle de poids positif qu'on peut effacer.

Théorème 1 (Algorithme de Floyd-Warshall)**.** On considère l'algorithme impératif suivant, de type *bottom-up* :

```
def FLOYD-WARSHALL(n, A) :

    C = [NIL]_{i,j ∈ ⟦0,n−1⟧}
    W = A
    pour i de 0 a n − 1 :
        W[i, i] = min(0, W[i, i])

    pour k de 0 a n − 1 :
        pour i de 0 a n − 1 :
            pour j de 0 a n − 1 :
                si W[i, k] + W[k, j] < W[i, j] :
                    W[i, j] = W[i, k] + W[k, j]
                    C[i, j] = C[i, k]
```

Cet algorithme termine en $O(n^3)$.

Si G ne contient pas de cycle de poids strictement négatif, $W[i,j]$ contient ultimement le poids minimal d'un chemin de i à j, et $W[i,j]$ contient le successeur de i dans un tel chemin.

En outre, G a un cycle de poids strictement négatif ssi $\min\limits_{i=0}^{n-1} W[i,i] < 0$.

Démonstration.
À tout instant, $W[i,j]$ contient le poids d'un chemin de i à j. Tout au long de l'exécution, $W[i,j]$ ne peut que décroître.

Nommons W_k l'état de W après l'itération k de la grosse boucle *for*. W_k contient les poids de chemins dont tous les sommets intermédiaires sont dans $[\![0,k]\!]$.

Par récurrence sur k, on a une des propriétés suivantes :
— $\forall (i,j) \in V^2, W_k[i,j] = d_k(i,j)$,
— $\exists i \in V, W_k[i,i] < 0$.

Avant la première itération (moralement $k = -1$), le seul chemin possible de i à j est de le long de l'arrête $i \to j$ lorsque $i \neq j$; lorsque $i = j$, on reste sur place (0 réalise le min) ssi la boucle $i \to i$ est de poids positif. La première propriété est donc vérifiée initialement, avec d_{-1}.

Supposons que G n'a aucun cycle de poids strictement négatif. *A fortiori*, la seconde propriété ne peut jamais être vérifiée. Dans ce cas, on va montrer que la première propriété est vraie par récurrence.

Supposons alors la première propriété vraie pour W_k. Si $d_{k+1}(i,j) = d_k(i,j)$, on a :

$$W_{k+1}[i,j] \leq W_k[i,j] = d_k(i,j) = d_{k+1}(i,j) \leq W_{k+1}[i,j]$$

d'où, par égalité dans la chaîne d'inégalités, $W_{k+1}[i,j] = d_{k+1}(i,j)$. D'autre part, si $d_{k+1}(i,j) < d_k(i,j)$, alors on a nécessairement un chemin de poids minimal passant par $k+1$ – on peut supposer une seule fois car les cycles sont de poids positifs – et donc :

$$d_{k+1}(i,j) = d_{k+1}(i,k+1) + d_{k+1}(k+1,j) = d_k(i,k+1) + d_k(k+1,j)$$

et en suivant le même principe que précédemment :

$$W_{k+1}[i,j] \leq W_k[i,k+1] + W_k[k+1,j] = d_{k+1}(i,j) \leq W_{k+1}[i,j]$$

d'où le résultat voulu.

Supposons que G a un cycle de poids strictement négatif. Si jamais la seconde propriété est vraie à un certain rang, elle le reste aux rangs suivants, par décroissance de W. Si G contient un 1-cycle de poids négatif, ce dernier est détecté dès le début dans W_{-1}.

Sinon, il existe un cycle σ – passant par au moins 2 éléments distincts – qui minimise $\max_{j\in\sigma} j$, puis qui minimise $\max_{i\in\sigma, i<j} i$ parmi ceux-ci. Quitte à extraire un sous-cycle, on peut supposer σ injectif. On considère le chemin $j \to \cdots \to i \to \cdots \to j$ correspondant. On peut alors montrer que jusqu'au rang $i-1$, la première propriété est vérifiée, puis que $W_i[j,j] < 0$ est bien le poids du chemin ci-dessus, et du cycle correspondant. $\square$

Remarque 2. En pratique, on peut arrêter l'algorithme dès qu'un coefficient diagonal négatif est détecté. On peut cependant continuer de le faire tourner pour identifier les composantes connexes de G à la volée, et en déduire d'éventuels sous-ensembles sur lesquels D contient effectivement les poids minimaux.