Théorème de Fourier-Plancherel

Léo Gayral

2017-2018

ref : Rudin – Analyse réelle et complexe – p.225

Définition 1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On pose par la suite $\hat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi\xi x}dx$ sa transformée de Fourier, et $\tilde{f}(\xi) = \hat{f}(-\xi)$ sa transformée inverse.

Lemme 1. Soit $\sigma > 0$. On définit $g_\sigma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^{+*} \\ x & \mapsto & \frac{1}{\sigma}e^{-\pi\frac{x^2}{\sigma^2}} \end{array}$ une courbe gaussienne.

— $||g_\sigma||_{L^1} = 1$ pour tout $\sigma > 0$,
— $\int\limits_{|x|\geq\eta} g_\sigma \underset{\sigma\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ pour tout $\eta > 0$,
— $\widehat{g_\sigma}(\xi) = \widetilde{g_\sigma}(\xi) = e^{-\pi\sigma^2\xi^2} = g_1(\sigma\xi)$.

Cette famille de fonctions définit en particulier une approximation de l'unité.

Théorème 1. Soit $f \in L^1 \cap L^2$. Alors $\hat{f} \in L^2$ et $||f||_{L^2} = ||\hat{f}||_{L^2}$.

Démonstration.
On va raisonner par unicité de la limite pour obtenir le résultat.

On pose $\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{f(y)}f(x+y)dy = \langle f, \tau_x f\rangle$. Par continuité de $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & L^2 \\ x & \mapsto & \tau_x f \end{array}\right.$ et inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit que $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$, bornée par $||f||_{L^2}^2$. En particulier, $\varphi(0) = ||f||_{L^2}^2$. Comme g_σ est une approximation de l'unité, et $\varphi \in L^\infty$ est continue en 0, on a la convergence de $\varphi * g_\sigma(0) \underset{\sigma\to 0^+}{\longrightarrow} \varphi(0) = ||f||_{L^2}^2$.

En outre, comme f et $\overline{f}(-\bullet)$ sont dans L^1, on a également $\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-y)\overline{f(-y)}dy = \left[f * \overline{f}(-\bullet)\right](x)$ d'où $\varphi \in L^1$, et donc :

$$\hat{\varphi}(\xi) = \hat{f}(\xi) \times \widehat{\overline{f}}(-\xi) = \hat{f}(\xi) \times \overline{\hat{f}}(\xi) = \left|\hat{f}\right|^2(\xi)\,.$$

En particulier, $\hat{\varphi} \geq 0$ est positive. Si on applique le théorème de Fubini à au produit de convolution convergent ci-dessus, on a alors :

$$\begin{array}{rcl} \varphi * g_\sigma(0) & = & \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(-t) g_\sigma(t) dt \\ & = & \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(-t) \int\limits_{\mathbb{R}} g_1(\sigma x) e^{2i\pi xt} dt \\ & = & \int\limits_{\mathbb{R}} g_1(\sigma x) \widehat{\varphi}(-x) dx \end{array}$$

or g_1 et φ sont positives, et à x fixé on a $g_1(\sigma x)$ qui croît vers 1 en $\sigma \to 0^+$, donc par convergence monotone, $\varphi * g_\sigma(0) \underset{\sigma \to 0^+}{\longrightarrow} ||\widehat{\varphi}||_{L^1} = ||\widehat{f}||^2_{L^2}$.

Par unicité de la limite, $||\hat{f}||_{L^2} = ||f||_{L^2} < \infty$ et donc $\hat{f} \in L^2$. $\square$

Lemme 2. L'ensemble $L^1 \cap L^2$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Démonstration.
Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. On considère $f_n = \chi_{[-n,n]} \times f \in L^2$. Par convergence dominée, $f_n \underset{n \to \infty}{\overset{L^2}{\longrightarrow}} f$. En outre, $||f_n||_{L^1(\mathbb{R})} = ||f||_{L^1([-n,n])} \leq \sqrt{2n} ||f||_{L^2([-n,n])} < \infty$, donc $f_n \in L^1(\mathbb{R})$. $\square$

Théorème 2. La transformée de Fourier précédemment définie sur $L^1 \cap L^2$ induit une unique isométrie $\mathcal{F}$ sur $L^2(\mathbb{R})$, appelée la transformée de Fourier-Plancherel.

Démonstration.
$\mathcal{F}$ est une isométrie linéaire (donc uniformément continue) sur le sous-espace $L^1 \cap L^2$ dense dans $(L^2, ||.||_{L^2})$. Par théorème de prolongement, $\mathcal{F}$ est bien définie de façon unique en tant que prolongement de la transformée de Fourier. $\mathcal{F}$ est en particulier une isométrie, donc injective.

Pour conclure, on admet que la restriction de $\mathcal{F}$ à l'espace de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est une bijection, et que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans L^2, ce qui donne la surjection. $\square$