Processus de Galton-Watson

Léo Gayral

2017-2018

ref : Cottrell – Exercices de probabilités – p.72

Définition 1. Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$. On considère les variables aléatoires $(\xi_{n,j})_{(n,j)\in\mathbb{N}^2} \overset{iid}{\sim} \mu$ sur $\mathbb{N}$. On définit le processus de Galton-Watson $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{aligned} Z_0 &= 1 \\ Z_{n+1} &= \sum_{j=1}^{Z_n} \xi_{n,j} \end{aligned}$$

Théorème 1. On pose $m = \mathbb{E}[\mu] \geq 0$. Sous l'hypothèse $\mu \neq \delta_1$, on a alors deux cas possibles :
- $m > 1$ (cas sur-critique) : $\mathbb{P}(\exists n, Z_n = 0) < 1$,
- $m \leq 1$ (cas sous-critique) : $\mathbb{P}(\exists n, Z_n = 0) = 1$.

Démonstration.
Par construction, si $Z_n = 0$ alors c'est également vrai pour tous les rangs suivants : l'évènement $\{\exists n, Z_n = 0\}$ représente donc l'extinction en temps fini de la population modélisée. On définit la suite (p_n) par $p_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$. Comme $\{\exists n, Z_n = 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{Z_n = 0\}$ est une union croissante d'évènements, la suite (p_n) croissante et $p_\infty := \mathbb{P}(\exists n, Z_n = 0) = \sup_{n\in\mathbb{N}} p_n$.

On considère maintenant $G : z \mapsto \mathbb{E}\left[z^{\xi_{0,0}}\right]$ la fonction génératrice de μ, définie par une série entière de rayon de convergence au moins 1. On définit de même φ_n la fonction génératrice de Z_n.

Montrons par récurrence que $\varphi_n = \overbrace{G \circ \cdots \circ G}^{n \text{ fois}}$. C'est naturellement le cas pour $n = 0$ et, dans le rayon de convergence, on peut appliquer Fubini :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{n+1}(z) & = & \mathbb{E}\left[z^{Z_{n+1}}\right] \\ & = & \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{Z_n=k} \times z^{Z_{n+1}}\right] \\ & = & \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{Z_n=k} \times z^{\xi_{n,1}+\cdots+\xi_{n,k}}\right] \\ & = & \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(Z_n = k\right) G(z)^k \\ & = & \varphi_n \circ G(z) \end{array}$$

d'où le résultat voulu. On s'intéresse plus particulièrement à G sur $[0, 1]$ maintenant. La suite (p_n) y est définie par la relation de récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p_0 & = & 0 \\ p_{n+1} & = & G\left(p_n\right) \end{array} \right.$$

or G est analytique sur $[0, 1[$ et converge en 1 donc, par continuité, p_∞ est un point fixe de G sur $[0, 1]$.

Soit q le plus petit point fixe de G sur $[0, 1]$. En tant que somme de fonctions croissantes, G est croissante sur $[0, 1]$. Comme $p_0 = 0 \leq q$, par récurrence on obtient $p_{n+1} = G\left(p_n\right) \leq G(q) = q$ donc $p_\infty \leq q$ en limite. p_∞ est donc le plus petit point fixe de G sur $[0, 1]$.

On sait déjà que $G(1) = \mathbb{E}[1] = 1$. On veut maintenant déterminer sous quelles conditions G a un point fixe dans $[0, 1[$. On définit pour cela $H(z) = \frac{G(z)-1}{z-1}$ continue sur $[0, 1[$, la pente de la droite passant par $(z, G(z))$ et $(1, G(1))$. On remarque que q est point fixe de G sur $[0, 1[$ ssi $H(q) = 1$.

Par convergence monotone de la série associée, on a $G'(1) = m$ donc $G \in \mathcal{C}^1([0, 1])$; on prolonge alors H continûment par m en 1. Comme $G'' \geq 0$ sur $[0, 1[$, G y est convexe et donc H croissante.

On a $H(0) = 1 - G(0) = 1 - \mu(0) \leq 1$. Si $m > 1$, par le théorème des valeurs intermédiaires on est certain de trouver un point fixe $p_\infty \in [0, 1[$, tel que $H\left(p_\infty\right) = 1$.

Si $m < 1$, alors $H \leq m < 1$ sur $[0, 1]$ donc on n'a aucun point fixe autre que $p_\infty = 1$ sur $[0, 1]$.

Pour le cas critique $m = 1$, comme $\mu \neq \delta_1$, on a nécessairement $k \geq 2$ tel que $\mu(k) > 0$. Il en découle $G''(z) \geq \mu(k) \times k(k-1)z^{k-2} > 0$ sur $]0, 1[$ donc G est strictement convexe sur $[0, 1]$ et H strictement croissante. En particulier, pour $z < 1$ on a $H(z) < H(1) = 1$ donc le seul point fixe de G est $p_\infty = 1$. $\square$

Remarque 1. On remarque que $\mathbb{E}\left[Z_{n+1}|Z_n\right] = mZ_n$ donc le processus $\left(\frac{Z_n}{m^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale. Si μ admet un moment d'ordre 2, alors la martingale précédente est bornée dans L^2 donc converge vers une variable M dans L^2. On peut alors montrer que $\mathbb{P}(M = 0) = p_\infty$.

L'interprétation de ce résultat est que, dans le cas sur-critique, on n'a pas d'intermédiaire entre l'extinction de la population en temps fini, ou bien l'explosion de la population à une vitesse géométrique. On n'observera jamais de cas où la population (Z_n) stagne, décline relativement à m^n, mais sans s'éteindre pour autant.

Remarque 2. Une autre façon de visualiser le processus de Galton-Watson étudié ci-dessus est de le représenter comme un arbre aléatoire.

Ce genre de modélisation a pour avantage de mieux se prêter à une généralisation où on va chercher à différencier les descendants d'un individu X ou Y et pas simplement la population globale à un instant n, ce qui peut être utile pour étudier la propagation de mutations en biologie typiquement.