Groupes d'isométries du tétraèdre et du cube

Léo Gayral

2017-2018

ref : Caldero, Germoni – H2G2, Tome premier – p.363

Lemme 1. Soit T un convexe et $f \in \mathrm{Isom}(T)$. Alors f préserve l'ensemble des points extrémaux de T.

Démonstration.
Comme f est une bijection, alors son inverse f^{-1} est affine, elle respecte les barycentres. Soit $x \in T$ extrémal. Si $f(x)$ n'est pas extrémal dans T, on a $f(x) \in]a, b[$ et donc $x \in]f^{-1}(a), f^{-1}(b)[$ ne l'est pas non plus. $\square$

Théorème 1. Soit T un tétraèdre plein dont les sommets sont A, B, C et D. Alors $\mathrm{Isom}(T) = \mathrm{Isom}(\{A, B, C, D\} \cong S_4$.

Démonstration.
Par le lemme, on a les inclusions de groupes $\mathrm{Isom}(T) \subset \mathrm{Isom}(\{A, B, C, D\}) \subset S_4$ en identifiant une isométrie à la permutation qu'elle opère sur le repère affine (A, B, C, D).

La surjection de cette inclusion découle du fait qu'on peut engendrer toutes les transpositions. Ainsi, on peut échanger A et B via s la symétrie orthogonale selon le plan médiateur de $[AB]$, sans affecter C et D car ils sont dans le plan médiateur. Comme T est l'enveloppe convexe de $\{A, B, C, D\}$, on a $s(T) \subset T$, or s est une involution donc $s|_T : T \to T$ est une involution, une bijection. D'où $s \in \mathrm{Isom}(T)$. $\square$

Remarque 1. On a vu en particulier que $\mathrm{Isom}(T)$ contient des isométries indirectes, donc $\mathrm{Isom}^+(T)$ est un sous-groupe d'indice 2 de $\mathrm{Isom}(T)$. Or le seul sous-groupe d'indice 2 de S_4 est A_4, d'où l'isomorphisme de groupes $\mathrm{Isom}^+(T) \cong A_4$.

Théorème 2. Soit C un cube. On a $\mathrm{Isom}(C) \cong S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Démonstration.
On pose $C = A_1C_2B_1D_2B_2D_1A_2C_1$ de sorte que A_1 et A_2 (resp. B, C, D) sont dans des coins diamétralement opposés et que $T_i = A_iB_iC_iD_i$ $(i \in \{1, 2\})$ forme un tétraèdre. Étant donné un sommet de C, les autres sommets de son tétraèdre T_i sont précisément les sommets de C diamétralement opposés sur une des faces adjacentes. Il en découle que si $f \in \mathrm{Isom}(C)$, alors f réalise une permutation sur les tétraèdres T_1 et T_2 ; on définit alors le morphisme de groupes $\phi : \mathrm{Isom}(T) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui vaut 1 ssi f échange ces tétraèdres.

Soit O l'isobarycentre de C. La symétrie s_O centrale de centre O réalise une permutation sur les sommets de C donc est dans $\mathrm{Isom}(C)$, et échange les sommets diamétralement opposés donc échange T_1 et T_2. De plus, O est invariant sous l'action de $\mathrm{Isom}(C)$, donc s_O est dans le centre du groupe :

$$s_Of(O+v) = s_O(O+\vec{f}(v)) = O-\vec{f}(v) = O+\vec{f}(-v) = f(O-v) = fs_O(O+v) \,.$$

Notons θ l'isomorphisme entre $\mathrm{Isom}(T_1)$ et S_4 décrit dans le premier théorème. En remarquant que pour toute isométrie $f \in \mathrm{Isom}(C)$ on a $fs_O^{\phi(f)} \in \mathrm{Isom}(T_1)$, on peut définir l'application $\psi : \mathrm{Isom}(C) \to S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par :

$$\psi(f) = \left[\theta\left(fs_O^{\phi(f)}\right), \phi(f)\right] \,.$$

On peut aisément vérifier que ψ est un morphisme de groupes. L'injection de ψ découle naturellement de celle de θ. Pour la surjection, il suffit de remarquer l'inclusion $\mathrm{Isom}(T_1) = \mathrm{Isom}(T_2) \subset \mathrm{Isom}(C)$, donc l'image de ψ contient la partie $S_4 \times \{0\}$; quitte à composer chacun de ces éléments par s_O on obtient tout l'espace d'arrivée, donc ψ est bien un isomorphisme. $\square$

Remarque 2. Toute isométrie de $\mathrm{Isom}(C)$ induit une permutation sur les grandes diagonales ($[A_1, A_2]$ etc.) du cube ; on en déduit un morphisme de groupes $\gamma : \mathrm{Isom}^+(C) \to S_4$.

Supposons que $f \in \mathrm{Isom}^+(C)$ préserve les grandes diagonales. Comme f est une isométrie, f échange les extrémités d'une des diagonales ssi elle les échange toutes ; dans ce cas, f et s_O coïncident sur un repère affine (sur les sommets du cube) donc $f = s_O$ est indirecte, ce qui est exclu. D'où $f = \mathrm{Id}$, le morphisme γ est injectif.

Comme pour le tétraèdre, on sait que $\mathrm{Isom}^+(C)$ est un sous-groupe d'indice 2 de $\mathrm{Isom}(C)$. On a égalité des cardinaux au départ et à l'arrivée de γ injectif, donc c'est un isomorphisme de groupes.

On a donc $\mathrm{Isom}^+(C) \cong S_4$. Attention cependant à ne pas le confondre avec le sous-groupe $\psi^{-1}(S_4 \times \{0\})$, qui contient les isométries indirectes de $\mathrm{Isom}(T_1)$.