Inégalité isopérimétrique

Léo Gayral

2017-2018

ref : Zuily, Queffélec – Éléments d'analyse pour l'agrégation – p.101

Lemme 1. Soit Γ une courbe plane fermée simple. Par le théorème de Jordan, Γ délimite un unique compact connexe K, de sorte que $\partial K = \Gamma$.

L'aire de K est égale à $\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} xdy - ydx$.

Démonstration.
A priori, on a $\mu(K) = \int\limits_{R^2} \chi_K(x,y)dxdy = \int\limits_{K} 1dxdy$. Soient $f(x,y) = -\frac{y}{2}$ et $g(x,y) = \frac{x}{2}$. Par la formule de Green-Riemann, on a :

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} xdy - ydx = \int\limits_{\partial K} fdx + gdy = \int_K \left[\partial_x g - \partial_y f\right] dxdy = \int\limits_{K} 1dxdy = \mu(K)\,.$$

□

Théorème 1. Soient $A = \mu(K)$ l'aire délimitée par la courbe, et l son périmètre.

Alors on a l'inégalité $A \leq \frac{l^2}{4\pi}$, avec égalité ssi Γ est un cercle.

Démonstration.
Quitte à dilater l'espace par l'homotétie de rapport $\frac{2\pi}{l}$ – qui préserve le fait d'être ou non un cercle – on se ramène à $l' = 2\pi$. Si on montre que $A' \leq \pi$ dans ce cas, alors $A = A' \times \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \leq \frac{\pi l^2}{4\pi^2} = \frac{l^2}{4\pi}$.

Comme $l = 2\pi$, on peut paramétrer Γ par longueur d'arc sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, de sorte que $\gamma = x + iy \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ et $||\gamma'|| = 1$ constante. En outre, quitte à paramétrer dans le sens inverse, on peut enlever la valeur absolue dans le lemme, de sorte que $A = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{T}} x(t)y'(t) - y(t)x'(t)dt$. En outre, sur $L^2\left(\mathbb{T}, \frac{dt}{2\pi}\right)$ on a :

$$\begin{array}{rcl} \langle \gamma, \gamma' \rangle & = & \int\limits_{\mathbb{T}} \overline{\gamma}\gamma' \frac{dt}{2\pi} \\ & = & \int\limits_{T} xx' + yy' + i(xy' - y'x)\frac{dt}{2\pi} \\ & = & \frac{1}{4\pi}\int\limits_{T} \left(x^2 + y^2\right)' dt + \frac{i}{\pi}A \\ & = & \frac{i}{\pi}A \end{array}$$

Soient $c_n(\gamma) = \langle e^{int}, \gamma \rangle$ les coefficients de Fourier de γ. Comme $\gamma \in \mathcal{C}^1$ on obtient $c_n(\gamma') = in \times c_n(\gamma)$ par intégration par parties.

$(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base Hilbertienne de $L^2\left(\mathbb{T}, \frac{dt}{2\pi}\right)$ donc par la formule de Parseval, $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n(\gamma)|^2 = \int\limits_{T} ||\gamma'(t)||^2 \frac{dt}{2\pi} = 1$. En outre, on a :

$$\begin{array}{rcl} A & = & -i\pi \overline{\langle \gamma, \gamma' \rangle} \\ & = & -i\pi \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \overline{c_n(\gamma)} c_n(\gamma') \\ & = & \pi \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} n \left|c_n(\gamma)\right|^2 \\ & \leq & \pi \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |n| \left|c_n(\gamma)\right|^2 \\ & \leq & \pi \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |c_n|^2 = \pi \end{array}$$

En particulier, si on a égalité, alors dès que $n \notin \{0, 1\}$ on a nécessairement $c_n = \left|c_n\right|^2 = 0$, et donc $|c_1| = 1$, $c_1 = e^{i\theta}$. Autrement dit, $\gamma(t) = c_0 + e^{i(\theta+t)}$ décrit bien un cercle de centre $c_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon 1.

Réciproquement, il est clair qu'un tel cercle – ici normalisé, de périmètre 2π donc de rayon 1 – vérifie le cas d'égalité voulu.

$\square$