Théorème de Krein-Milman

Léo Gayral

2017-2018

ref : FGN – Oraux X-ENS, Analyse 3 – p.100

Lemme 1. Soient $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ un compact convexe, et $c \in \partial K$ un point de l'adhérence. Alors K admet un hyperplan d'appui en c. En d'autres termes, il existe $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$ une forme linéaire telle que $\varphi(K) \leq \varphi(c)$.

Démonstration.
Comme $c \in \partial K$, on a $(x_n) \in (K^c)^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to c$. On considère $y_n = p(x_n)$ sa projection sur K, qui vérifie $\langle x_n - y_n, z - y_n \rangle \leq 0$ pour tout $z \in K$. On pose $u_n = \frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|}$ le vecteur unitaire associé. Quitte à extraire, par compacité de la sphère unité, $u_n \to u$.

$H = c + u^\perp$ est alors un hyperplan d'appui en c. En effet, on a $\forall z \in K, \langle u_n, z - y_n \rangle \leq 0$. Comme p est 1-lipschitzienne, on a $y_n = p(x_n) \to p(c) = c$ donc $\langle u, z - c \rangle \leq 0$ en passant à la limite $n \to \infty$. En particulier, la forme linéaire $\varphi(x) = \langle u, x \rangle$ vérifie les hypothèses voulues. $\square$

Lemme 2. Soient $H = \varphi^{-1}(\lambda)$ un hyperplan d'appui de K en c. Alors $H \cap K$ est également un compact convexe, est c extrémal dans K ssi c extrémal dans $H \cap K$.

Démonstration.
En tant que sous-espace vectoriel de dimension finie, H est un fermé convexe donc $H \cap K$ est également fermé convexe, inclus dans le compact K, donc compact.

Si $c \in]x, y[\subset H \cap K$ n'est pas extrémal, alors il ne l'est pas dans K non plus a fortiori.

Si $c \in]x, y[\subset K$ n'est pas extrémal, comme $\varphi(x), \varphi(y) \leq \lambda = \varphi(c)$, on a nécessairement égalité, donc $]x, y[\subset H \cap K$. $\square$

Théorème 1. Notons $E = \{z \in K, z \in [x, y] \subset K \Rightarrow x = y = z\}$ l'ensemble de ses points extrémaux. Alors $K = \mathrm{Conv}(E)$.

Démonstration.
Montrons le résultat par récurrence sur $d = \dim \mathrm{Vect}\,(K - K)$ la dimension du sous-espace affine engendré.

Si $d = 0$, K est un singleton, ce qui initialise sans soucis la récurrence.

Supposons $d > 0$ et le résultat vrai pour tout K jusqu'au rang $d - 1$. Quitte à identifier K au compact convexe de la direction de l'espace affine associé, on peut supposer $K \subset\subset \mathbb{R}^d$.

Considérons maintenant $x \in \mathring{K}$. Comme la droite $(0, x)$ intersecte ∂K en deux points exactement, il suffit de montrer $\partial K \subset \mathrm{Conv}(E)$.

Soit donc $x \in \partial K$. Par le premier lemme, on a un hyperplan d'appui $H = \varphi^{-1}(\lambda)$ en c. Comme $x \in H \cap K$ un compact convexe, de dimension au plus $d-1$, il s'exprime comme combinaison de points extrémaux de $H \cap K$. Par le second lemme, ces points sont extrémaux dans K, donc $x \in \mathrm{Conv}(E)$. $\square$