Théorème de stabilité de Lyapunov

Léo Gayral

2017-2018

ref : Rouvière – Petit guide de calcul différentiel – p.138

Lemme 1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) < 0\}$. Alors $\exists \alpha > 0$, $||e^{tA}|| = O\left(e^{-t\alpha}\right)$.

Démonstration.
On va effectuer la preuve pour la norme subordonnée à $||.||_\infty$, mais le résultat est plus généralement vrai par équivalence des normes en dimension finie.

Soit $A = D + N$ sa décomposition de Dunford. On a $e^{tA} = e^{tD} \times e^{tN}$. Comme N nilpotente d'ordre $d \leq n$, on a donc $|||e^{tN}||| \leq \sum\limits_{k=0}^{d} \frac{|||N^k|||}{k!} t^k = O(t^d)$. D'autre part, lorsque D est diagonale, $|||e^{tD}||| = \rho\left(e^{tD}\right) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} \left|e^{\lambda t}\right| = e^{-\mu t}$ où $\mu = -\max\limits_{\lambda \in \sigma(A)} \mathrm{Re}(\lambda) > 0$. Par sous-multiplicativité de la norme, pour D diagonalisable, on a $|||e^{tD}||| = O\left(e^{-\mu t}\right)$. On a enfin $|||e^{tA}||| = O\left(t^d e^{-\mu t}\right)$ donc $|||e^{tA}||| = O\left(e^{-\frac{\mu}{2} t}\right)$. $\square$

Théorème 1. Soit $f \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ un champ de vecteurs tel que $f(0) = 0$. Si $A = Df_0 \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n\right)$ a toutes ses valeurs propres (complexes) de partie réelle strictement négative, alors 0 est un point fixe attractif.

Autrement dit, pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$ proche de 0, la solution de $\begin{cases} u'(t) = f(u(t)) \\ u(0) = x_0 \end{cases}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie $u(t) \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0$. De plus, cette convergence se fait à une vitesse exponentielle.

Démonstration.
Dans le cas où $f = Df_0$ est linéaire, le théorème est découle directement

du lemme initial, puisque la solution de l'équation différentielle précédente est alors $z(t) = e^{tA}(x_0)$. On va par la suite confronter ces solutions au cas général.

On considère $(\mathbb{R}^n, \langle\,,\,\rangle)$ muni du produit scalaire euclidien usuel. Soit $b(x,y) = \int\limits_0^\infty \left\langle e^{tA}x, e^{tA}y\right\rangle dt$. L'application $t \mapsto \left\langle e^{tA}x, e^{tA}y\right\rangle$ est continue, à décroissance exponentielle par le lemme précédent, donc la fonction est intégrable sur $\mathbb{R}^+$: b bien définie sur $\mathbb{R}^n$, clairement bilinéaire symétrique positive ; on pose q la forme quadratique associée. Si $q(x) = 0$ alors $||e^{tA}x||_2^2 \equiv 0$, donc par continuité $||x||_2 = 0$ en $t = 0$. b est définie positive donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et on pose $B = \sup\limits_{x,y\in\mathbb{R}^n} \frac{|b(x,y)|}{||x||\times||y||} \in \mathbb{R}^{+*}$ sa norme.

Comme $q(x+h) = q(x) + 2b(x,h) + q(h)$, on a $\nabla q_x(Ax) = 2b(x,Ax) = \int\limits_0^\infty \left(||e^{tA}x||^2\right)'(t)dt = -||x||^2$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ quelconque.

On définit $r : x \mapsto f(x) - Ax = f(x) - [f(0) + Df_0(x)]$ sur $\mathbb{R}^n$. Par définition de la différentielle, $r(x)$ est un $o(x)$ en 0, donc $\phi(x) = \frac{||r(x)||}{||x||}$ continue, nulle en 0.

Soit $u \in \mathcal{C}^1([0,T[, \mathbb{R}^n)$ une solution de l'équation différentielle. On a :

$$\begin{array}{rcl} q(u)' & = & 2b(u, f(u)) \\ & = & 2b(u(t), r[u(t)]) - ||u(t)||^2 \\ & \leq & -[1 - 2B\phi(u(t))]\,||u(t)||^2 \end{array}$$

Soit alors $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in B_{\sqrt{q}}(0,\epsilon)$, $\phi(x) < \frac{1}{4B}$. On pose $I = \{t \in [0,T[, q(u([0,t])) \subset [0,\epsilon^2[\}$. Si $t \in I$, alors sur un voisinage $[t, t+\delta[$, on a $q(u)' \leq -\frac{||u||^2}{2} \leq 0$ donc I un ouvert de $[0,T[$. En outre, si $t \in I$ alors la majoration de $q(u)'$ vraie sur $[0,t]$ donne en particulier $q(u(t)) \leq q(u(0))$ donc par continuité, I est un fermé de $[0,T[$. Dès lors que $x_0 \in B_{\sqrt{q}}(0,\epsilon)$, $0 \in I \neq \emptyset$ donc par connexité on en déduit $I = [0,T[$.

Par le principe d'explosion en temps fini, dès que $x_0 \in B_{\sqrt{q}}(0,\epsilon)$, la solution maximale u est nécessairement définie sur $[0,\infty[$. En outre, dans ce cas, $q(u)' \leq -\frac{||u||^2}{2}$ sur $\mathbb{R}^+$ tout entier. Par équivalence des normes en dimension finie – entre $||.||$ et $\sqrt{q}$ – on a en particulier $q(u)' \leq -\alpha q(u)$ pour un certain $\alpha > 0$. Le lemme de Gronwall nous donne enfin $q(u(t)) \leq q(u(0))e^{-\alpha t}$, d'où la convergence vers 0 à vitesse exponentielle.

$\square$

Remarque 1. Dans le cas où $f = A$ est linéaire, si une valeur propre λ a une partie réelle positive, en posant z_0 un vecteur propre complexe arbitrairement petit associé à λ et $z(t) = e^{\lambda t} z_0$, on obtient une solution complexe qui diverge vers ∞. Comme $A \in M_n(\mathbb{R})$, en considérant la partie réelle (ou imaginaire) de z, on obtient encore une solution de l'équation différentielle qui ne converge pas vers 0.