Plans de leçons

Léo Gayral

2017-2018

Table des matières

Chapitre 1

Algèbre

1.1 104 : Groupes finis. Exemples et applications.

Groupe, sous-groupes engendrés, systèmes de générateurs.

Ordre d'un élément, exposant d'un groupe, théorème de Lagrange.

Centre $Z(G)$, sous-groupe distingué $H \triangleleft G$, groupe quotient G/H.

Morphismes de groupes. Produit de groupes, théorème des restes chinois.

Groupes abéliens. Groupes cycliques. Théorème de structure des groupes abéliens finis.

Groupes de permutations S_n, générateurs. Automorphismes intérieurs de S_n. Injection de G dans $S_{|G|}$. Isométries du tétraèdre.

Groupes de matrices. Injection de S_n dans $GL_n(\mathbb{K})$. Théorème de Burnside. Quaternions. Théorème de Sylow.

Actions de groupe. Formule des classes. Orbites.

1.2 105 : Groupe de permutations d'un ensemble fini. Applications.

Action par conjugaison, décomposition en cycles à support disjoints, générateurs.

Automorphismes intérieurs de S_n. Injection de G dans $S_{|G|}$. Isométries du tétraèdre. Groupes diédraux.

Signature. Groupe alterné. Déterminant. Injection de S_n dans $GL_n(\mathbb{K})$.

1.3 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

Déterminant, comatrice. Homotéties, centre de $GL_n(\mathbb{K})$.

Représentation matricielle de $GL(E)$. Action par conjugaison et changement de base. Injection de S_n dans $GL_n(\mathbb{K})$.

Pivot de Gauss, inversion effective, calcul de déterminant. $SL_n(\mathbb{R})$ engendré par les transvections.

Matrices diagonales, CNS de diagonalisabilité. CNS de trigonalisabilité. Matrices nilpotentes. Théorème de Burnside.

Problèmes de dénombrement sur les corps finis.

Aspects topologiques. Groupe des quaternions. Isomorphismes avec $SO_3(\mathbb{R})$ et $PSU_2(\mathbb{C})$.

Action par congruence, formes quadratique, groupe $O_n(\mathbb{R})$. Théorème de Kakutani et sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

Aspects géométriques. Déterminant en tant que volume. Isométries du tétraèdre.

1.4 108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

Sous-groupe engendré, partie génératrice. Groupe monogène.

Groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, générateurs. Théorème de structure des groupes abéliens finis.

Pivot de Gauss. $SL_n(\mathbb{K})$ engendré par les transvections. Connexité par arcs de $GL_n(\mathbb{C})$, composantes de $GL_n(\mathbb{R})$.

En dimension $n \geq 3$, $SO_n(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements. Isomorphisme entre SO_3 et les quaternions.

Groupes de permutation S_n, générateurs. Automorphismes intérieurs de S_n. Isométries du tétraèdre. Groupes diédraux.

1.5 120 : Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

Structure de groupe, générateurs. Structure d'anneau, inversibles. Indicatrice d'Euler. Algorithme d'Euclide, inversion effective.

Automorphismes. Théorème des restes chinois. Théorème de structure des groupes abéliens finis.

Isomorphisme avec $\mathbb{U}_n$ les racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. Transformée de Fourier rapide.

Cas $n=p$ premier, structure de corps. Critère d'Eisenstein. Corps finis $\mathbb{F}_{p^n}$.

Équations diophantiennes. Théorème de Dirichlet faible.

Cryptographie RSA. Tests de primalité.

1.6 121 : Nombres premiers. Applications.

Nombres premiers sur $\mathbb{Z}$, dénombrement. Théorème de Dirichlet faible.

Tests de divisibilité usuels par 2, 3, 5.

Nombres premiers entre eux. Probabilité que deux entiers soient premiers entre eux.

Structure du corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Algorithme d'Euclide, inversion effective. Critère d'Eisenstein. Corps finis $\mathbb{F}_{q^n}$.

Théorème de Sylow.

Cryptographie RSA. Tests de primalité.

Dénombrement des polynômes irréductibles dans $\mathbb{F}_q[X]$. Algorithme de Berlekamp.

Solutions de $ax^2+by^2=c$, classification des formes quadratiques.

1.7 123 : Corps Finis. Applications.

Anneaux $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Critère d'Eisentstein.

Caractéristique d'un corps. Extension de corps, degré. Bases télescopiques.

Corps de rupture d'un polynôme, corps de décomposition. Clôture algébrique.

Unicité du corps à p^n éléments, inclusions.

Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$. Algorithme de Berlekamp.

Polynômes cyclotomiques dans $\mathbb{F}_q$.

1.8 141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

Anneau des polynômes sur un anneau commutatif $A[X]$. Polynômes sur un corps, facteurs irréductibles. PGCD, PPCM.

Polynômes de $\mathbb{Z}[X]$, décomposition dans $\mathbb{Q}[X]$. Critère d'Eisenstein.

Nombres algébriques. Extensions de corps, degré. Théorème de la base télescopique.

Corps de rupture, de décomposition. Corps algébriquement clos.

Théorème de d'Alembert-Gauss, polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Polynômes cyclotomiques, théorème de Dirichlet faible.

Unicité du corps $\mathbb{F}_{p^n}$ à isomorphisme près. Dénombrement des polynômes irréductibles. Algorithme de Berlekamp.

1.9 150 : Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Action de $GL_n \times GL_m$ sur $M_{n,m}(\mathbb{K})$ par équivalence PMQ^{-1}, invariance totale du rang.

Action à gauche par des transvections et permutations, algorithme du Pivot de Gauss.

Action de GL_n sur M_n par conjugaison PMP^{-1}, changements de base. Invariants de similitude. Topologie des orbites.

Action de GL_n sur les formes quadratiques S_n par congruence PSP^T.

Théorème de Kakutani et sous-groupes compacts de GL_n. Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{F}_q$.

Action de $O_n(\mathbb{R})$, changements de base unitaires.

1.10 151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Espace vectoriel E sur un corps $\mathbb{K}$, sous-espace. Rang d'une famille de vecteurs. Famille génératrice, famille libre.

Matrice dans $M_{m,n}(\mathbb{K})$. Pivot de Gauss, invariance du rang. Dimension. Existence d'un supplémentaire.

Noyau d'une matrice. Algorithme de Berlekamp.

Espace des applications linéaires. Morphisme $K[X] \to K[u]$, polynômes annulateurs.

Dualité en dimension finie. Espace des solutions d'une EDL. Espace des translations d'une fonction.

Extension de corps. Bases télescopiques. Degré.

Aspects topologiques. Espace vectoriel normé. Équivalence des normes. Théorème de Riesz.

Tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé est complet, fermé.

1.11 152 : Déterminant. Exemples et applications.

Déterminant sur $M_n(A)$, avec A est un anneau commutatif. Comatrice, inverse d'une matrice. Formes n-linéaires alternées.

Déterminant du produit, de la transposée, invariance par changement de base. Pivot de Gauss. Déterminant par blocs.

Déterminant de Cauchy. Déterminant de Vandermonde et théorème de Burnside. Déterminant circulant et suite polygonale.

Déterminant et volume dans $\mathbb{R}^n$. Liberté d'une famille en géométrie affine.

Considérations topologiques, différentielle du déterminant. Lien avec les EDL, Wronskien.

Polynôme caractéristique, valeurs propres. Matrices compagnon.

1.12 153 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Composition d'applications linéaires et produit matriciel.

Lemme des noyaux, calcul de $P(M)$, de e^M.

Morphisme $K[X] \to K[u]$, polynômes annulateur, minimal, caractéristique. Cayley-Hamilton.

Matrices diagonalisables, trigonalisables. Réduction de Dunford.

Matrices compagnon, endomorphismes cycliques. Facteurs invariants. Commutant.

1.13 157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Généralités. Lemme des noyaux. Théorème de Cayley-Hamilton.

Matrice nilpotente. Caractérisation par la trace en caractéristique nulle, théorème de Burnside.

Matrice trigonalisable. Existence d'un vecteur propre, condition nécessaire et suffisante.

Décomposition de Dunford. Décomposition de Jordan.

Critère de trigonalisation simultanée.

1.14 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Forme linéaire. Base duale. Isomorphisme avec le bidual. Translatées d'une fonction.

Représentation de Riesz sur les espaces de Hilbert.

Transposée d'une application, représentation matricielle. Orthogonalité. Prolongement par Hahn-Banach.

Hyperplan. Sous-espace comme intersection d'hyperplans, équation d'un espace vectoriel, pivot de Gauss. Krein-Milman.

Liens avec la différentielle sur $\mathbb{R}^n$.

Produit tensoriel. Formes multilinéaires.

1.15 162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Calcul d'un produit de matrices, complexité. Choix d'un parenthésage. Transformée de Fourier rapide. Algorithme de Strassen.

Inversion d'un système. Pivot de Gauss. Calcul du déterminant. Décomposition LU sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Matrices non inversibles. Détermination du noyau comme intersection d'hyperplans. Algorithme de Berlekamp.

Méthodes itératives de résolution.

1.16 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Formes bilinéaires sur un espace vectoriel, formes quadratiques. Représentation matricielle.

Forme quadratique non dégénérée. Orthogonalité. Isotropie, cône d'isotropie. Changements de base. Discriminant.

Cas des corps finis. Algorithme de réduction de Gauss en caractéristique différente de 2. Classification des formes quadratiques.

Cas de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Classification de Sylvester. Formes quadratiques définies positives sur $\mathbb{R}$, espace euclidien.

Groupe d'isométries $O(q)$. Théorème de Kakutani et sous-groupes compacts de $GL(E)$. Différentielle seconde.

Réduction simultanée de deux formes quadratiques, diagonalisation unitaire dans un espace euclidien. Coniques.

1.17 181 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Espace affine. Barycentre. Coordonnées barycentriques et applications affines.

Caractérisation d'un sous-espace par les barycentres. Lien entre coordonnées barycentriques et rang d'une matrice.

Barycentres à coefficients positifs, interprétation géométrique. Ensemble convexe. Enveloppe convexe. Théorème de Carathéodory.

Aspects topologiques, convexes d'intérieur non vide. Kakutani, sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

Points extrémaux. Projection sur un convexe fermé. Hyperplans d'appui. Théorème de Krein-Milman.

Matrices bistochastiques comme enveloppe des permutations.

Aspects géométriques. Points remarquables du triangle. Isométries du tétraèdre et du cube.

1.18 182 : Applications des nombres complexes à la géométrie.

Affixe d'un point du plan. Complexes en tant que méthode de calcul. Barycentres. Suite polygonale.

Exponentielle complexe, notion d'angles. Isométries affines et fonctions complexes.

Cercles, droites, inversions du plan. Triangles.

Géométrie projective, sphère de Riemann, homographies.

Structure des quaternions. Isomorphisme avec $SO_3(\mathbb{R})$.

1.19 183 : Utilisation des groupes en géométrie.

Programme d'Erlangen, définir la géométrie via les groupes, sans axiomatique.

Géométrie affine. Application linéaire. Barycentres. Repère barycentrique.

Géométrie euclidienne. Isométries affines, cas du tétraèdre. Notion d'angle. Quaternions et $SO_3(\mathbb{R})$.

Formes quadratiques et classification des coniques.

Notions de géométrie projective. Homographies sur la sphère de Riemann.

1.20 190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Calcul de cardinaux. Formule du binôme de Newton.

Groupes finis. Indicatrice d'Euler. Formules des classes. Automorphismes de S_n. Groupes $GL_n(\mathbb{F}_q)$. Théorème de Sylow.

Séries génératrices. Nombres de Bell.

Fonction μ de Möbius. Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$.

Solutions de $ax^2+by^2=c$ sur $\mathbb{F}_q$. Classification des formes quadratiques.

Formule du crible. Probabilité que deux entiers soient premiers entre eux.

Dénombrement de chemins dans un graphe. Percolation aléatoire.

Télescopage de séries. Complexité du tri rapide randomisé.

Dénombrement dans des arbres. Nombre minimal de comparaisons dans un tri.

Chapitre 2

Analyse

2.1 203 : Utilisation de la notion de compacité.

Compacité topologique, cas d'un espace métrique. Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Continuité sur un compact métrique. Théorèmes de Weierstrass, de Dini, d'Ascoli. Théorème de Cauchy-Lipschitz.

Compacité de la boule unité dans un espace vectoriel normé.

Liens avec la convexité. Théorème de Krein-Milman. Théorème de point fixe de Kakutani, sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

Recherche d'extrema. Théorème de d'Alembert-Gauss. Méthode du gradient à pas optimal.

2.2 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Normes, comparaison de normes. Équivalence des normes, compacité de la boule unité en dimension finie. Dual topologique.

Complétude, espaces de Banach. Séries sommables, convergence normale. Prolongement d'une application linéaire.

Produit scalaire, espaces de Hilbert. Identités remarquables. Théorème de Fourier-Plancherel. Échantillonnage de Shannon.

Espaces euclidiens. Projection sur un convexe fermé, théorème de Krein-Milman. Théorème de point fixe de Kakutani.

2.3 215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Différentielle d'une application. Gradient. Dérivées directionnelles. Inégalité des accroissements finis.

Différentielle seconde. Théorème de Schwarz.

Points critiques d'une fonction différentiable et extrema locaux. Liens entre fonctions convexes et différentiables.

Problèmes d'optimisation. Gradient à pas optimal.

Équations différentielles. Point fixe de Lyapunov. Équation de la chaleur sur le cercle.

Difféomorphismes. Inversion locale. Théorème de changement de variables. Fonctions implicites. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$.

2.4 218 : Applications des formules de Taylor

Notations Landau, développement limité. Formule de Taylor reste-intégrale sur des fonctions $\mathcal{C}^k$, inégalité de Taylor-Lagrange.

Un développement à l'ordre 2 n'implique pas une fonction 2-dérivable. Fonction caractéristique et moments.

Développements usuels de fonctions analytiques. Analycité de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ par contrôle des dérivées.

Étude locale d'une courbe plane.

Décomposition en éléments simples, formule de Taylor sur une fraction rationnelle. Méthode de Newton polynômiale.

2.5 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Extrema sur un ensemble de réels. Existence d'extrema par continuité sur compact.

Caractérisation dans le cas $\mathcal{C}^1$. Cas des fonctions convexes. Algorithme du gradient à pas optimal.

Recherches de points critiques sur $\mathbb{R}$, de zéros d'une fonction. Méthode dichotomique. Méthode de Newton.

Optimisation sous contrainte. Extrema liés. Billard convexe.

Problèmes géométriques. Inégalité isopérimétrique, bulles de savon en dimension supérieure. Projection sur un convexe fermé.

Principe du maximum. Cas des fonctions holomorphes. Théorème de d'Alembert-Gauss via l'holomorphisme $\frac{1}{P}$.

2.6 220 : Équations différentielles $X' = f(t,X)$. Exemples d'études des solutions en dimension 1 et 2.

Équations différentielles d'ordre n réelles, d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^n$.

Problème de Cauchy. Théorème de Cauchy-Lipschitz, Cauchy-Peano-Arzela.

Lemme de Gronwall. Explosion en temps fini. Raccord de solutions, solution maximale. Flot d'une équation.

Équations autonomes. Points fixes. Théorème de Lyapunov. Portraits de phase.

Cas linéaire, à coefficients constants. Translatées d'une fonction continue.

2.7 221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Équations différentielles d'ordre n réelles, d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^n$.

Linéarité, espace des solutions. Wronskien d'une famille de solutions.

Problème de Cauchy. Théorème de Cauchy-Lipschitz.

Résolvante d'une équation. Méthode de variation de la constante.

Cas d'un système homogène, à coefficients constants. Exponentielle matricielle. Translatées d'une fonction continue.

Approximation de systèmes non linéaires. Théorème de Lyapunov.

2.8 223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Suites monotones, convergentes. Théorème de Césaro. Suites de Cauchy.

Suites extraites, valeurs d'adhérence, théorème de Bolzano-Weierstrass. Limite supérieure et inférieure.

Comparaison de suites. Suites adjacentes. Suites équivalentes. Formule de Stirling.

Vitesse de convergence. Suites à convergences lente. Méthode de Newton.

Caractérisation séquentielle de la continuité. Suites récurrentes. Galton-Watson.

2.9 224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Principes généraux, notations Landau. Développement asymptotique, développement limité. Formules de Taylor.

Critères de comparaison série-intégrale, équivalents de séries divergentes. Formule de Stirling. Série harmonique.

Vitesse de convergence. Développement asymptotique de suites récurrentes à convergence lente. Méthode de Newton.

2.10 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Suites réelles d'ordre p et suites vectorielles.

Cas d'une fonction affine, continue, contractante.

Applications en analyse numérique. Méthode de Newton. Gradient à pas optimal. Méthode itérative de résolution.

Approximation de la valeur propre de plus grand module via $f(x) = \frac{Ax}{|Ax|}$.

Applications aux probabilités. Chaînes de Markov, théorème de Perron-Frobenius. Processus de Galton-Watson.

Notions de systèmes dynamiques discrets. Critère d'ergodicité d'un complexe de module 1.

2.11 228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Continuité. Uniforme continuité et compacité. Caractérisation séquentielle. Théorème des valeurs intermédiaires.

Dérivabilité. Egalité des accroissements finis. Formules de Taylor.

Lien avec la monotonie, la convexité. Processus de Galton-Watson.

Espaces de fonctions usuels. Densité des polynômes. Prolongement par continuité.

Intégrale paramétrique d'une fonction. Lien avec la dérivée. Translatées d'une fonction. Fonction caractéristique et moments.

Intégrale d'une fonction L^1. Théorème de dérivation de Lebesgue.

Notion de dérivabilité en dimensions supérieures, dérivées directionnelles.

2.12 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Fonction monotone sur $\mathbb{R}$. Notion de limite à gauche, à droite. Liens avec la dérivée.

Fonction convexe sur $\mathbb{R}$. Liens avec f' et f''. Taux de variations d'une fonction convexe, processus de Galton-Watson.

Convexité en dimension supérieure. Forte convexité. Gradient à pas optimal.

Inégalité de Jensen. Inégalité de Hölder.

2.13 230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Série de nombres positives. Convergence dans $\overline{R^+}$. Séries complexes sommables.

Produit de Cauchy. Probabilité que deux entiers premiers entre eux.

Séries alternées. Comparaison série-intégrale. Règle de d'Alembert. Équivalence de séries divergentes, de restes convergents.

Séries de Riemann. Séries de Bertrand. Séries harmonique.

Transformée d'Abel.Nombres de Liouville transcendants. Séries réelles semi-convergentes. Produit de Cauchy.

Séries entières. Nombres de Bell.

Séries réelles alternées. Théorème Taubérien fort. Application au calcul de $\ln(2)$.

Espace $l^2(\mathbb{Z})$, formule de Parseval.

2.14 233 : Méthodes itératives en analyse numérique matricielle.

Système inversible $Ax=b$. Cas d'une matrice symétrique $AA^T \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, de diagonale positive.

Méthode itérative $A=M-N$. Lien entre la norme matricielle et le rayon spectral. Conditionnement.

Convergence de la méthode, vitesse de convergence. Cas particuliers des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.

Méthodes de descente de gradient. Algorithme du gradient à pas optimal, cas de la fonction $J(x)=\frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle-\langle b,x\rangle$.

Approximation de valeurs propres. Méthode des puissances. Algorithme QR.

Schémas numériques, discrétisation d'opérateurs différentiels.

2.15 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Intégration par parties. Décomposition en éléments simples de fractions rationnelles.

Changement de variables, coordonnées polaires. Convergence dominée, convergence monotone. Théorème de Fubini.

Intégrales semi-convergentes. Calculs de résidus via des intégrales de contour.

Transformée de Fourier, séries de Fourier. Cas des gaussiennes. Isométrie de Plancherel. Équation de la chaleur sur le cercle.

Formule de Stokes. Inégalité isopérimétrique.

Calcul approché d'intégrales. Méthode des rectangles, des trapèzes. Méthode de Monte-Carlo.

2.16 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Cas naïf de $\int^x f$ en tant que primitive de f continue. Théorème de différentiation de Lebesgue lorsque f est localement intégrable.

Théorème de continuité, de dérivation, d'holomorphie sous l'intégrale.

Convolution de fonctions L^1, approximations de l'unité, transformée de Fourier. Théorème de Fourier-Plancherel.

Résolution d'EDP. Équation de la chaleur sur le cercle.

2.17 243 : Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Série entière. Rayon de convergence. Sommation par paquets, produit de Cauchy. Critères de convergence, comparaison de séries.

Fonction analytique. Unicité du développement en série entière. Détermination de coefficients par récurrence.

Définition de π à partir de l'exponentielle.

Séries génératrices. Nombres de Bell. Processus de Galton-Watson.

Comportement au bord du disque de convergence. Pôles, singularités essentielles. Théorème Taubérien, exemple sur $\ln(2)$.

2.18 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

Espace de Hilbert. Famille orthonormale. Inégalité de Bessel. Cas des fonctions périodiques. Espace $L^2(\mathbb{T})$.

Base hilbertienne. Existence d'une base dans un Hilbert séparable. Formule de Parseval. Inégalité isopérimétrique.

Résolution d'EDP. Équation de la chaleur sur cercle.

Noyau de Féjer, convergence au sens de Cesaro. Approximation uniforme de fonctions continues, de fonctions C^1_{pm}.

Séries de Fourier divergentes. Phénomène de Gibbs.

Liens avec le traitement du signal. Échantillonnage de Shannon.

2.19 250 : Transformée de Fourier. Applications.

Définition L^1. Régularité. Décroissance. Formule d'inversion. Exemples usuels.

Convolution. Dérivation. Approximations de l'unité. Fonctions gaussiennes.

Espace de Schwarz, distributions tempérées.

Cas L^2, théorème de Plancherel. Échantillonnage de Shannon.

Probabilités. Fonctions caractéristiques. Régularité et moments.

Généralisation sur $\mathbb{C}$ et transformée de Laplace.

2.20 260 : Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

Espace probabilisé. Variable aléatoire. Mesure induite. Espérance. Inégalités de Markov, de Chebychev, de Jensen.

Moments d'ordre p. Inclusions canoniques. Moments centrés. Variance.

Fonction caractéristique, régularité et moments.

Variables aléatoires indépendantes. Série génératrice d'une variable discrète. Processus de Galton-Watson.

Loi des grands nombres. Espérance conditionnelle.

2.21 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Espace probabilisé discret. Variable aléatoire. Espérance. Formule de transfert. Indépendance. Série génératrice.

Lois usuelles. Loi sans mémoire. Inégalités de Markov, Tchebychev. Théorème de Borel-Cantelli.

Modèles de graphes aléatoires. Processus de Galton-Watson. Percolation de $\mathbb{Z}^d$.

Chaînes de Markov. États récurrents, transients. Théorème de Perron-Frobenius, probabilité invariante.

Chapitre 3

Informatique

3.1 901 : Structures de données. Exemples et applications.

Structures linéaires : piles, files, listes, tableaux. Tableaux dynamiques.

Structure d'ensemble. Structure de dictionnaire. Tables de hachage.

Structures d'arbre, de graphe. Arbres binaires de recherche. Tri par tas. ABRO.

Partitions, UNION-FIND.

3.2 902 : Diviser pour régner. Exemples et applications.

Principe de base : décomposition en sous-problèmes indépendants.

Tri fusion. Master theorem. Tri rapide randomisé. Notions de parallélisme sur le tri rapide. Sélection en temps linéaire.

Produit de polynômes naïf. Algorithme de Karatsuba. Transformée de Fourier rapide. Algorithme de Strassen.

Algorithme de Berlekamp.

Limites de la méthode : Fibonacci, nécessité de mémoïsation.

3.3 903 : Exemples d'algorithmes de tri. Correction et complexité.

Tri par bulles, tri par insertion. Idées fondamentales. Tri en place, tri stable.

Borne inférieure sur les algorithmes de tri par comparaison.

Tri par tas. Diviser pour régner, tri fusion. Tri rapide randomisé. Algorithme de sélection.

Tri par comptage. Tri par seaux, sur des nombres équirépartis.

Tri topologique d'un graphe orienté acyclique. Notions de tri parallèle, tri rapide parallèle.

Application à la gestion de bases de données. Affichage de données 3D. Gestion de priorités.

3.4 906 : Programmation dynamique. Exemples et applications.

Exemples introductifs : Suite de Fibonacci, produit de matrices.

Principes de base, décomposition en sous-problèmes liés. Mémoïsation. Stratégies *bottom-up* et *top-down*. Complexité en espace.

Algorithmes du texte. ABRO. Algorithme CYK. Recherche de sous-séquence.

Floyd-Warshall. Minimisation du nombres de pièces à rendre. Interpolation de Lagrange.

3.5 907 : Algorithmique du texte. Exemples et applications.

Représentation du texte en machine. Codages ASCII, UTF-8.

Recherche de motif dans un texte. KMP. Analyse sémantique. Simulation d'un AFD sur une expression rationnelle.

Comparaison de textes. Plus longue sous-séquence commune. Distance d'édition.

Analyse syntaxique. Algorithme CYK.

Structures de dictionnaire. ABRO. Compression de données. LZW.

3.6 909 : Langages rationnels et automates finis. Exemples et applications.

Automates. Déterminisation, automate des parties. Lemme de Kleene.

Équivalence avec les expressions rationnelles. Simulation d'un AFD. Opérations sur les langages.

Algorithme de Hopcroft, minimisation d'automates. Arithmétique de Presburger. Automate dans KMP.

Automates à pile et machines de Turing. Propriétés décidables sur un langage rationnel.

3.7 912 : Fonctions récursives primitives et non primitives. Exemples.

Définition formelle. Exemples. Fonction de Ackermann. Analogie avec les algorithmes.

Autres modèles de calcul. Fonctions récursives en λ-calcul. Machines de Turing par les fonctions récursives.

Fonctions non récursives. Castor Affairé.

3.8 913 : Machines de Turing. Applications.

Définition. Nombre de rubans. Codage, universalité.

Décidabilité d'un langage. Problème de l'arrêt. Théorème de Rice. Correspondance de Post.

Modèle de calcul. Implémentation de la β-réduction. Simulation par des fonctions récursives. Fonction du Castor affairé.

Complexité d'un problème. Cook. Réductions.

3.9 914 : Décidabilité et indécidabilité. Exemples.

Langages décidables sur les machines de Turing.

Réduction de langages. Machine universelle, théorème de Rice. Problème de Post.

Fonctions calculables, modèles de calcul, lien avec la décidabilité.

Dédidabilité de théories du premier ordre. Théorie des ordres denses. Arithmétique de Presburger.

3.10 915 : Classes de complexité. Exemples.

Définition formelle sur une machine de Turing. Classes de complexité en temps, en espace, non-déterministes.

Théorèmes d'accélération linéaires. Codages d'un problème. Classes P, NP, EXP. Certificat.

Équivalence polynômiale avec la notion naïve d'algorithme (sur une machine RAM), avec des variantes de machines de Turing.

Problèmes NP-complets. Cook. Réductions polynômiales. HAM-PATH.

Approximmations. Voyageur de commerce euclidien.

Autres classes. Complexité en espace, Savitch. 2-SAT.

3.11 916 : Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.

Représentation des formules. Lecture unique. Notation polonaise. Formes normales. Systèmes de connecteurs.

Sémantique, théorème de compacité. Preuves syntaxiques, système LK. Théorème de complétude.

NP-complétude. 3-SAT. HAM-PATH. 2-SAT.

3.12 918 : Systèmes formels de preuve en logique du premier ordre. Exemples.

Formules du premier ordre. Déduction naturelle et logique intuitionniste.

Systèmes de calcul des séquents LK et LJ. Systèmes équivalents. Exemple de démonstration.

Liens avec la théorie des modèles et les aspects sémantiques.

Notions de preuve automatique. Unification. Élimination des quantificateurs. Théorie des ordres denses.

3.13 921 : Algorithmes de recherche et structures de données associées.

Recherche d'un élément dans un ensemble. Structure de dictionnaire. ABRO. Tables de hachage.

Classes d'équivalence, recherche d'un représentant. Structure UNION-FIND.

Dans une liste triée. Recherche du minimum dans une liste non triée, du k-ième élément, algorithme de sélection en temps linéaire.

Recherche d'un motif dans un texte. Algorithme KMP. Plus longue sous-séquence, distance d'édition.

Analyse numérique. Recherche de zéros. Recherche de minimum, descente de gradient, résolution approchée de systèmes linéaires.

3.14 923 : Analyse lexicale et syntaxique. Applications.

Code d'un algorithme. Compilation. Différentes phases de l'analyse. Localisation, correction des erreurs.

Analyse lexicale. Classification de mots. Langages rationnels. Structure de dictionnaire. Simulation d'un AFD.

Analyse syntaxique. Langages algébriques. Ambiguïtés. Construction d'un arbre syntaxique. Algorithmes CYK.

Analyse sémantique. Typage des variables, des fonctions. Logique de Hoare et IMP.

3.15 924 : Théories et modèles en logique du premier ordre. Exemples.

Termes, formules. Théories, modèles. Axiomatisations. Théorème de compacité. Lowenhein-Skolem.

Exemples de théories. ZF. Arithmétique de Peano, théorème d'incomplétude.

Théorie décidable. Presburger. Théorie indécidable.

Élimination des quantificateur. Théorie des ordres denses.

Limites des théories du premier ordre.

3.16 925 : Graphes : représentations et algorithmes.

Représentations par matrice d'adjacence, par liste des voisins. Parcours en largeur, en profondeur.

Arbre couvrant minimal, algorithme de Prim. Chemins minimaux, algorithme de Floyd-Warshall.

NP-complétude de HAM-PATH. Voyageur de commerce euclidien. 2-approximation gloutonne de VERTEX-COVER.

Tri topologique. Mise sous forme de Chomsky.

3.17 926 : Analyse des algorithmes : complexité. Exemples.

Complexité en temps d'une opération élémentaire, complexité en espace. Complexité en moyenne, dans le pire des cas.

Création d'un tas binaire en temps linéaire. Borne inférieure du nombre de comparaisons d'un tri. Problème $P = NP$.

Diviser pour régner. Master theorem. Transformée de Fourier rapide. Algorithme de Strassen.

Algorithmes randomisé. Tri rapide aléatoire. Espérance de la complexité. Algorithmes parallèles. Tri rapide parallèle.

Optimisation de la complexité moyenne sous une loi de probabilités spécifique. ABRO.

Analyse amortie. Notions naïves. Structure UNION-FIND. Tableau dynamique.

3.18 927 : Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison.

Terminaison et boucles *while*, correction d'un algorithme. Invariant de boucle. Variant décroissant pour un ordre bien fondé.

Algorithmes récursifs, raisonnements inductifs. Fonction de Ackerman.

Programmation dynamique. Algorithme de Floyd-Warshall.

Structures de données. Tri par tas.

Algorithmes gloutons. Distances à un point source sur un graphe (Djikstra). ABRO.

Langage IMP. Système de démonstration formel : logique de Hoare. Exemple de la factorielle.

3.19 928 : Problèmes NP-complets : exemples et réductions.

Problèmes NP. Vérificateurs. Réduction polynômiale, problèmes NP-durs.

NP-Complétude, Cook. HAM-PATH.

Approximations polynômiales. Voyageur de commerce euclidien.

3.20 929 : Lambda-calcul pur comme modèle de calcul. Exemples.

Lambda-termes. α-conversion. Redex, β-réduction. β-équivalence. Indices de de Bruijn. Combinateur de point fixe.

Propriété de confluence de Church-Rosser. Forme normale. Algorithme de β-réduction, stratégie externe gauche.

Modèle de calcul. Fonctions lambda-calculables. Fonctions usuelles en lambda-calcul. β-réduction sur une machine de Turing.