Percolation aléatoire du réseau $\mathbb{Z}^d$

Léo Gayral

2017-2018

ref : Grimmett – Probability on Graphs – p.40

Définition 1. Soit $\mathbb{A}^d := \{x, y \in \mathbb{Z}^d, \|y - x\|_1 = 1\}$ l'ensemble des arrêtes du réseau $\mathbb{Z}^d$.

On considère la famille $(X_a)_{a\in\mathbb{A}^d} \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{B}(p)$. On peut alors définir la percolation aléatoire $G_p = \left(\mathbb{Z}^d, A_p\right)$ où $A_p = \left\{a \in \mathbb{A}^d, X_a = 1\right\}$.

Lemme 1 (Couplage de graphes)**.** Soient $p \leq q \in [0, 1]$. Sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ adapté, on peut définir G_p et G_q de sorte que $\mathbb{P}\left(G_p \subset G_q\right) = 1$.

Démonstration.
Soit $(U_a)_{a\in\mathbb{A}^d} \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{U}([0, 1])$. On considère les variables aléatoires $X_{a,p} = \mathbb{1}_{U_a\leq p}$.

D'une part, à p fixé, $(X_{a,p})_a \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{B}(p)$ définit bien un ensemble d'arêtes aléatoire A_p et un graphe G_p.

En outre, à $a \in \mathbb{A}^d$ fixé, l'application aléatoire $p \mapsto X_{a,p}$ est toujours croissante, donc $p \mapsto A_p$ est toujours croissante au sens de l'inclusion dans $\mathbb{A}^d$, et donc en particulier $G_p \subset G_q$. $\square$

Définition 2. Un chemin auto-évitant sur le graphe $G = (S, A)$ correspond à une application $\pi : I \to S$ injective – avec I un segment initial de $\mathbb{N}$ – telle que :

$$\forall (i, i + 1) \in I \times I, (\pi(i), \pi(i + 1)) \in A\,.$$

et alors $|I| - 1$ est la longueur ce ce chemin.

Proposition 1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p > 0$. Presque-sûrement, G_p contient un chemin auto-évitant de longueur n.

Démonstration.
Quitte à considérer la restriction de G_p à l'axe $Z \times \{0\}^{d-1}$, il suffit de montrer le résultat pour $d = 1$, où $\mathbb{A} = \{(i, i+1), i \in \mathbb{Z}\}$.

On considère le chemin $\pi_k : \begin{array}{ccc} [\![0, n]\!] & \to & \mathbb{Z} \\ i & \mapsto & kn + i \end{array}$, de sorte que les évènements $(\pi_k \in A_p)_{k \in \mathbb{N}}$ sont indépendants, de même probabilité p^n, donc par le théorème de Borel-Cantelli, une infinité de ces évènements, de ces chemins auto-évitants de longueur n dans G_p, est réalisée presque-sûrement. $\square$

Théorème 1. On considère maintenant E_p^n l'évènement « il existe un chemin auto-évitant de longueur n partant de l'origine dans G_p », avec $n \in \overline{\mathbb{N}}$.

Il existe alors une unique probabilité critique $p_c(d) \in]0, 1]$ telle que :
— Si $p > p_c$, alors $\mathbb{P}\left(E_p^\infty\right) > 0$,
— Si $p < p_c$, alors $\mathbb{P}\left(E_p^\infty\right) = 0$.

Démonstration.
Considérons le couplage annoncé précédemment. A $\omega \in \Omega$ fixé, si $\omega \in E_p^n$, alors on a un chemin auto-évitant $\pi : I \to \mathbb{Z}^d$ dans G_p. Pour $q > p$, on a $G_p \subset G_q$ donc π est également dans G_q, d'où $\omega \subset E_q^n$. Par construction, l'application aléatoire $p \mapsto E_p^n$ est croissante pour l'inclusion, donc en passant à l'intégrale, $p \mapsto \mathbb{P}\left(E_p^n\right)$ est également croissante. Il en découle l'existence et unicité de $p_c \in [0, 1]$.

Pour montrer $p_c > 0$, on va chercher à majorer $\mathbb{P}\left(E_p^\infty\right)$. La famille $\left(E_p^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, et $E_p^\infty \subset \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} E_p^n$, donc $\mathbb{P}\left(E_p^\infty\right) \leq \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(E_p^n\right)$. En utilisant la méthode du premier moment :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\left(E_p^n\right) & \leq & \mathbb{E}\left[\#\left\{\pi : [\![0, n]\!] \to \mathbb{Z}^d \text{ dans } G_p, \text{ auto-évitant}, \pi(0) = 0\right\}\right] \\ & \leq & \mathbb{E}\left[\#\left\{\pi : [\![0, n]\!] \to \mathbb{Z}^d \text{ dans } G_p, \text{ sans rebroussement}, \pi(0) = 0\right\}\right] \\ & \leq & 2^d \times \left(2^d - 1\right)^{n-1} \times \mathbb{P}\left(\pi \text{ dans } G_p\right) \\ & \leq & \frac{2^d}{2^d - 1}\left(p\left(2^d - 1\right)\right)^n \end{array}$$

donc, lorsque $p < \frac{1}{2^d - 1}$, $\mathbb{P}\left(E_p^\infty\right) = 0$. Il en découle $p_c(d) \geq \frac{1}{2^d - 1} > 0$. $\square$

Remarque 1. E^∞ est réalisé si et seulement si la composante connexe de 0 est infinie dans G. Le sens direct est assez évident. Le sens réciproque se démontre par compacité.

Le degré de chaque sommet de G est ici majoré par 2^d. Si la composante connexe de 0 est bornée par M pour la distance de graphe, alors elle a au plus $\left(2^d\right)^M$ éléments, et est donc finie.

Soit γ_n un chemin de longueur n qui relie 0 à un point à distance n dans G ; le point précédent nous garantit l'existence d'un tel chemin. Comme ce chemin a pour longueur la distance entre 0 et $\gamma_n(n)$, on en déduit qu'il est nécessairement injectif, auto-évitant.

En outre, au bout de k étapes, tout chemin partant de 0 est à valeurs dans le compact discret $[\![-k, k]\!]^d$. Par extraction diagonale, on en déduit $\left(\gamma_{\sigma(n)}\right)$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $\left(\gamma_{\sigma(n)}(k)\right)_n$ (bien définie à partir d'un certain rang) converge vers $\pi(k)$. L'application $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^d$ définit alors un chemin auto-évitant infini, car toute restriction finie de π correspond à la restriction de tous les $\gamma_{\sigma(n)}$ à partir d'un rang.

Remarque 2. La borne précédente sur p_c n'est a priori pas optimale. On sait en particulier que $p_c(2) = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$.

Comme $n \mapsto p_c(n)$ est décroissante, on en déduit en particulier $p_c(n) \in]0, 1[$ dans le cas $n \geq 2$.

On sait également que, pour $d = 2$ et $d > 18$, que $\mathbb{P}\left(E_{p_c}^{\infty}\right) = 0$. Pour les cas intermédiaires, ce n'est à l'heure actuelle qu'une conjecture.

En outre, ce genre de modèles a de multiples applications, que ce soit en physique des matériaux ou pour modéliser des feux de forêts.