Démonstrations en calcul des séquents

Léo Gayral

2017-2018

ref : DNR – Introduction à la logique – p.187

Proposition 1 (Loi de De Morgan)**.** On considère A et B deux formules du premier ordre. La formule $\neg A \wedge \neg B \leftrightarrow \neg(A \vee B)$ est un théorème.

Démonstration.

Le résultat, du point de vue sémantique, est clairement vrai en regardant une simple table de vérité. On va chercher à le démontrer dans le formalisme du calcul des séquents LK.

En ce qui concerne le sens direct :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\RightLabel{$\neg_g$}
\UnaryInfC{$\neg A, A \vdash$}
\RightLabel{aff_g}
\UnaryInfC{$\neg A, \neg B, A \vdash$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$B \vdash B$}
\RightLabel{$\neg_g$}
\UnaryInfC{$\neg B, B \vdash$}
\RightLabel{aff_g}
\UnaryInfC{$\neg A, \neg B, B \vdash$}
\RightLabel{$\vee_g$}
\BinaryInfC{$\neg A, \neg B, A \vee B \vdash$}
\RightLabel{$\wedge_g$}
\UnaryInfC{$\neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash$}
\RightLabel{$\neg_d$}
\UnaryInfC{$\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$}
\RightLabel{$\rightarrow_d$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$}
\end{prooftree}
$$

Et, de façon similaire, on a le sens réciproque :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$B \vdash B$}
\RightLabel{aff_d}
\UnaryInfC{$B \vdash A, B$}
\RightLabel{$\vee_d$}
\UnaryInfC{$B \vdash A \vee B$}
\RightLabel{$\neg_g$}
\UnaryInfC{$\neg(A \vee B), B \vdash$}
\RightLabel{$\neg_d$}
\UnaryInfC{$\neg(A \vee B) \vdash \neg B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\RightLabel{aff_d}
\UnaryInfC{$A \vdash A, B$}
\RightLabel{$\vee_d$}
\UnaryInfC{$A \vdash A \vee B$}
\RightLabel{$\neg_g$}
\UnaryInfC{$\neg(A \vee B), A \vdash$}
\RightLabel{$\neg_d$}
\UnaryInfC{$\neg(A \vee B) \vdash \neg A$}
\RightLabel{$\wedge_d$}
\BinaryInfC{$\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$}
\RightLabel{$\rightarrow_d$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \wedge \neg B$}
\end{prooftree}
$$

Quitte à remplacer l'usage successif de aff_d et de $\vee_d$ par $\vee_d^i$ dans le second arbre, on a formulé la preuve dans le système LJ. En conséquent, la loi de De Morgan est vraie non seulement en logique classique, mais aussi en logique intuitionniste. $\square$

Théorème 1. Une involution est une bijection.

Démonstration.
On va travailler dans le calcul des séquents muni de l'égalité. On doit donc ajouter deux règles d'élimination de l'égalité :

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t] \wedge (t = u), \Delta}{\Gamma \vdash A[x := u], \Delta} =_d$$

et son symétrique à gauche, ainsi qu'une règle d'insertion de l'égalité :

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t}\text{ax'}$$

où t et u sont des termes du langage.

On considère maintenant un symbole de fonction f d'arité 1. On définit une involution comme une fonction $f : E \to E$ telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$. Au premier ordre, on peut exprimer cette propriété :

$$N = \forall x\, ffx = x$$

ainsi que le fait d'être une injection ($I = \forall x \forall y (fx = fy \to x = y)$), une surjection ($S = \forall y \exists x (fx = y)$) et enfin une bijection ($B = I \wedge S$). On cherche donc une démonstration du théorème $N \to B$. Quitte à utiliser $\to_d$ et $\wedge_d$ en bas de l'arbre, on cherche un arbre de preuve pour $N \vdash S$ et $N \vdash I$.

La surjection est le sens le plus explicite. L'idée derrière l'arbre de preuve étant que, quitte à considérer $x = f(y)$, on obtient bien x tel que $f(x) = y$, d'où la surjection. Sous forme d'arbre de preuve, cela devient :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(ffx = x)[x := y] \vdash ffy = y}\text{ax}}{N \vdash ffy = y}\forall_g}{N \vdash (fx = y)[x := fy]}}{N \vdash \exists x (fx = y)}\exists_d}{N \vdash S}\forall_d$$

En ce qui concerne l'injection, la démonstration est un peu plus circonvolue. L'idée est ici de dire que, si $f(x) = f(y)$, alors $f(f(x)) = f(f(y))$ par définition d'une fonction. f étant une involution, on en déduit bien le résultat voulu. Sous forme d'arbre, on a ainsi :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{N \vdash N}\,\text{ax}}{ffx = x \vdash x = ffx}\,\forall_g}{N, fx = fy \vdash x = ffx}\,\text{aff}_g \qquad \dfrac{(*)}{N, fx = fy \vdash ffx = y}}{N, fx = fy \vdash (x = z)[z := ffx] \wedge ffx = y}\,\wedge_d}{N, fx = fy \vdash x = y}\,=_d}{N \vdash fx = fy \to x = y}\,\to_d}{N \vdash I}\,\forall_d, \forall_d$$

et en détaillant $(*)$, on a :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cdots}{N, fx = fy \vdash y = ffy} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{fx = fy \vdash ffy = ffy}\,\text{ax'} \quad \dfrac{}{fx = fy \vdash fx = fy}\,\text{ax}}{fx = fy \vdash (fz = ffy)[z := fy] \wedge fx = fy}\,\wedge_d}{fx = fy \vdash ffx = ffy}\,=_d}{N, fx = fy \vdash ffx = ffy}\,\text{aff}_g}{N, fx = fy \vdash (y = z)[z := ffy] \wedge ffx = ffy}\,\wedge_d}{N, fx = fy \vdash ffx = y}\,=_d$$

$\square$