Échantillonnage de Shannon

Léo Gayral

2017-2018

ref : Willem – Analyse harmonique réelle – p.126

Remarque 1. On considère la transformée de Fourier définie par $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi x\xi}dx$. Cet opérateur induit, par le théorème de Fourier-Plancherel, une isométrie bijective $\mathcal{F}$ sur $L^2(\mathbb{R})$.

Soient $K > 0$ et $I_K = [-K, K]$. On définit le sous-espace vectoriel $B_K = \{u \in L^2(\mathbb{R}), \operatorname{supp}(\mathcal{F}(u)) \subset I_K\}$.

Proposition 1. B_K est un espace de Hilbert, et on a une isométrie bijective naturelle entre B_K et $L^2(\mathbb{R}/2K\mathbb{Z}, dx)$.

Démonstration.
Ce sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R})$ est fermé. En effet, si $(u_n) \in {B_K}^{\mathbb{N}}$ converge vers $u \in L^2$, alors par isométrie, $\mathcal{F}(u_n) \xrightarrow{L^2} \mathcal{F}(u)$, et en restreignant les supports $0 \xrightarrow{L^2\left(I_K^c\right)} \mathcal{F}(u)|_{I_K^c}$ donc $\operatorname{supp}(\mathcal{F}(u)) \subset I_K$. $u \in B_K$, d'où B_K fermé, c'est donc un espace de Hilbert.

On considère alors $r : R/2K\mathbb{Z} \to [-K, K[$ un relèvement de la projection canonique. L'application $\Phi : \begin{array}{ccc} B_K & \to & L^2(\mathbb{R}/2K\mathbb{Z}) \\ u & \mapsto & \mathcal{F}(u) \circ r \end{array}$ est alors une isométrie bijective.

$\square$

On identifiera $R/2K\mathbb{Z}$ à l'intervalle $[-K, K[$ par la suite pour alléger les notations.

Proposition 2. La famille $\left(s_n : x \mapsto \sqrt{2K} \times \operatorname{sinc}(\pi(n + 2Kx))\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de B_K.

Démonstration.
La famille $\left(e_n : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2K}} e^{in\pi x/K}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}/2K\mathbb{Z})$. L'isométrie bijective Φ préserve le fait d'être une base hilbertienne, donc il suffit de vérifier que $s_n = \Phi^{-1}(e_n)$. Comme $\mathbb{R}/2K\mathbb{Z}$ est de masse $2K$, on a $\|.\|_1 \leq \sqrt{2K}\,\|.\|_2$ via l'inégalité de Jensen. Comme $e_n \in L^1$, sa transformée de Plancherel inverse correspond à l'intégrale :

$$\begin{array}{rcl} \Phi^{-1}(e_n)(x) & = & \int\limits_{-K}^{K} e_n(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi \\ & = & \frac{1}{\sqrt{2K}} \int\limits_{-K}^{K} e^{i\pi\xi\left(\frac{n}{K}+2x\right)} d\xi \\ & = & \frac{1}{\sqrt{2K}} \left[\frac{e^{i\pi\xi\left(\frac{n}{K}+2x\right)}}{i\pi\left(\frac{n}{K}+2x\right)} \right]_{-K}^{K} \\ & = & \sqrt{2K} \times \mathrm{sinc}\left(\pi(n+2Kx)\right) \end{array}$$

où $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ est une fonction analytique. □

Théorème 1. L'application $\begin{array}{ccc} B_K & \to & l^2(\mathbb{Z}) \\ u & \mapsto & \left(\frac{1}{\sqrt{2K}} u\left(\frac{n}{2K}\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$ définit une isométrie bijective.

Démonstration.
Comme $\mathcal{F}(u) \in L^1(\mathbb{R}/2K\mathbb{Z})$, à égalité presque-partout près :

$$u : x \mapsto \int\limits_{-K}^{K} e^{2i\pi x\xi} \mathcal{F}(u)(\xi) d\xi$$

donc, par théorème de continuité sous l'intégrale, $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$: l'évaluation de u en $\frac{n}{2K}$ est bien définie sans ambiguïté. Il suffit maintenant de vérifier que $\langle s_n, u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2K}} u\left(\frac{-n}{2K}\right)$:

$$\begin{array}{rcl} \langle s_n, u\rangle & = & \langle e_n, \Phi(u)\rangle \\ & = & \frac{1}{\sqrt{2K}} \int\limits_{-K}^{K} e^{-in\pi\xi/K} \mathcal{F}(u)(\xi) d\xi \\ & = & \frac{1}{\sqrt{2K}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\xi\times\frac{-n}{2K}} \mathcal{F}(u)(\xi) d\xi \\ & = & \frac{1}{\sqrt{2K}} u\left(\frac{-n}{2K}\right) \end{array}$$

□

Corollaire 1. La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} u\left(\frac{n}{2K}\right) \mathrm{sinc}\left(\pi(2Kx-n)\right)$ converge normalement vers u dans $(\mathcal{C}^0(\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.

Démonstration.
Au changement de signe de l'indexation près, cette série correspond à $(\langle s_n, u\rangle \times s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, qui converge vers u dans L^2 d'après ce qui précède.

En outre, pour $u \in B_K$, l'expression en fonction de $\mathcal{F}(u)$ nous donne :

$$\|u\|_\infty \leq \|\mathcal{F}(u)\|_1 \leq \sqrt{2K}\,\|\mathcal{F}(u)\|_2 = \sqrt{2K}\,\|u\|_2$$

dont, comme la famille converge normalement dans L^2, elle converge normalement dans L^∞, et la domination nous assure sans aucun doute que la limite est bien la bonne. $\square$

Remarque 2. Quitte à considérer $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \int\limits_{-K}^{K} e^{2i\pi z\xi}\mathcal{F}(u)(\xi)d\xi \end{array}$, par théorème de dérivation sous l'intégrale, on voit que u définit une fonction entière, et pas seulement continue.

Remarque 3. Ce résultat est fondamental en théorie du signal. En effet, une fonction u est représentée en machine par ses valeurs sur un intervalle fini de $\frac{1}{f}\mathbb{Z}$. Si on prends comme modèle de référence l'ouïe humaine, on remarque qu'on ne perçoit pas réellement le signal mais plutôt son spectre, la fonction $\hat{u}$.

Étant la plage de perception limitée qu'on peut ultimement percevoir – typiquement jusqu'à 20 ou 30 kHz pour l'ouïe – on va chercher à reproduire cette plage $[-K, K]$ le plus fidèlement possible, sans réellement se soucier de ce qui se produit au delà.

Pour ce faire, le théorème précédent nous donne une isométrie avec l'échantillonnage $\left(u\left(\frac{n}{2K}\right)\right)$, donc on veut une fréquence d'échantillonnage $f \geq 2K$. On appelle ce critère la condition de Nyquist-Shannon.

En pratique, lorsque ce critère n'est pas respecté mais que f reste dans le même ordre de magnitude que K, on assiste à un phénomène de repliement du spectre.