Applications

Léo Gayral

Questions de Cours.

- Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Si $g \circ f$ est injective (resp. surjective), que peut-on dire sur f (resp. g) ?
- Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux bijections. Que peut-on dire sur $g \circ f$?
- Soient $f : E \to F$ et $A, B \subset F$. Que peut-on dire sur $f^{-1}(A \cap B)$ et $f^{-1}(A \cup B)$?

Exercice 1.
Soit $f : X \to Y$. Montrer que f est injective si et seulement si :

$$\forall A, B \subset X, B \subset A \Rightarrow f(A \backslash B) = f(A) \backslash f(B)\,.$$

Correction 1.
Rappelons ici la définition d'injectivité : $\forall x, x' \in X, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

Pour montrer le sens direct, considérons donc $A = B \sqcup C \subset X$, et montrons que $f(C) = f(A) \backslash f(B)$. Si on considère $y \in f(A)$ et $x \in A$ un antécédent, comme $f(x) \notin f(B)$ alors nécessairement $x \notin B$ d'où $x \in C$, $y \in f(C)$. Réciproquement, si $x \in C$, on a $f(x) \in f(C) \subset f(A)$. Si $f(x) \in f(B)$, alors on a $x' \in B$ tel que $f(x) = f(x')$, mais par injectivité, $x = x' \in B \cap C = \emptyset$. On a donc $f(x) \notin f(B)$, d'où $f(x) \in f(A) \backslash f(B)$, d'où l'égalité ensembliste voulue.

Pour montrer le sens indirect, considérons $x, x' \in X$ tels que $f(x) = f(x')$. Supposons $x \neq x'$, et définissons alors $A = \{x, x'\}$ et $B = \{x\}$. On a $B \subset A$ donc $\{f(x')\} = f(\{x'\}) = f(A \backslash B) = f(A) \backslash f(B) = \{f(x)\} \setminus \{f(x')\} = \emptyset$. Un singleton ne pouvant en aucun cas être vide, on en déduit $x = x'$, donc f est bien injective.

Exercice 2.
Soient X, Y, Z des ensembles à au moins deux éléments chacun. Étant donnée $f : X \to Y$, on définit $F : Z^Y \to Z^X$ telle que $F(g) = g \circ f$. A quelle condition F est-elle injective, surjective ?

Correction 2.
L'application F est en quelque sorte l'application duale de f, et nous allons montrer que les propriétés d'injectivité et de surjectivité sont échangées.

On veut une condition pour avoir F injective. F doit pouvoir discriminer $g \neq g'$ quelconques. Pour $y' \in Y$ et $z, z' \in Z$ quelconques, on pose g constante égale à z, et g' qui coïncide avec g sauf en y où elle vaut z'. Si $y \notin f(X)$, alors pour tout $x \in X$, on a

$f(x) \neq y$ donc $g(f(x)) = g'(f(x)) = z$, donc $F(g) = F(g')$. Autrement dit, si f n'est pas surjective, alors F n'est pas injective.

Supposons a contrario f surjective. Dans ce cas, pour toutes fonctions $g \neq g' \in Z^Y$, on a en particulier $y \in Y$ tel que $g(y) \neq g'(y)$. Par surjectivité de f, on a x tel que $f(x) = y$, et donc $F(g)(x) \neq F(g')(x)$, d'où $F(g) \neq F(g')$. F est bien injective.

Le raisonnement est analogue pour f injective $\Leftrightarrow$ F surjective. En effet, si f est injective, on peut directement identifier X à un sous-ensemble de Y, et F à l'opérateur de restriction des applications à un sous-ensemble, surjectif. Si f n'est pas injective, alors on a $x \neq x' \in X$ tels que $f(x) = f(x')$. Dans ce cas, pour toute application $g \in Z^Y$ on a $F(g)(x) = F(g)(x')$, ce qui ne permet pas d'atteindre tout Z^X, donc F n'est pas surjective.

Exercice 3.
Déterminer une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$, puis entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^+$.

Correction 3.
En ce qui concerne le premier point, une bijection naturelle consiste à envoyer les nombres pairs sur les entiers positifs, et les impairs sur les négatifs. Plus précisément, considérons l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ 2k & \mapsto & k \\ 2k-1 & \mapsto & -k \end{cases}$$

où la convention d'écriture $2k-1$ vise à faire correspondre $1 \in \mathbb{N}$ à $k = 1$ de sorte que $\varphi(1) = -1$, qu'on n'envoie pas deux entiers sur $0 \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $k \in \mathbb{N}$ admet pour unique antécédent par φ l'entier $2k$, tandis que l'entier $-k < 0$ admet pour unique antécédent $2k-1$, d'où la bijection.

En ce qui concerne le second point, commençons par remarquer que $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ réalise une bijection monotone. Il nous suffit donc de trouver une bijection $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^+$ puis d'en déduire une bijection $g = f \circ \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Remarquons désormais que $\mathbb{R}^{+*} \backslash \mathbb{N}^* = \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}$. On peut donc prolonger la bijection $k \mapsto k-1$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par l'identité pour obtenir la bijection f désirée, et conclure la preuve.

Exercice 4.
Soit $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$ définie par $f(p,q) = p + \frac{1}{q}$. f est-elle injective, surjective ?

Correction 4.
Commençons par remarquer que, si $q \geq 2$, alors $\frac{1}{q} \in]0,1[$ est la partie décimale de $f(p,q)$. Sinon, si $q = 1$, alors $f(p,q) = p + 1 \in \mathbb{Z}$. En conséquence, si $f(u,v) = f(p,q) \in \mathbb{Z}$ alors $q = v = 1$ donc $p = u$. Si $f(u,v) = f(p,q) \notin \mathbb{Z}$, alors ils ont la même partie décimale, donc $\frac{1}{q} = \frac{1}{v}$, d'où $p = u$. Autrement dit, f est injective.

En revanche, on n'atteindra jamais la partie décimale $\frac{2}{3}$. En effet, si $p + \frac{1}{q} = \frac{2}{3}$, alors $3pq + 3 = 2q$. On a donc $2q$ qui est multiple de 3, donc $q = 3q'$ l'est. Il en découle $3pq' + 1 = 2q'$, donc $q'(2 - 3p) = 1$ dans $\mathbb{Z}$. Nécessairement, $q' = 1 \in \mathbb{N}$, et alors $p = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$, ce qui est une contradiction. En conséquence, f n'est pas surjective.

Exercice 5.
Soit $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f injective ssi f surjective.

Correction 5.
Supposons que f est injective. Dans ce cas, $f(E) = f(f \circ f(E))$. Par injectivité de f, on en déduit que $E = f \circ f(E) \subset f(E)$, d'où $f(E) = E$, surjectivité. Alternativement, toujours si f est injective, alors pour tout $x \in E$ on a $f(f \circ f(x)) = f(x)$ donc $f \circ f(x) = x$. f est une involution, donc une bijection.

Réciproquement, si f est surjective, alors pour tout $y \in E$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On a alors $f \circ f(y) = f \circ f \circ f(x) = f(x) = y$, donc f est à nouveau une involution, une bijection.

Exercice 6.
Soit $f : E \to F$ une application. On considère $S = \{X \subset E, X = f^{\leftarrow}(f(X))\}$. Pour $A \subset E$, montrer que $f^{\leftarrow}(f(A)) \in S$. Si $B \subset f(E)$, montrer que $f\left(f^{\leftarrow}(B)\right) = B$. Soient $\varphi : S \to \mathcal{P}(f(E))$ et $\psi : \mathcal{P}(f(E)) \to S$, définies via $\varphi(A) = f(A)$ et $\psi(B) = f^{\leftarrow}(B)$. En déduire que φ et ψ sont inverses l'une de l'autre.

Correction 6.
Considérons $X = f^{\leftarrow}(f(A))$. De façon générale, si $X \subset E$, on a l'inclusion $X \subset f^{\leftarrow}(f(X))$ car si $x \in X$ alors c'est un antécédent de $f(x) \in f(X)$. Pour montrer l'autre inclusion, considérons $z \in f^{\leftarrow}(f(X))$. On a par définition $f(z) \in f(X)$ donc $x \in X$ tel que $f(z) = f(x)$. En outre, $x \in f^{\leftarrow}(f(A))$ donc par définition, $f(x) \in f(A)$ d'où $z \in f^{\leftarrow}(f(A)) = X$.

Considérons $B = f\left(f^{\leftarrow}(B)\right)$. De façon générale, si $B \subset F$, on a l'inclusion $f\left(f^{\leftarrow}(B)\right) \subset B$, car si $y \in f\left(f^{\leftarrow}(Y)\right)$ alors on a $x \in f^{\leftarrow}(B)$ tel que $f(x) = y$ d'où $y \in Y$ par définition. Pour montrer l'autre inclusion, considérons $y \in B \subset f(E)$, de sorte qu'il existe un antécédent $x \in E$ à y, pour lequel $f(x) = y$. On a donc $x \in f^{\leftarrow}(B)$ d'où $y \in f\left(f^{\leftarrow}(B)\right)$.

Commençons par justifier que ces applications sont bien définies. Si $X \in S$, alors $f(X) \subset f(E)$ donc φ est bien définie. Si $Y \in \mathcal{P}(f(E))$, alors d'après ce qui précède, $Y = f\left(f^{\leftarrow}(Y)\right)$ d'où $f^{\leftarrow}(Y) = f^{\leftarrow}\left(f\left[f^{\leftarrow}(Y)\right]\right) \in S$, ψ est bien définie. En outre, on a prouvé que $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_S$ et $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(f(E))}$, ces applications sont bien inverses l'une de l'autre.

Exercice 7.
Soit E un ensemble. Soit $A \subset E$, on définit la fonction indicatrice $\chi_A \in \{0,1\}^E$ par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon. Pour $f \in \{0,1\}^E$, montrer qu'il existe $A \subset E$ tel que $f = \chi_A$. En déduire une bijection entre $\mathcal{P}(E)$ et $\{0,1\}^E$. Soient $f, g \in \{0,1\}^E$. Montrer que $f \times g$, $1 - f$, $f + g - fg$ et $(f - g)^2$ sont aussi dans $E \to \{0,1\}$. Via la bijection précédente, quel sens ensembliste peut-on donner à chacune des opérations précédentes ?

Correction 7.
Soit $A = f^{\leftarrow}(\{1\})$. On constate que $x \in A$ si et seulement si $f(x) = 1$, donc $f = \chi_A$. On en déduit que l'application injective $A \mapsto \chi_A$ est en fait surjective, donc bijective.

Pour montrer que les combinaisons de f et g considérées se comportent bien, il suffit de vérifier que c'est le cas en tout point. Autrement dit, il suffit de vérifier qu'on obtient toujours 0 ou 1 en remplaçant f et g par 0 ou 1.

Ainsi, $0 \times 0 = 0 \times 1 = 1 \times 0 = 0$ et $1 \times 1 = 1$, donc $f \times g : E \to \{0, 1\}$ également. Cette application correspond à l'intersection d'ensembles, puisque $[f \times g](x) = 1 - x$ appartient à l'ensemble décrit – si et seulement si $f(x) = 1$ et $g(x) = 1 - x$ appartient aux ensembles associées à f *et* g.

$1 - f$ inverse 0 et 1, donc $1 - f : E \to \{0, 1\}$. De façon ensembliste, cette opération est le passage au complémentaire dans E.

$0+0-0\times0 = 0$ et $1+0-1\times0 = 0+1-0\times1 = 1+1-1\times1 = 1$, donc $f+g-fg : E \to \{0, 1\}$ est bien définie. Cette opération correspond à l'union d'ensembles.

Enfin, $(0-0)^2 = (1-1)^2 = 0$ et $(1-0)^2 = (0-1)^2 = 1$, donc $(f-g)^2 : E \to \{0, 1\}$ est bien définie. Cette opération correspond à la différence symétrique.

Exercice 8.
Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une injection. Montrer que $S = \{n \in \mathbb{N}, \sigma(n) \geq n\}$ est infini.

Correction 8.
Comme $\sigma(0) \in \mathbb{N}$, on a $\sigma(0) \geq 0$ donc $0 \in S$. Supposons que S est fini. Dans ce cas $\{\sigma(n), n \in S\}$ est fini, non vide, donc admet un maximum m.

Considérons la restriction de σ à l'intervalle d'entiers $M = [\![0, m]\!]$. Montrons que $\sigma(M) \subset M$. D'une part, si $k \in M \cap S$, alors naturellement $\sigma(k) \leq m$ par maximalité de m. D'autre part, si $k \in M \backslash S$, alors $\sigma(k) < k$. Dans tous les cas, $\sigma(k) \in M$. M s'injecte dans M par φ, on a donc une bijection par égalité des cardinaux.

Dans ce cas, considérons $k = m + 1$. Si on avait $k \in S$, on aurait $\sigma(k) \geq k > m$, ce qui contredit la définition de m. On a donc $k \notin S$, et donc $\sigma(k) < k$, autrement dit $\sigma(k) \in M$, ce qui brise l'injectivité de σ. En conséquence, S doit être infini.

Exercice 9.
Soient $f : A \to B \subset A$ injective, $C_0 = A \backslash B$ et $C_{n+1} = f(C_n)$. Montrer que, pour $i \neq j$, on a $C_i \cap C_j = \emptyset$, puis en déduire une bijection $h : A \to B$.

Soient maintenant $f : A \to B$ et $g : B \to A$ injectives. Montrer qu'il existe une bijection de $A \to B$. En utilisant ce résultat, montrer que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$ sont en bijection.

Correction 9.
Par symétrie de l'intersection, on peut sans perte de généralité supposer $i < j$. Montrons alors ce premier point par récurrence sur l'indice $i \in \mathbb{N}$. Initialement, $C_0 \cap B = \emptyset$ par définition, et pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a $C_{j+1} = f(C_j) \subset B$ d'où $C_0 \cap C_{j+1} = \emptyset$. Supposons le résultat vrai pour $i \in \mathbb{N}$, de sorte que pour tout $j > i$ on a $C_i \cap C_j = \emptyset$. Alors, pour tout $j + 1 > i + 1$, on a par injectivité de f l'égalité $C_{i+1} \cap C_{j+1} = f(C_i) \cap f(C_j) = f(C_i \cap C_j) = f(\emptyset) = \emptyset$, d'où le résultat.

Pour obtenir une bijection h, considérons l'ensemble $C = \bigsqcup\limits_{i \in \mathbb{N}} C_i = C_0 \sqcup C'$. f injecte C_i dans C_{i+1}, atteint tous les élements par définition de l'ensemble image, donc f réalise une bijection entre C_i et C_{i+1}. On en déduit que f se restreint en la bijection $\tilde{f} : C \to C'$. En outre, $A \backslash C = (A \backslash C_0) \backslash C' = B \backslash C'$, donc en prolongeant $\tilde{f}$ par l'identité sur cet ensemble, on obtient enfin la bijection $h : A \to B$ désirée.

Soit $B' = g(B) \subset A$. Par définition, $g : B \to \tilde{B}$ réalise une bijection. On a alors l'injection $g \circ f : A \to \tilde{B} \subset A$, qui induit une bijection $\tilde{h} : A \to \tilde{B}$ d'après ce qui précède. On en déduit donc la bijection $h = g^{-1} \circ \tilde{h} : A \to B$ par composition.

En particulier, $i \mapsto (i, 0)$ donne une injection naturelle de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$. D'autre part, par unicité de la décomposition en facteurs premiers, $(i, j) \mapsto 2^i 3^j$ est une injection de $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. On déduit de ces résultats l'existence d'une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$.