Calculs Algébriques

Léo Gayral

Questions de Cours.

- $\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
- $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$,
- $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.

Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}^*$. Factoriser $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{a_i}{a_j}$. Supposons de plus les a_i de même module. A quelle condition la somme précédente est nulle ?

Correction 1.

Les a_i étant tous non nuls, chaque terme est bien défini, donc la double somme finie également. On a alors $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{a_i}{a_j} = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(a_i \times \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} \right) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \right) \times \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} \right)$.

Si les a_i sont tous de même module r, posons $b_i = \frac{a_i}{r}$. En particulier, comme b_i est de module 1, on a $\frac{1}{b_i} = \overline{b_i}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i}{a_j} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{b_i}{b_j} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i} \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{b_i} \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right) \times \overline{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right)} \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} b_i \right|^2
\end{aligned}$$

donc la somme initiale est nulle si et seulement si $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i = 0$, et quitte à multiplier par $r > 0$, on se ramène à $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 0$.

Exercice 2.
Calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

Correction 2.
L'énoncé de l'exercice invite naturellement à une démonstration par récurrence. Le résultat est vrai au rang $n = 0$, car $\frac{0}{1!} = 0 = 1 - \frac{1}{1!}$. Supposons le rang vrai au rang $n-1$. On a alors $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}\left((n+1) - n\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$, d'où le résultat par récurrence.

Exercice 3.
Soient $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)$ deux suites finies strictement croissantes, positives. Montrer qu'il existe une unique permutation $\sigma \in S_n$ qui maximise $\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)}$.

Correction 3.
Avant même de se lancer dans un raisonnement, le nombre de permutations étant fini, on sait qu'il en existe au moins une qui maximise la somme.

Pour se faire une idée simple du comportement désiré, le mieux est ici de considérer un exemple assez minimal. Considérons par exemple $a_i = b_i = i$ pour $i \leq n = 2$. Dans ce cas, $a_1b_2 + a_2b_1 = 2 + 2 = 4$ mais $a_1b_1 + a_2b_2 = 1 + 4 = 5$. On pourrait donc conjecturer que l'identité est la permutation recherchée.

Pour cela, considérons $\sigma \neq \mathrm{Id}$ et montrons que $\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)}$ n'est *pas* maximale. Comme σ n'est pas l'identité, elle désordonne la liste triée (b_i), et on aurait donc $i < j$ tels que $b_{\sigma(i)} > b_{\sigma(j)}$. Dans ce cadre, montrons qu'il suffit d'intervertir $\sigma(i)$ et $\sigma(j)$ pour augmenter strictement la valeur de la somme, qui sera donc nécessairement non maximale.

Pour ce faire, il convient de généraliser le cas particulier initial. Considérons donc $0 < a < b$ et $0 < x < y$ quelconques. On peut réécrire l'inégalité recherchée $ax + by > bx + ay$ en $(b-a)(y-x) > 0$, ce qui est une évidence.

Une permutation maximale existe, et ne peut-être *que* $\sigma = \mathrm{Id}$ puisqu'on a éliminé tous les autres cas de figure, d'où l'unicité.

Exercice 4.
Simplifier $(k+1)^4 - k^4$ sous la forme d'un polynôme de degré 3. En déduire formule simple pour $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

Correction 4.
Avant tout, $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$. On en déduit que $(n+1)^4 - 1 = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^4 - k^4 = 4S_n + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n$. En poussant plus loin les calculs, on en

déduit que :

$$\begin{array}{rcl} 4S_n & = & (n+1)^4 - 1 - n - 4\frac{n(n+1)}{2} - 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ & = & (n+1)^4 - (n+1) \times (1 + 2n + n(2n+1)) \\ & = & (n+1)^2\,((n+1)^2 - 2n - 1) \\ & = & (n(n+1))^2 \end{array}$$

d'où $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)^2$.

Exercice 5.

Montrer que $S_n \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n} \to \infty$.

Correction 5.

Pour cela, il suffit de remarquer que, comme la suite $\frac{1}{\sqrt{k}}$ est décroissante, on peut minorer chaque terme par le dernier. Il en découle directement $S_n \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$.

Exercice 6.

Soit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$. Montrer que la suite est croissante. Minorer $S_{2n} - S_n$. En déduire la limite de S_n par télescopage.

Correction 6.

$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{n+1} > S_n$, d'où la croissance de la suite. $S_{2n} - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. Par télescopage, on en déduit directement $S_{2^n} \geq \frac{n}{2}$. Par croissance, on a donc plus largement $S_n \geq \frac{\lfloor \log_2(n) \rfloor}{2} \to \infty$.

Exercice 7.

En remarquant que $k = \sum\limits_{i=1}^{k} 1$, calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$.

Correction 7.

Ainsi formulée, cette question sous-entends clairement qu'on cherche à faire apparaître une somme double. Plus clairement :

$$\begin{array}{rclcl} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{l=1}^{k} \frac{1}{2^k} & = & \sum\limits_{l=1}^{n} \sum\limits_{k=l}^{n} \frac{1}{2^k} \\ & = & \sum\limits_{l=1}^{n} \frac{1}{2^l} \times \frac{1-\frac{1}{2^{n-l+1}}}{1-\frac{1}{2}} & = & \sum\limits_{l=1}^{n} \frac{1}{2^{l-1}} \times \left(1 - \frac{1}{2^{n-(l-1)}}\right) \\ & = & \sum\limits_{l=1}^{n} \frac{1}{2^{l-1}} - \frac{1}{2^n} & = & \left(\sum\limits_{l=0}^{n-1} \frac{1}{2^l}\right) - \frac{n}{2^n} \\ & = & 2 \times \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{n}{2^n} & = & 2 - \frac{n+2}{2^n} \end{array}$$

et on en déduit en particulier que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2$.

Exercice 8. *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$. On pourra penser à normaliser les vecteurs, de sorte $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 1$.

Correction 8.

Si a ou b est nul, alors les deux termes de l'inégalité sont nuls, on a le résultat voulu.

Supposons le résultat montré pour tout couple normalisé, et considérons deux vecteurs a, b non nuls quelconques. Posons $N(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ la norme du vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, non nulle dès que $x \neq 0$. Définissons les vecteurs u et v par $u_i = \frac{a_i}{N(a)}$ et $v_i = \frac{b_i}{N(b)}$. Les vecteurs u et v sont tels que $N(u) = N(v) = 1$. Par hypothèse, on a donc :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} N(a)u_i \times N(b)v_i\right)^2 \\ &= N(a)^2 N(b)^2 \times \left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 \\ &\leq N(a)^2 N(b)^2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire le résultat voulu.

Supposons donc $N(a) = N(b) = 1$. Dans ce cas, le cœur de l'astuce réside dans le fait que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$, ce qui découle essentiellement de $(x-y)^2 \geq 0$. Dans ce cas, $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2+b_i^2}{2} = \frac{N(a)^2+N(b)^2}{2} = 1$, d'où le lemme désiré.