Nombres Complexes

Léo Gayral

Questions de Cours.

— Formule de Moivre : $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$,
— Expression de $\cos(n\theta)$ dans $\mathbb{R}[\cos(\theta), \sin(\theta)]$,
— Formule de l'angle moitié,
— $\sum\limits_{\omega\in\mathbb{U}_n} \omega = 0$ lorsque $n \geq 2$.

Exercice 1.
Résoudre l'équation $e^z = 1 + i\sqrt{3}$ pour $z \in \mathbb{C}$.

Correction 1.
En premier lieu, considérons $z = x + i\theta \in \mathbb{C}$ quelconque. Par analyse-synthèse, supposons $e^z = 1 + i\sqrt{3}$. Alors $e^x = |e^z| = \left|1 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$, d'où $x = \ln(2)$.

On peut alors se ramener à l'équation $e^{i\theta} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, ou autrement dit :

$$\left\{\begin{array}{l} \cos(\theta) = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. .$$

Les solutions de la première ligne de ce système sont atteintes lorsque $\theta \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi]$, et la deuxième ligne impose alors $\theta \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Réciproquement, tout complexe sous la forme $z = \ln(2) + i\frac{\pi}{3} + 2ik\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$ est solution du système considéré.

Exercice 2.
Résoudre l'équation $az^4 + bz^2 + c = 0$.

Correction 2.
On peut considérer une solution z et $x = z^2$. Dans ce cas, on a alors $ax^2 + bx + c = 0$, donc $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Il en découle nécessairement $z = \pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$. On a ainsi exprimé les (au plus) 4 solutions dans un cadre général.

Notons qu'ici, $\sqrt{x}$ est entendu au sens complexe, comme le choix d'une des deux solutions de $z^2 = x$ pour $x \neq 0$, l'autre étant alors de facto $-\sqrt{x}$. Il n'existe aucune *bonne* convention de signe.

Exercice 3.
Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$. On pourra d'abord exprimer $\cos(5x)$ comme un polynôme en $\cos(x)$.

Correction 3.
D'après la formule de Moivre :

$$\begin{array}{rcl}\cos(5x) & = & \mathrm{Re}\left((\cos + i\sin)^5\right) \\ & = & \cos^5 - \binom{5}{2}\cos^3\sin^2 + \binom{5}{4}\cos\sin^4 \\ & = & \cos^5 - 10\cos^3\times(1-\cos^2) + 5\cos\times(1-\cos^2)^2 \\ & = & \cos^5 - 10\cos^3 + 10\cos^5 + 5\cos + 5\cos^5 - 10\cos^3 \\ & = & \cos\times[16\cos^4 - 20\cos^2 + 5]\end{array}$$

On peut exploiter le fait que $\cos\left(5\times\frac{\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, dont on déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \neq 0$ est solution du polynôme $16X^4 - 20X^2 + 5 = 0$. Autrement dit, $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 = \frac{20\pm\sqrt{20^2-4\times5\times16}}{32} = \frac{5\pm\sqrt{5}}{8}$.

En outre, $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 \geq \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{3}{4} = \frac{6}{8} > \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \geq 0$. Finalement, on obtient $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

Exercice 4.
Soient $a, b \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $\left|\frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2}\right| = \frac{|a-b|}{|ab|}$.

Correction 4.
Notons que $a\times\overline{a} = |a|^2$, donc on a tout simplement $\frac{a}{|a|^2} = \frac{1}{\overline{a}}$. Autrement dit, $\left|\frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2}\right| = \left|\frac{1}{\overline{a}} - \frac{1}{\overline{b}}\right| = \left|\frac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{a}\times\overline{b}}\right| = \frac{\left|\overline{b-a}\right|}{\left|\overline{a\times b}\right|} = \frac{|a-b|}{|ab|}$.

Exercice 5.
Résoudre $z + \overline{z} = z^4$.

Correction 5.
0 est une solution évidente au système, on considère désormais $z \in \mathbb{C}^*$. Remarquons que $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$. En conséquence, toute solution z vérifie $z^4 \in \mathbb{R}$, d'où $z = r\omega$ avec $r > 0$ et $\omega \in \mathbb{U}_8$.

Si $z \in \mathbb{R}$ ($\omega \in \mathbb{U}_2$), on se ramène au système $2z = z^4$, donc $z^3 = 2$, d'où nécessairement $z = \sqrt[3]{2}$. Sinon, si $z \in i\mathbb{R}$ ($\omega \in \mathbb{U}_4\backslash\mathbb{U}_2$), alors $z^4 = \mathrm{Re}(z) = 0$ n'a pas de solutions non nulles.

Enfin, considérons $z = \pm r\times e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$ ($\omega \in \mathbb{U}_8\backslash\mathbb{U}_4$). Dans ce cas, on a $\mathrm{Re}(z) = \pm r\times\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{r}{\sqrt{2}}$ d'une part, et $z^4 = r^4e^{\pm i\pi} = -r^4$, donc r doit être solution de $\pm\sqrt{2}r = -r^4$, ce qui donne $r^3 = \mp\sqrt{2}$, qui n'a de solutions réelles positives que si le signe est $+$, donc si $z = -re^{\pm i\frac{\pi}{4}}$, auquel cas on a finalement $r = \sqrt[6]{2}$.

Réciproquement, on vérifie aisément que $\left\{0, \sqrt[3]{2}, -\frac{1\pm i}{\sqrt[3]{2}} = -\sqrt[6]{2}e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\right\}$ sont des solutions. Remarquons que, même si l'équation étudiée n'est pas un polynôme en z, elle admet tout de même 4 solutions.

Exercice 6.
Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}^*$. Factoriser $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{a_i}{a_j}$. Supposons de plus les a_i de même module. A quelle condition la somme précédente est nulle ?

Correction 6.
Les a_i étant tous non nuls, chaque terme est bien défini, donc la double somme finie également. On a alors $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{a_i}{a_j} = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(a_i \times \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} \right) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \right) \times \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} \right)$.

Si les a_i sont tous de même module r, posons $b_i = \frac{a_i}{r}$. En particulier, comme b_i est de module 1, on a $\frac{1}{b_i} = \overline{b_i}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i}{a_j} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{b_i}{b_j} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i} \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{b_i} \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right) \times \overline{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right)} \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} b_i \right|^2
\end{aligned}$$

donc la somme initiale est nulle si et seulement si $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i = 0$, et quitte à multiplier par $r > 0$, on se ramène à $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 0$.

Exercice 7.
Soient $z, z' \in \mathbb{U}$ unimodulaires, tels que $zz' + 1 \neq 0$. Montrer que $\frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$. Donner une interprétation géométrique du résultat.

Correction 7.
On a $\frac{z+z'}{1+zz'} = \frac{z}{1+zz'} + \frac{z'}{1+zz'} = \frac{1}{\overline{z} \times (1+zz')} + \frac{1}{\overline{z'} \times (1+zz')} = \frac{1}{\overline{z'}+z} + \frac{1}{\overline{z}+z'} = 2 \times \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\overline{z}+z'}\right) \in \mathbb{R}$.

Géométriquement, deux complexes sont multiplicativement liés par un réel s'ils correspondent à deux vecteurs le long de la même droite, qui forment le même « angle ». Ici, l'angle formé par zz' est la somme de ceux formés par z et z', tandis que l'angle formé par $z + z'$ est leur moyenne (ce qui est donc également vrai pour $1 + zz'$). Ceci justifie pourquoi les vecteurs $z + z'$ et $1 + zz'$ sont le long de la même droite.

Exercice 8.
Soient $x, y, z \in \mathbb{U}$, tels que $x + y + z = 0$. Calculer $xy + yz + zx$ et $x^2 + y^2 + z^2$.

Correction 8.
Comme $x+y+z = 0$, on a $(x+y+z)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx) = 0$. Il suffira donc de calculer une des deux valeurs pour en déduire l'autre.

D'autre part, comme $|x| = |y| = |z| = 1$ on a $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \overline{x+y+z} = 0$. Quitte à multiplier par xyz, on obtient donc $xy + yz + zx = 0$.

Exercice 9.
Soient $x, y, z \in \mathbb{C}^*$ tels que $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Montrer que $|x| = |y| = |z|$.

Correction 9.
Pour cela, considérons le polynôme $P = (X-x)(X-y)(X-z)$, dont les racines sont x, y et z. En développant le polynôme, on obtient $P = X^3 - (x+y+z)X^2 + (xy+yz+zx)X - xyz$. En outre, $xy + yz + xz = xyz\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 0$, donc $P = X^3 - xyz$. On en déduit donc que x, y et z sont des racines cubiques de xyz, a fortiori de même module.

Exercice 10.
Résoudre $z^p = (1+z)^q = 1$ pour $p, q \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{C}$.

Correction 10.
En premier lieu, on a $|z| = 1$, donc $z = e^{i\theta}$. En outre, $|1+z|^2 = (1+\cos(\theta))^2 + \sin(\theta)^2 = 1$, donc $1 + 2\cos(\theta) = 0$. Il en découle $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$, donc $z = \pm j \in \mathbb{U}_3$ est une racine primitive. Pour avoir $z^p = 1$, il faut donc nécessairement $p \in 3\mathbb{Z}$. De même, comme $z + 1 = -z^2 \in \mathbb{U}_6$ est une racine primitive, il faut avoir $q \in 6\mathbb{Z}$.

Réciproquement, si $(z, p, q) \in \{\pm j\} \times 3\mathbb{Z} \times 6\mathbb{Z}$, alors on a une solution au système initial.

Exercice 11.
Soient $a, b \in \mathbb{N}$ deux sommes de deux carrés ($\exists u, v \in \mathbb{N},\ a = u^2 + v^2$). Montrer que ab est également la somme de deux carrés. On pourra utiliser le fait que $u^2 + v^2 = |u + iv|^2$.

Correction 11.
Soient donc $A = u + iv \in \mathbb{Z}[i]$ et $B = x + iy \in \mathbb{Z}[i]$ tels que $|A|^2 = a$ et $|B|^2 = b$. On a alors $|AB|^2 = ab$ d'une part, et $AB = ux - vy + i(uy + vx) \in \mathbb{Z}[i]$, donc ab est bien somme de deux carrés.

Exercice 12.
Soient $A, B, C \in \mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$ trois points distincts à coordonnées entières. Le triangle (A, B, C) peut-il être équilatéral ?

Correction 12.
Dire que (A, B, C) est équilatéral équivaut à dire que l'angle $\widehat{BAC}$ est égal à $\frac{\pi}{3}$, et que $|B - A| = |C - A|$. Quitte à translater les trois points, on peut se ramener au cas $A = 0$. Dans le formalisme des nombres complexes, (A, B, C) équilatéral se traduit alors par $\frac{C}{B} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$.

En particulier, on a $\mathrm{Re}(C) = \mathrm{Re}\left(B \times e^{\pm i\frac{\pi}{3}}\right) = \mathrm{Re}(B) \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \mp \mathrm{Im}(B) \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\mathrm{Re}(B) \mp \sqrt{3}\mathrm{Im}(B)}{2} \in \mathbb{Z}$. Par irrationalité de $\sqrt{3}$, cela implique nécessairement $\mathrm{Im}(B) = 0$, $B \in \mathbb{Z}$. De même, $\mathrm{Im}(C) = B \times \sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = \pm\frac{\sqrt{3}B}{2} \in \mathbb{Z}$ donc $B = 0$. Ceci contredit le fait que $A \neq B$, donc (A, B, C) n'est en aucun cas équilatéral.

Exercice 13.
Soit $\omega = e^{i\theta} \in \mathbb{U}$. A quelle condition sur θ a-t-on une racine de l'unité ?

Soit $\omega = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \in \mathbb{U}_n$ une racine de l'unité. A quelle condition sur k a-t-on ω une racine primitive, au sens où $\mathbb{U}_n = \{\omega^j, j \in \mathbb{Z}\}$?

Correction 13.
ω est une racine de l'unité si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\omega^n = 1$, tel que $n\theta \equiv 0[2\pi]$. Autrement dit, $n\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, $\theta = \frac{2k\pi}{n}$.

Si $\omega^r = 1$, alors $\{\omega^j, j \in \mathbb{Z}\}$ contient au plus r éléments. Pour que ω soit une racine primitive, il faut donc avoir $\omega^r \neq 1$ pour $r \in [\![1, n-1]\!]$. Cela signifie que $\frac{2kr\pi}{n} \notin 2\pi\mathbb{Z}$, donc $kr \notin n\mathbb{Z}$. Autrement dit, il faut avoir $\mathrm{pgcd}(k, n) = 1$.