Ensembles

Léo Gayral

Questions de Cours.

- Liste des éléments de $\mathcal{P}\left[\mathcal{P}\left(\{1,2\}\right)\right]$,
- $(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G$,
- $(A \backslash C) \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$.

Exercice 1.
Donner la liste des éléments des ensembles définis par $A = \{n \in \mathbb{N}, \sqrt{2} \leq x \leq 2\pi\}$ et $B = \left\{x \in \mathbb{R}, \exists p, q \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq 2q \leq 7 \text{ et } x = \frac{p}{q}\right\}$.

Correction 1.
Notons que $1 < 2 < 4$ donc, en passant à la racine, $1 < \sqrt{2} < 2$. D'autre part, on a $\pi \cong 3.14 \in]3, 3.5[$ donc $6 < 2\pi < 7$. On en déduit $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

En ce qui concerne B on a $1 \leq 2q \leq 7 \Leftrightarrow 1 \leq q \leq 3$. A fortiori, $p \leq 2q \leq 6$ en réalité. On peut donc construire la table suivante, avec les valeurs de p pour les colonnes et celles de q pour les lignes :

	1	2	3	4	5	6
1	$1/1 = 1$	$2/1 = 2$	$p > 2q$	$p > 2q$	$p > 2q$	$p > 2q$
2	$1/2$	$2/2 = 1$	$3/2$	$4/2 = 2$	$p > 2q$	$p > 2q$
3	$1/3$	$2/3$	$3/3 = 1$	$4/3$	$5/3$	$6/3 = 2$

Ainsi, on a $B = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, 2\right\}$.

Exercice 2.
Soient I, E des ensembles. Pour tout $i \in I$, on considère $A_i, B_i \subset E$ tels que $A_i \cup B_i = E$. Montrer que $E = \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right)$.

Correction 2.
Comme $A_i \subset E$ et $B_i \subset E$ pour tout $i \in I$, l'ensemble de droite est naturellement inclus dans E.

Considérons $x \in E \backslash \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$. Par définition, $x \notin \bigcap_{i \in I} A_i$ donc il existe a fortiori $i \in I$ tel que $x \notin A_i$. On en déduit $x \in E \backslash A_i \subset B_i \subset \bigcup_{i \in I} B_i$, d'où l'inclusion voulue.

Exercice 3.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le cardinal de $A = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2, 1 \leq i \leq j \leq n\}$. Qu'en est-il lorsque $i < j$?

Correction 3.
On a simplement $|A| = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} 1 = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$. D'autre part, si on retire la « diagonale » de l'ensemble, on retire simplement n couples, ce qui en laisse $\frac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 4.
Montrer que $B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ n'est pas un produit cartésien.

Correction 4.
Supposons que $B = E \times F$ est un produit cartésien. Par définition, la projection $\pi_1(x,y) = x$ est une surjection de B dans E. Or $(1,0) \in B$, donc $1 \in E$. De même, $(0,1) \in B$ donc $1 \in F$. On en déduit $(1,1) \in E \times F = B$, ce qui est absurde car $1^2 + 1^2 = 2 > 1$. En conséquence, B n'est pas un produit cartésien.

Exercice 5.
Soient A, B, C des ensembles. Si $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$, alors $B = C$.

Correction 5.
Le rôle joué par B et C dans les hypothèses étant symétrique, montrons que $B \subset C$ pour conclure. Soit donc $x \in B$. Si $x \in A \cap B = A \cap C$ alors a fortiori $x \in C$. Sinon, $x \in B \backslash A = (A \cup B) \backslash A = (A \cup C) \backslash A = C \backslash A \subset C$. On a donc $B \subset C$, le résultat voulu.

Exercice 6.
Soit E un ensemble à n éléments. Calculer le cardinal de $\mathcal{P}(E)$. Soit $X \subset E$. Calculer le nombre de parties $Y \subset E$ disjointes de X. En déduire le nombre de couples de parties $(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ disjointes.

Correction 6.
Montrons que $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$. Si $n = 0$, si $E = \emptyset$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$ a exactement $1 = 2^0$ élément. Par récurrence, si $n > 0$, on peut partitionner $E = \{x\} \sqcup F$. On peut faire correspondre à toute partie de F exactement deux parties de E, une avec et une sans x. On en déduit $|\mathcal{P}(E)| = 2\,|\mathcal{P}(F)| = 2 \times 2^{|F|} = 2^n$.

De façon analogue, les parties de E qui ne rencontrent pas X sont exactement les parties de $E \backslash X$. Or, comme $X \subset E$, on a $|E \backslash X| = |E| - |X|$. On a donc $2^{n-|X|}$ telles parties de E.

Le nombre de couples de parties disjointes est alors :

$$\sum_{X \subset E} 2^{n-|X|} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{X \subset E, |X|=j} 2^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 2^{n-j} = (1+2)^n = 3^n\,.$$

Exercice 7.
Soient $x \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Exprimer en compréhension le carré vide C de côté r, aligné selon les axes usuels, dont le coin inférieur gauche est x. Exprimer le disque $D_{x,r}$ de centre x et de rayon r. Quels sont les éléments de $\bigcap_{i=1}^{\infty} D_{x,\frac{1}{n}}$?

Correction 7.
En termes de nombres complexes, les coordonnées du point $z \in \mathbb{C}$ sont $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$. Ainsi, $C = [x, x+r] \cup [x, x+ir] \cup [x+r, x+(1+i)r] \cup [x+ir, x+(1+i)r]$ est une union de quatre segments. D'autre part, $D_{x,r} = \{z \in \mathbb{C}, |z-x| \leq r\}$.

Assez naturellement, comme $x \in D_{x,r}$ pour tout rayon $r > 0$, on a $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} D_{x,\frac{1}{n}}$. En outre, si $z \neq x$, on a en particulier $z \notin D_{x,\frac{1}{n}}$ pour $n > \frac{1}{|z-x|}$, d'où $\{x\} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} D_{x,\frac{1}{n}}$.

Exercice 8.
Soit E un ensemble. Pour $F, G \subset E$, on définit $F \Delta G = F \backslash G \cup G \backslash F$ leur différence symétrique. Illustrer par un dessin $F \Delta G$ par rapport à F et G. Montrer que :

1. $\forall a, b \in \mathcal{P}(E), a \Delta b = b \Delta a$,
2. $\exists e \in \mathcal{P}(E), \forall a \in \mathcal{P}(E), e \Delta a = a$,
3. $\forall a \in \mathcal{P}(E), \exists b \in \mathcal{P}(E), a \Delta b = e$,
4. $\forall a, b, c \in \mathcal{P}(E), a \Delta (b \Delta c) = (a \Delta b) \Delta c$,

Correction 8.
Le premier point est clair car $X \cup Y = Y \cup X$ en toute généralité, et en particulier pour $X = a \backslash b$ et $Y = b \backslash a$. Pour le second point, l'élément neutre e recherché est simplement le vide $\emptyset$ car $a \backslash \emptyset \cup \emptyset \backslash a = a \cup \emptyset = a$. Pour le troisième point, il suffit de remarquer $a \Delta a = \emptyset$.

Pour le dernier point, il n'y a pas de méthode magique, nous allons simplement développer les formules pour les mettre sous la forme d'une même forme normale. Rappelons que, tout comme $\times$ a la priorité sur $+$ lorsqu'aucun parenthésage n'est précisé, $\cap$ a la priorité sur $\cup$. Ainsi, on a d'une part :

$$\begin{aligned} a \Delta (b \Delta c) &= a \cap \overline{b \cap \bar{c} \cup \bar{b} \cap c} \cup \bar{a} \cap \left(b \cap \bar{c} \cup \bar{b} \cap c\right) \\ &= a \cap \left(\bar{b} \cup c\right) \cap \left(b \cup \bar{c}\right) \cup \bar{a} \cap b \cap \bar{c} \cup \bar{a} \cap \bar{b} \cap c \\ &= (a \cap b \cap c) \cup \left(a \cap \bar{b} \cap \bar{c}\right) \cup (\bar{a} \cap b \cap \bar{c}) \cup \left(\bar{a} \cap \bar{b} \cap c\right) \end{aligned}$$

On obtient ainsi une formule parfaitement symétrique en a, b et c, ne gardant que les intersections avec un nombre pair de passages au complémentaire. En utilisant le fait que $(a \Delta b) \Delta c = c \Delta (a \Delta b)$, on peut développer la formule comme ci-dessus, puis exploiter la symétrie en (a, b, c) pour conclure.

On dit alors que $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un groupe abélien (commutatif) d'élément neutre e.