Équations Différentielles Linéaires

Léo Gayral

Questions de Cours.

- Formule d'intégration par parties,
- Formule du changement de variable,
- Structure des solutions de $y' + ay = 0$, avec $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$.

Exercice 1.

Calculer la valeur de $I(n) = \int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln^n(x)}$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Correction 1.

Au vu du ln dans cette intégrale, et des e aux bornes, un candidat naturel pour le changement de variables est ici $y = \ln(x)$. En effet, comme $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ on en déduit $\int\limits_e^{e^2} \frac{1}{\ln^n(x)} \times \frac{dx}{x} = \int\limits_1^2 y^{-n} dy$. Ainsi, $I(1) = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$ et, lorsque $n \neq 1$, on a $I(n) = \frac{2^{1-n}-1}{1-n}$.

Exercice 2.

Quelles sont les solutions $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ au système $xy' - y = 0$? Qu'en est-il du système $x^2 y' - y = 0$?

Correction 2.

Étant donné que x s'annule sur $\mathbb{R}$, on va commencer par étudier le système séparément sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$. Ainsi, sur $\mathbb{R}^{+*}$, il est équivalent de résoudre $y' = \frac{1}{x} y$. Comme $x \mapsto \ln(x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$, on en déduit que $y = C \times \exp(\ln(x)) = Dx$ pour une certaine constante $D \in \mathbb{R}$. Le même raisonnement s'applique sur $\mathbb{R}^{-*}$, avec une solution $y(x) = Gx$. Ces deux fonctions ont pour limite 0 en 0, donc on peut en faire un raccord continu sur $\mathbb{R}$. Pour que les dérivées à gauche et à droite en 0 se raccordent, il faut de plus exiger $G = D$. Au final, l'ensemble des solutions au système est $\{x \mapsto Cx, C \in \mathbb{R}\}$.

En suivant la même approche, une solution de $x^2 y' - y = 0$ sur $\mathbb{R}^{-*}$ est sous la forme $Ge^{-\frac{1}{x}}$. Comme $x < 0$, $-\frac{1}{x} \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $Ge^{-\frac{1}{x}} \to \infty$ lorsque $G \neq 0$ par composition de limites. Pour qu'un raccord continu soit envisageable, il faut donc $G = 0$ de toute façon. Sur $\mathbb{R}^{+*}$, $De^{-\frac{1}{x}} \to 0$ en 0 quelque soit la valeur de D, ce qui se raccorde bien avec la fonction nulle. De plus, en dérivant on obtient $\frac{D}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \to 0$ également. On en déduit que toute solution $y \in \mathbb{C}^1$ au système est nulle jusqu'en 0 inclus puis égale à $Ce^{-\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ pour une certaine constante $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.
Résoudre le système $y'' - 3y' + 2y = (6x-5)e^{-x}$.

Correction 3.
Au vu du système, posons $z(x) = y(x) \times e^x$. On a alors $y' = (z' - z)\,e^{-x}$ et $y'' = (z'' - 2z' + z)\,e^{-x}$. Ainsi, si y est solution du système initial, alors $(z'' - 2z' + z) - 3\,(z' - z) + 2z = 6x - 5$. Inversement, pour toute solution z à ce système, $y = ze^{-x}$ sera solution du système initial.

On a donc $z'' - 5z' + 6z = 6x - 5$, dont $z(x) = x$ est une solution particulière au système assez évidente. En ce qui concerne les solutions à l'équation sans second membre, considérons le polynôme $P(X) = X^2 - 5X + 6$. Son discriminant est $\Delta = 25 - 4 \times 6 = 1$, donc les racines du polynôme sont $x_\pm = \frac{5 \pm 1}{2}$, $P(X) = (X-2)(X-3)$. On en déduit que $z = Ae^{2x} + Be^{3x} + x$, avec $A, B \in \mathbb{R}$ quelconques.

Exercice 4.
Résoudre le système $y''' - 3y'' + y' - 3y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = y''(0) = 0$.

Correction 4.
L'astuce est ici de considérer $z = y' - 3y$, pour se ramener à un système d'ordre 2. En effet, si y est solution du système considéré, alors on a $z'' + z = 0$, $z(0) = -3$ et $z'(0) = 0$. Ce système admet des solutions sous la forme $z(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$, et la condition en $t = 0$ impose $(A, B) = (-3, 0)$.

On en déduit que y est aussi solution du système $y' - 3y = -3\cos$. Ainsi, $y(t) = e^{3t} \times \left(1 - 3\int_0^t e^{-3u}\cos(u)du\right)$. Réciproquement, y ainsi définie est bien solution du système initial, qui est donc entièrement résolu.

Exercice 5.
Soit $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$. Montrer que $I_n = a_n + b_n \times e$, avec $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$. Justifier que $b_n \neq 0$ lorsque $n \geq 2$. Calculer la limite de I_n, et en déduire la limite de $\frac{a_n}{b_n}$.

Correction 5.
Au rang $n = 0$, on a $I_0 = \int\limits_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1$. D'autre part, par récurrence, $I_{n+1} = \int\limits_0^1 x^{n+1} \times e^x dx = [x^{n+1}e^x]_0^1 - (n+1)I_n = e - (n+1)\,(a_n + eb_n) = -(n+1)a_n + e\,(1 - (n+1)b_n)$.

On a $a_0 = -1$ et $a_{n+1} = -(n+1)a_n$, donc par récurrence on en déduit $a_n = (-1)^{n+1}n!$. D'autre part, $b_0 = 1$ et $b_{n+1} = 1 - (n+1)b_n$. Ainsi, $b_1 = 1 - b_0 = 0$, $b_2 = 1 - 2b_1 = 1$. Plus largement, pour k un entier pair, $b_k = 1 - kb_{k-1} \equiv 1[2]$ est impair, donc non nul. En outre, aux rangs $k+1$ impairs, si $b_k < 0$, alors $b_{k+1} \geq 1 > 0$ et si $b_k > 0$ alors $b_{k+1} \leq 1 - (k+1) = -k < 0$. Ainsi, à partir du rang $n = 2$ on a bien $b_n \neq 0$.

Par théorème de convergence dominée, $I_n \to 0$. Quitte à diviser par b_n, compte-tenu du fait qu'à partir du rang $n = 2$ on a $|b_n| \geq 1$, on en déduit $\frac{I_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} + e \to 0$, d'où enfin $\frac{a_n}{b_n} \to -e$.

Exercice 6.
Soit $f \in \mathcal{C}^1 (R, \mathbb{R}^{+*})$ telle que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) \times f(y)$. Soient $u \in \mathbb{R}$ fixé et $g : x \mapsto f(x+u)$. Calculer $g'(0)$ de deux façons différentes. En déduire que f vérifie $f' = af$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$, puis que $f(x) = e^{ax}$.

Correction 6.
D'une part, en tant que translatée de f, on a $g'(0) = f'(u)$. D'autre part, $g = f(u) \times f$ est proportionnelle à f, donc $g'(0) = f(u) \times f'(0)$. En conséquence, le résultat étant vrai pour tout $u \in \mathbb{R}$, en posant $a = f'(0)$, on en déduit $f' = a \times f$. On en déduit que, en tant que solution de ce système, on a $f = f(0) \times e^{ax}$. En outre, $f(0) = f(0+0) = f(0)^2$, donc $f(0) = 1$.

Exercice 7.
Soient $b, c \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une solution de $y''(t) + by(t) + cy(t) = 0$ telle que $y(0) = y(1) = 0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $y(n) = 0$.

Correction 7.
On va procéder par disjonction de cas, selon le signe du discriminant du système et donc la forme des solutions. Posons donc $\Delta = b^2 - 4c$.

Si $\Delta > 0$, alors le polynôme $X^2 + bX + c$ admet deux racines distinctes $x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2} \in \mathbb{R}$. En conséquence, les solutions de l'équation différentielle sont sous la forme $y = A \exp(x_- t) + B \exp(x_+ t)$. Notre condition impose alors $y(0) = A + B = 0$ et alors $y(1) = A(\exp(x_-) - \exp(x_+)) = 0$ d'où $A = 0$. Nécessairement, $y = 0$, donc c'est en particulier le cas sur $\mathbb{Z}$.

Si $\Delta = 0$ on a une racine double $x = \frac{-b}{2}$, et les solutions de l'équation sont sous la forme $y = (At + B)e^{tx}$. Dans ce cas, on a $y(0) = B = 0$ donc $y = 0$ et $y(1) = Ae^x = 0$ donc $A = 0$, d'où $y = 0$.

Enfin, si $\Delta < 0$, posons $\delta = \sqrt{-\Delta}$ et $x = \frac{-b}{2}$. Les solutions du système sont sous la forme $y = e^{tx}(A\sin(\delta x) + B\cos(\delta x))$. On a alors $y(0) = B = 0$, donc $y(t) = A \times e^{tx}\sin(\delta x)$. Or $y(1) = e^x \times A \times \sin(\delta) = 0$. Si $A = 0$, alors $y = 0$, le problème est à nouveau résolu. Sinon, on a $\sin(\delta) = 0$ donc $\delta \equiv 0[\pi]$. Il en découle, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n\delta \equiv 0[\pi]$ d'où $y(n) = 0$.

Exercice 8.
Considérons l'équation de Bernoulli $fy' + \varphi y = \psi y^n$, où $n \in \mathbb{N}$. En considérant $z = y^{1-n}$, montrer qu'on peut se ramener à un système linéaire quand y ne s'annule pas. Appliquer cette méthode au système $x^3 \times y'(x) - x^2 \times y(x) + y(x)^4 = 0$ sur $\mathbb{R}^+$.

Correction 8.
Si $n \in \{0, 1\}$, le système étudié est déjà linéaire. Sinon, considérons $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle où y ne s'annule pas, où on peut définir $z = y^{1-n}$. Dans ce cas, z est dérivable par composition et on a $z' = (1-n)\, y'^{-n}$. En divisant par y^n on obtient le système linéaire $\frac{f}{1-n} z' + \varphi z = \psi$.

Dans le cas considéré on a $n = 4$, et $z = \frac{1}{y^3}$ solution de $x^3 z' - x^2 z + 1 = 0$ en supposant que y ne s'annule pas. Dans le système initial, on obtient en particulier $y(0) = 0$ comme condition au bord, donc on se ramène à $\mathbb{R}^{+*}$ sans soucis. Sur ce domaine, comme $x \neq 0$, on se ramène alors au système $z' = \frac{1}{x}z - \frac{1}{x^3}$. La solution générale sans second membre est sous la forme λx avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pour résoudre le système avec second membre, on considère donc $z(x) = \lambda(x) \times x$ avec $\lambda \in \mathcal{C}^1$, par variation de la constante. On a dans ce cas $z' = \frac{z}{x} + \lambda' \times x$, donc $\lambda' x = -\frac{1}{x^3}$, d'où $\lambda' = -\frac{1}{x^4}$, et enfin $\lambda = \frac{1}{3x^3} + A$ avec $A \in \mathbb{R}$. Si $A < 0$, comme $1 + 3Ax^3 = 0$ en $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{A}}$, z devrait s'annuler, ce qui impliquerait $y(x) = +\infty$, on a donc $A \geq 0$. Dans ce cas, il en découle $y(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{1+3Ax^3}} \times x$. La valeur de cette fonction en 0 ne dépend pas du choix de A, et se raccorde bien avec $y(0) = 0$.

En réalité, ce système a propriétés d'unicité qui nous permettent de conclure que la seule solution définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ tout entier et qui s'annule en un point est $y = 0$.

Exercice 9.
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f'(x) + f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Correction 9.
L'astuce est ici d'introduire artificiellement $g := f' + f$ puis de résoudre le système ainsi défini. Par méthode de la variation de la constante, cherchons f sous la forme $\lambda(x) \times e^{-x}$. On a alors $f' + f = \lambda' e^{-x} = g$, d'où $\lambda'(x) = e^x \times g$. Considérons désormais $f(x) = e^{-x} f(0) + e^{-x} \int_0^x e^t g(t)dt$.

Le terme de gauche converge clairement vers 0, donc on n'a plus qu'à étudier celui de droite. Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Comme $g(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \geq x_0$, $|g(x)| \leq \epsilon$. Il en découle, pour $x \geq x_0$:

$$\begin{aligned}
\left|e^{-x} \int_0^x e^t g(t)dt\right| &\leq e^{-x} \times \left|\int_0^{x_0} e^t dt\right| + \epsilon \times \int_{x_0}^{x} e^{t-x} dt \\
&\leq e^{-x} \times \left|\int_0^{x_0} e^t dt\right| + \epsilon \int_{-\infty}^{x} e^{t-x} dt \\
&\leq e^{-x} \times \left|\int_0^{x_0} e^t dt\right| + \epsilon
\end{aligned}$$

Désormais, à x_0 fixé, le terme de gauche tend vers 0 pour $x \to \infty$. En particulier, à partir d'un certain rang $x_1 \geq x_0$, on obtient $\left|e^{-x} \int_0^x e^t g(t)dt\right| \leq 2\epsilon$. Cette inégalité est vérifiée à partir d'un rang pour tout ϵ donc $e^{-x} \int_0^x e^t g(t)dt \to 0$ par définition, et enfin $f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ par sommation de limites.