Fonctions Usuelles

Léo Gayral

Questions de Cours.

- Théorème des valeurs intermédiaires,
- Théorème de la bijection monotone,
- Limite de $f : x \mapsto x^\alpha$ et f' en 0 en fonction de α,
- Monotonie d'une somme de fonctions monotones,
- Domaine de définition de $x + \frac{1}{x}$, tableau de variations, minimum, allure du graphe.

Exercice 1.

Calculer la dérivée de $f(x) = \left(\frac{x^3+1}{x^3-1}\right)^{\frac{1}{4}}$.

Correction 1.
La fonction $\frac{x^3+1}{x^3-1}$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$; elle est strictement positive sur $]-\infty,-1]\cup]1,\infty[$. La fonction $y \mapsto y^{\frac{1}{4}}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Par composition, la fonction f est donc définie sur $]-\infty,-1]\cup]1,\infty[$, dérivable ailleurs qu'en -1. Sa dérivée est :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4} \times \left(\frac{x^3+1}{x^3-1}\right)^{-\frac{3}{4}} \times \left[\frac{3x^2\left(x^3-1\right)-3x^2\left(x^3+1\right)}{(x^3-1)^2}\right] \\ &= \frac{1}{4(x^3-1)^{\frac{5}{4}}(x^3+1)^{\frac{3}{4}}} \times (-6x^2) \\ &= -\frac{3x^2}{2(x^3-1)^{\frac{5}{4}}(x^3+1)^{\frac{3}{4}}} \end{aligned}$$

Exercice 2.
Soient $f : x \mapsto \sqrt{x(x-3)}$ et $g : x \mapsto \sqrt{5-3x}$. Donner leurs domaines de définition, puis résoudre $f(x) = g(x)$.

Correction 2.
Le polynôme $x(x-3)$ est scindé, à racines simples, de coefficient dominant positif. Il est donc positif sur $]-\infty,0]\cup[3,\infty[$, où f est bien définie. Le polynôme $5-3x$ est positif lorsque $x \leq \frac{5}{3}$, donc g est définie sur $\left]-\infty,\frac{5}{3}\right]$. Comme $0 < \frac{5}{3} < 3$, on cherche donc à résoudre $f(x) = g(x)$ sur $\mathbb{R}^-$, l'intersection des domaines de définition de f et g.

Sur ce domaine, comme $x \mapsto x^2$ réalise une bijection sur $\mathbb{R}^+$, il est équivalent de résoudre $x(x-3) = 5-3x$, donc $x^2 = 5$. Autrement dit, la seule solution de $f(x) = g(x)$, dans l'intersection de leurs domaines de définition, est $x = -\sqrt{5}$.

Exercice 3.
Soient $f : x \mapsto (x-1)x(x+1)$ et $g : x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$. Quel est le domaine de définition maximal de $g \circ f$?

Correction 3.
La fonction ln est positive sur $[1, \infty[$ et $\sqrt{\bullet}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ donc, par composition, g est définie sur $[1, \infty[$.

On connait les racines et le coefficient dominant du polynôme f, donc son signe. f est positive sur $I = [-1, 0]$ et $J = [1, \infty[$. Sur I, on sait que $0 \leq x+1 \leq 1$, et $0 \leq x(x-1) \leq \frac{1}{4}$, donc $f \leq \frac{1}{4}$, on ne peut définir $g \circ f$ sur I. Sur J, on a $f(x) = x\,(x^2-1)$. La fonction est positive, strictement croissante, donc par théorème de la bijection monotone, il existe un unique réel $\theta \geq 1$ tel que $f(\theta) = 1$, et alors $f(x) \geq 1$ si et seulement si $x \geq \theta$. Le domaine de définition maximal de $g \circ f$ est donc $[\theta, \infty[$.

On n'est pas capable de calculer la valeur exacte de θ avec les outils mathématiques dont on dispose, mais on peut en exhiber un encadrement. En effet, sur J, on sait que $f(x) \geq x^2 - 1$, donc, si on a $x \in J$ tel que $x^2 - 1 = 1$, $f(x) \geq 1$ donc $x \geq \theta$. L'unique solution de $x^2 = 2$ sur J est $x = \sqrt{2}$ donc $\theta \leq \sqrt{2}$, et $g \circ f$ est bien définie sur $[\sqrt{2}, \infty[$.

On peut pousser le raisonnement un cran plus loin. En effet, sur $\left[1, \sqrt{2}\right]$, domaine qui contient θ, on a $f(x) \leq \sqrt{2}\,(x^2-1)$. Si a x tel que $x^2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $\theta \geq x$. Donc $\theta \geq \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}$. Numériquement, cela donne $\theta \in [1.3, 1.42]$.

Exercice 4.
Résoudre l'équation $x^{(x^x)} = (x^x)^x$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Quel est la limite de ces fonctions en 0 ?

Correction 4.
Sur le domaine considéré, les fonctions sont bien définies, et on peut réécrire l'équation sous la forme $\exp\left(x^x \ln(x)\right) = \exp\left(x \ln\left(x^x\right)\right)$. Par bijection monotone, il est alors équivalent de résoudre $x^x \ln(x) = x \ln\left(x^x\right)$, or $\ln\left(x^x\right) = x \ln(x)$. Si $x = 1$, on a une solution évident au problème.

Sinon, on peut simplifier en divisant par $\ln(x)$, ce qui nous ramène à résoudre $x^x = x^2$, donc $\exp(x \ln(x)) = \exp(x \ln(2))$, donc $x \ln(x) = x \ln(2)$. Comme $x > 0$, on peut simplifier l'équation en $\ln(x) = \ln(2)$, ce qui donne enfin $x = 2$. On peut aisément vérifier que $x = 2$ est solution, essentiellement car $2^4 = 4^2$. Les seules solutions sont donc 1 et 2.

On sait que $x \ln(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$, donc par composition de limites, $x^{(x^x)} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} e^0 = 1$ et $(x^x)^x \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} e^0 = 1$. Autrement dit, si on prolonge les deux fonctions par continuité en 0, on obtient un troisième cas d'égalité, une troisième solution à l'équation.

Exercice 5.
Soit $f : x \mapsto (1+x) \times \ln^2(1+x)$. Donner son domaine de définition. Établir la majoration $f(x) \leq x^2$, chercher les cas d'égalité.

Correction 5.

La fonction f est définie lorsque $\ln(1+x)$ est définie, autrement lorsque $x > -1$. Pour établir l'inégalité, sur le domaine de définition de f, on considère la fonction $g(x) = \frac{x^2}{1+x} - \ln^2(1+x)$. On veut maintenant établir $g(x) \geq 0$ et trouver d'éventuels cas d'égalité.

La fonction g est dérivable sur ce domaine, de dérivée $\frac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2} - 2\frac{\ln(1+x)}{1+x}$. Posons donc $h(x) = x^2 + 2x - 2(1+x)\ln(1+x)$, de sorte que g' et h ont le même signe sur le domaine considéré.

On a alors $h'(x) = 2\left(1 + x + 1 - \ln(1+x)\right)$. Or $\ln(z) \leq 1 + z$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, avec égalité si et seulement si $z = 1$, donc ici $h' \geq 0$, h est strictement croissante avec un point d'inflexion en $x = 0$. Or $h(0) = 0$, donc h et g' sont strictement négatives sur $]-1, 0[$ et strictement positives sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On en déduit enfin que g admet un unique minimum en 0, avec $g(0) = 0$, d'où le résultat voulu.

Exercice 6.
Résoudre l'équation diophantienne $x^y = y^x$, avec $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Correction 6.
Ce problème d'arithmétique est en fait un problème d'analyse déguisé. Naturellement, si $x = y$, on a une solution. Par symétrie des données, on peut désormais supposer $x < y$. Si $x = 0$, on cherche à résoudre $0 = 0^y = y^0 = 1$, sans solutions. Si $x = 1$, on cherche à résoudre $x = x^1 = 1^x = 1$, sans solutions. On considère donc désormais $2 \leq x < y$.

En passant au logarithme, on peut de façon équivalente résoudre $x\ln(y) = y\ln(x)$. Comme $x > 0$, on peut normaliser et chercher à résoudre $\frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(y)}{y}$. On s'intéresse donc désormais à la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.

La fonction est dérivable sur $[1, \infty[$, de dérivée $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$. $f'(x)$ est du même signe que $1 - \ln(x)$, une fonction strictement décroissante, qui s'annule en e. On en déduit, par bijection monotone, que f réalise une bijection monotone entre $[1, e]$ et $\left[0, \frac{1}{e}\right]$, et également entre $[e, \infty[$ et $\left]0, \frac{1}{e}\right]$.

En particulier, si $x \geq 3$, alors $x, y \in [e, \infty[$ donc $f(x) \neq f(y)$ par monotonie. Si $x = 2$, on aura une unique solution au problème $f(x) = f(y)$ avec $y > e$, pas forcément entier a priori. Cependant, on constate que $2^4 = 4^2$, ce qui donne donc l'unique solution non triviale au problème.

On peut également avoir envie de comparer e^π et π^e, pour jouer avec la fonction f. Comme e réalise le maximum de f, on a nécessairement $\frac{\ln(e)}{e} > \frac{\ln(\pi)}{\pi}$, donc $e^\pi > \pi^e$, et on a plus largement $e^x > x^e$ si $x \geq 1$ et $x \neq e$.