Calculs Matriciels, Logique

Léo Gayral

Questions de Cours.

- Inverse d'une matrice 2×2,
- Résolution du système $\left\{ \begin{array}{ccccc} 5x & + & y & = & 13 \\ x & - & 5y & = & -2 \end{array} \right.$,
- Binôme de Newton matriciel,
- Application du pivot de Gauss à une matrice 3×3.

Exercice 1.
Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $M^n = \begin{pmatrix} 3^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Correction 1.
Le résultat est vrai au rang 1, supposons le vrai au rang n. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} M^{n+1} & = & M \times M^n \\ & = & \begin{pmatrix} 3 \times 3^n & 3 \times (3^n - 2^n) + 1 \times 2^n \\ 0 & 2 \times 2^n \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 3^{n+1} & 3^{n+1} - (3-1) \times 2^n \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \end{array}$$

d'où le résultat voulu par récurrence.

Exercice 2.
Soient $M \in M_n(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $M^k = 0$. On dit que M est nilpotente. M peut-elle être inversible ?

Correction 2.
Supposons que M est inversible. Alors $MM^{-1} = M^{-1}M = I_n$ et en particulier, M et M^{-1} commutent. On en déduit que $0 = 0 \times M^{-k} = M^k M^{-k} = (MM^{-1})^k = I_n$, ce qui est absurde. M ne peut donc être inversible.

Exercice 3.
Soit M nilpotente. $I_n - M$ est-elle inversible ? On pourra s'inspirer de la relation $(1 - x) \times \sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1$ pour $x \in]-1, 1[$.

Correction 3.
Au vu de l'indication, on aimerait transposer la relation algébrique ci-dessus au cas $x = M$. Si on considère un rang fini m, on a $(1-x) \times \sum_{i=0}^{m} x^i = 1 - x^{m+1}$. Comme M et I_n commutent, on peut appliquer cette relation polynomiale ici, pour obtenir $(I_n - M) \times \sum_{i=0}^{m} M^i = I_n - M^{m+1}$. Comme M est nilpotente, à partir d'un rang, $M^i = 0$, donc la somme à gauche est stationnaire, et le terme de droite est l'identité. Autrement dit, $\sum_{i=0}^{\infty} M^i$ est toujours bien définie en tant que somme infinie, égale à $(I_n - M)^{-1}$.

Exercice 4.
Soit $M \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice bistochastique : pour toute ligne i (resp. colonne j), on a $\sum_{j=1}^{p} M_{i,j} = 1$ (resp $\sum_{i=1}^{n} M_{i,j} = 1$). Montrer que M est carrée.

Correction 4.
L'idée essentielle est de calculer la somme des coefficients sur toute la matrice. En effet, on a alors $n = \sum_{i=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} M_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} M_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} 1 = p$.

Exercice 5.
Exhiber des formules logiques équivalentes à $P \Rightarrow Q$ et $P \wedge Q$ n'utilisant que les règles $\neg$ et $\vee$.

Correction 5.
La façon la plus explicite de trouver ce résultat est d'utiliser une table de vérités. On cherche à trouver une formule qui donne la table suivante :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Cette formule est vraie dans 3 cas sur les 4 considérés, on va donc chercher à l'exprimer avec un $\vee$ de deux clauses. On constate que la formule est vraie dès lors que $P = 0$ ou que $Q = 1$, d'où la formule désirée, $P \Rightarrow Q \equiv (\neg P) \vee Q$.

Dans le second cas de figure, on a la table suivante :

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Dans ce cas, la formule est vraie dans un seul cas, donc on considère sa négation, qui est vraie dans 3 cas sur les 4. La négation est vraie dès lors que P ou Q est faux, ce dont on déduit que $P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$.

Exercice 6.
On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection si $\forall y \in \mathbb{R}, \exists! x \in \mathbb{R}, f(x) = y$. On dit que f est une involution lorsque $\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = x$. Montrer qu'une involution est une bijection.

Correction 6.
Commençons par montrer la surjection de f, l'existence d'un antécédent x pour tout $y \in \mathbb{R}$. Ceci découle simplement du fait que, pour $y \in \mathbb{R}$, si on pose $x = f(y)$, alors par définition $f(x) = y$. L'injection n'est pas plus compliquée : considérons $z \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = y$. Alors $z = f(f(z)) = f(y) = x$, d'où l'unicité.

Exercice 7. *Formule du crible de Poincaré*
Soient $A, B \subset C$ deux ensembles finis. Exprimer le cardinal de $A \cup B$ en fonction de ceux de A, B et $A \cap B$.

Généraliser le résultat ç n ensembles finis $A_1, \ldots, A_n$ pour trouver le principe d'inclusion-exclusion :

$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{I \subset [n], I \neq \emptyset}^{n} (-1)^{\# I+1} \# \left(\bigcap_{j \in I} A_j\right)$$

où $[n] = \{1, \ldots, n\}$.

Correction 7.
En premier lieu, on a l'union disjointe $A \cup B = [(A \cup B) \cap A] \sqcup [(A \cup B) \backslash A]$. Comme $A \subset A \cup B$, on a $(A \cup B) \cap A = A$. D'autre part, $(A \cup B) \backslash A = (A \backslash A) \cup (B \backslash A) = (B \backslash A)$. Donc, en tant qu'union disjointe, on a $\#(A \cup B) = \# A + \#(B \backslash A)$.

D'autre part, on a $B = (B \cap A) \sqcup (B \backslash A)$, donc $\#(A \cup B) = \# A + \# B - \#(A \cap B)$. Notons que la formule est symétrique en A et B, mais qu'on a besoin d'introduire une asymétrie dans la preuve pour l'obtenir. Cette formule correspond précisément au crible sur 2 éléments.

Passons maintenant au cas général, avec une démonstration par récurrence. L'idée clé, avec $n+1$ ensembles, est d'introduire un ensemble auxiliaire $A'_n = A_n \cup A_{n+1}$. Dans ce cas, si on applique la formule du crible sur n ensembles, en distinguant les parties I contenant n, on obtient :

$$\begin{aligned} \#\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \sum_{I \subset [n-1], I \neq \emptyset}^{n} (-1)^{\# I+1} \# \left(\bigcap_{j \in I} A_j\right) \\ &+ \sum_{I \subset [n-1], I \neq \emptyset}^{n} (-1)^{\# I} \# \left(\left[\bigcap_{j \in I} A_j \cap A_n\right] \cup \left[\bigcap_{j \in I} A_j \cap A_{n+1}\right]\right) \end{aligned}$$

La première somme correspond aux parties de $[n+1]$ non vides ne contenant ni n ni $n+1$. En utilisant le résultat établi pour deux ensembles, on a d'autre part :

$$\begin{aligned}
& (-1)^{\#I}\#\left(\left[\bigcap_{j\in I\sqcup\{n\}} A_j\right]\cup\left[\bigcap_{j\in I\sqcup\{n+1\}} A_j\right]\right)\\
= \ & (-1)^{\#(I\sqcup\{n\})+1}\#\left(\bigcap_{j\in I\sqcup\{n\}} A_j\right)\\
+ \ & (-1)^{\#(I\sqcup\{n+1\})+1}\#\left(\bigcap_{j\in I\sqcup\{n+1\}} A_j\right)\\
+ \ & (-1)^{\#(I\sqcup\{n,n+1\})+1}\#\left(\bigcap_{j\in I\sqcup\{n,n+1\}} A_j\right)
\end{aligned}$$

Autrement dit, on fait ainsi apparaître les parties de $[n+1]$ contenant n mais pas $n+1$, $n+1$ mais pas n, et enfin n et $n+1$. En remettant tous les termes côte à côte, on obtient enfin une somme sur toutes les parties de $[n+1]$, la formule désirée.

Exercice 8.
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Donner la négation de la proposition suivante : $\forall M\in\mathbb{R},\exists x\in\mathbb{R},\forall y>x, f(y)>M$. Interpréter cette formule.

Correction 8.
De façon générale, pour une proposition P, la négation de $\forall x.P$ est $\exists x.\neg P$, et inversement pour $\exists x.P$. La négation de la proposition précédente est donc $\exists M\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R},\exists y>x, f(y)\leq M$. La proposition initiale peut se traduire en toutes lettres en « tout seuil M est éventuellement dépassé par f à partir d'un certain rang x », ou autrement dit $f\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\infty$.

Exercice 9.
Soit $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R})$ telle que $\forall x,y, f(x\times y)=f(x)+f(y)$ et $f(2)=1$. Montrer que $f=\log_2$. On pourra pour cela utiliser et démontrer que $\frac{\lfloor ny\rfloor}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ pour $y\in\mathbb{R}$ quelconque.

Correction 9.
En premier lieu, $f(1)=f(1\times 1)=f(1)+f(1)=2\times f(1)$, donc nécessairement $f(1)=0$. On en déduit $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$. Par récurrence, on obtient donc $f\left(x^n\right)=n\times f(x)$ pour $n\in\mathbb{Z}$ quelconque. En particulier, $f\left(2^n\right)=n\times f(2)=n\times\log_2(2)=\log_2\left(2^n\right)$.

Cherchons à étendre ce résultat aux puissances rationnelles. Plus précisément, on a $q\times f\left(2^{\frac{1}{q}}\right)=f\left(2^{\frac{1}{q}\times q}\right)=f(2)=1$, donc $f\left(2^{\frac{1}{q}}\right)=\frac{1}{q}$. Plus largement, en combinant les résultats précédents, on en déduit que pour tout rationnel $r\in\mathbb{Q}$, on a $f\left(2^r\right)=r=\log_2\left(2^r\right)$.

Considérons maintenant $x>0$ quelconque. On peut l'écrire sous la forme $x=\exp\left(\ln(x)\right)=\exp\left(\log_2(x)\times\ln(2)\right)=2^{\log_2(x)}$. Posons $y=\log_2(x)$. D'après le lemme, par composition de limites, on a $2^{\frac{\lfloor ny\rfloor}{n}}\to 2^y=x$, donc $f\left(2^{\frac{\lfloor ny\rfloor}{n}}\right)=\frac{\lfloor ny\rfloor}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f\left(2^y\right)=f(x)$ par continuité de f. D'autre part, à nouveau par le lemme, le terme de gauche tends vers y, d'où $f(x)=y=\log_2(x)$ par unicité de la limite.

Pour montrer le lemme, il suffit de remarquer que $\lfloor ny \rfloor \in [ny-1, ny+1]$ donc $\left|\frac{\lfloor ny \rfloor}{n} - y\right| \leq \frac{1}{n}$.