Fonctions Circulaires

Léo Gayral

Questions de Cours.

- $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$,
- $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ à partir des formules usuelles,
- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

Exercice 1.
Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x > 0$ et $x^2 = 1 + y^2$. Montrer qu'il existe un unique réel t tel que $x = \cosh(t)$ et $y = \sinh(t)$.

Correction 1.
La fonction sinh est strictement croissante, et tends vers $\pm\infty$ en $\pm\infty$. Par bijection monotone, on en déduit qu'il existe un unique t tel que $y = \sinh(t)$. On sait que, de façon générale, $\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$. On en déduit ici que $\cosh^2(t) = 1 + \sinh^2(t) = 1 + y^2 = x^2$. La fonction cosh est à valeurs positives, et $x > 0$, donc on obtient finalement $\cosh(t) = x$ en passant à la racine.

Exercice 2.
Résoudre $a\cosh(x) + b\sinh(x) = 0$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.

Correction 2.
Si a et b sont nuls, alors tout x est solution de l'équation.

Supposons $a \neq 0$ et $b = 0$. Dans ce cas, on se ramène à résoudre $\cosh(x) = 0$, qui n'admet pas de solutions.

Enfin, si $b \neq 0$, on se ramène à la résolution de $\tanh(x) = -\frac{a}{b}$. La fonction $\tanh(x)$ tend vers 1 en $+\infty$. En effet, $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$. Or $e^t \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par composition de limites $\tanh(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1-0}{1+0} = 1$. Par un raisonnement analogue, la fonction tend vers -1 en $-\infty$.

En outre, $\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh(x)^2} > 0$, donc la fonction est strictement croissante. Elle réalise donc une bijection monotone entre $\mathbb{R}$ et $]-1, 1[$. On en déduit finalement que l'équation $\tanh(x) = -\frac{a}{b}$ admet une solution si et seulement si $|a| < |b|$, et qu'elle est unique dans ce cas.

Exercice 3.
Montrer $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Correction 3.
En premier lieu, justifions l'existence de la fonction $\operatorname{arcsinh}(x)$. La fonction sinh tend vers $\pm\infty$ en $\pm\infty$, et est strictement croissante car $\sinh' = \cosh > 0$. Par le théorème de la bijection monotone, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc $\operatorname{arcsinh}(x)$ est bien définie en tant qu'inverse de sinh.

Pour tout x réel, on a $\sqrt{x^2+1} > |x| \geq x$ donc a fortiori, $f : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Or $\sinh(f(x))) = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)-\left(\sqrt{(-x)^2+1}-x\right)}{2} = x$. En appliquant arcsinh à cette égalité, on en déduit $\operatorname{arcsinh}(x) = \operatorname{arcsinh}\left[\sinh(f(x))\right] = f(x)$ pour tout réel x.

Exercice 4.
Établir l'inégalité de Huygens : $2\sin(x) + \tan(x) \geq 3x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Correction 4.
En premier lieu, $f : x \mapsto 2\sin(x) + \tan(x) - 3x$ est bien définie sur le domaine considéré, et $f(0) = 0$. En outre, $f'(x) = 2\cos(x) + \frac{1}{\cos(x)^2} - 3$.

Soit $g : t \mapsto 2t + \frac{1}{t^2}$, de sorte que $f'(x) = g(cos(x)) - 3$. On cherche à trouver le minimum de g sur $]0,1]$. $g'(t) = 2 - 2 \times \frac{1}{t^3}$ est strictement décroissante sur $]0,1]$, s'annule en 1 donc g est strictement décroissante sur $]0,1]$, et $g(1) = 3$.

On en déduit $f'(x) > 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $2\sin(x)+\tan(x) \geq 3x$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.

Exercice 5.
Soit $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $|f'(x)| \leq \frac{1}{k\pi}$ sur $[k\pi, (k+1)\pi]$, pour $k \in \mathbb{N}$ quelconque.

Correction 5.
La fonction considérée est bien définie, dérivable sur ce domaine. On a alors directement $f'(x) = \frac{\cos(x)\times x - \sin(x)\times 1}{x^2} = \frac{\cos(x)-f(x)}{x}$. Or $|\cos(x)| \leq 1$ dans tous les cas, et comme on a $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$, alors $|\sin(x)| = |\sin(x-k\pi)| \leq x - k\pi$ et $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{k\pi}$. En recombinant ces éléments ensemble, on obtient $\left|\cos(x) - \frac{\sin(x)}{x}\right| \leq 1 + \frac{x-k\pi}{k\pi} = \frac{x}{k\pi}$. On en déduit enfin le résultat voulu, $|f'(x)| = \frac{1}{x} \times |\cos(x) - f(x)| \leq \frac{1}{x} \times \frac{x}{k\pi} = \frac{1}{k\pi}$.

Exercice 6.
Soit $f : x \mapsto e^x \sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f^{(n)}(x) = \sqrt{2}^n e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$.

Correction 6.
Les deux résultats trigonométriques à avoir en tête sont $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ d'une part, et la relation $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$ d'autre part.

L'égalité est vraie pour $f^{(0)} = f$. Supposons la vraie au rang n. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} f^{(n+1)} & = & {f^{(n)}}' \\ & = & \sqrt{2}^n e^x \times \left(\sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right) + \left[\sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)\right]'\right) \\ & = & \sqrt{2}^n e^x \times \left(\sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ & = & \sqrt{2}^n e^x \times \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ & = & \sqrt{2}^{n+1} e^x \times \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{4}\right) \end{array}$$

d'où le résultat voulu par récurrence.

Exercice 7.
Soient $a > 0$ et $f_a : x \mapsto \arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)$. Montrer que $\arctan(a) + \arctan\left(\frac{1}{a}\right) = \text{signe}(a) \times \frac{\pi}{2}$. Étudier le comportement de f_a comportement en $+\infty$, calculer sa dérivée. Montrer que $\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + \mathbb{1}_{ab>1} \times \pi$.

Correction 7.
On sait que la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Soit alors $g : a \mapsto \arctan(a) + \arctan\left(\frac{1}{a}\right)$ bien définie sur $\mathbb{R}^*$. Par imparité, montrons l'égalité voulue lorsque $a > 0$ et donc $\text{signe}(a) = 1$. Lorsque $a = 1$, on a $g(a) = 2 \times \arctan(1) = \frac{\pi}{2}$. Or g est constante, car $g'(a) = \frac{1}{1+a^2} + \left(-\frac{1}{a^2}\right) \times \frac{1}{1+\frac{1}{a^2}} = 0$, d'où le résultat voulu.

Venons-en à la fonction f_a. Naturellement, $\frac{a+x}{1-ax}$ est définie en tant que fonction de x lorsque $ax \neq 1$, en particulier lorsque $x > \frac{1}{a}$. Lorsque $x \to \infty$, $\frac{a+x}{1-ax} = -\frac{1+\frac{a}{x}}{a-\frac{1}{x}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{a}$, donc $f_a(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \arctan\left(-\frac{1}{a}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{a}\right) = \arctan(a) - \frac{\pi}{2}$ par composition de limites.

Étudions plus précisément la fonction f_a sur le domaine $\left]\frac{1}{a}, \infty\right[$. Pour ce faire, calculons maintenant la dérivée de f_a :

$$\begin{array}{rcl} f_a'(x) & = & \left[\frac{a+x}{1-ax}\right]' \times \frac{1}{1+\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)^2} \\ & = & \frac{(1-ax)-(a+x)\times(-a)}{(1-ax)^2} \times \frac{(1-ax)^2}{(1-ax)^2+(a+x)^2} \\ & = & \frac{1+a^2}{(1-2ax+a^2x^2)+(a^2+x^2+2ax)} \\ & = & \frac{1+a^2}{1+a^2+x^2+a^2x^2} \\ & = & \frac{1}{1+x^2} \end{array}$$

Autrement dit, $f_a' = [x \mapsto \arctan(x)]'$, donc sur le domaine considéré, $f_a(b) = \arctan(b) + C$ où C est une constante à déterminer. On connait déjà la limite de f_a en ∞. D'autre part, $\arctan(b) \to \frac{\pi}{2}$. Par unicité de la limite, on en déduit que $\arctan(a) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + C$, d'où $f_a(b) + \pi = \arctan(a) + \arctan(b)$ lorsque $ab > 1$.

En utilisant un raisonnement analogue, comme $f_a(0) = \arctan(a)$ et $\arctan(0) = 0$, on obtient $C = \arctan(a)$ lorsque $ab < 1$, sur le domaine $\left]-\infty, \frac{1}{a}\right[$. Lorsque $a < 0$, on peut également refaire une analyse similaire mais avec $b \to -\infty$, ou bien exploiter l'imparité de arctan, pour obtenir le résultat désiré.

Exercice 8.
On considère $k \in \mathbb{N}$ grand devant 1. Donner l'allure de la courbe $x \mapsto \sin(x)\sin(kx)$.

Correction 8.
L'objectif de cet exercice est avant tout de mettre en place un raisonnement informel et géométrique. En premier lieu, on peut commencer par tracer sur un même graphe les deux courbes. On remarque que, en raison de la différence de période entre les deux sinus, le premier est presque « constant » au cours d'une période du second. De façon informelle, cela signifie que le sinus le plus lent peut-être vu comme une enveloppe qui décrit l'amplitude du second sinus, comme l'illustre le graphe ci-dessous :