

Projet de Mobilité Internationale à l'Université de Victoria au Canada

Doctorant : Léo Gayral
Encadrant : Mathieu Sablik

Ce projet est découpé en trois parties. Dans un premier temps, je propose un résumé succinct de mon sujet de thèse et de mes thématiques de recherche en général, d'une façon qui se veut accessible pour un-e non-mathématicien-ne. Dans un second temps, je détaille plus précisément en quoi ce projet de mobilité s'inscrirait dans ma thèse. Dans un troisième temps, j'établis un budget sommaire du projet, ainsi que de sa répartition entre les différentes sources de financements.

1 Sujet de Thèse

L'intitulé de ma thèse est la *Robustesse des pavages aux perturbations aléatoires*. Dans ce contexte, un pavage désigne typiquement des pièces carrées alignées sur une grille, munies de « règles locales » formalisant si oui ou non des tuiles voisines s'emboîtent correctement. Cette idée est illustrée en Figure 1, où le jeu de 32 tuiles (en incluant les rotations et symétries des pièces de base) permet et *force* une structure hiérarchique apériodique au sein du pavage de Robinson [9], avec des lignes noires formant des carrés qui s'emboîtent dans des carrés plus grands. En conséquence, la notion de perturbation aléatoire correspond à des dispositions de tuiles qui ne respectent *pas* lesdites règles locales à la perfection.

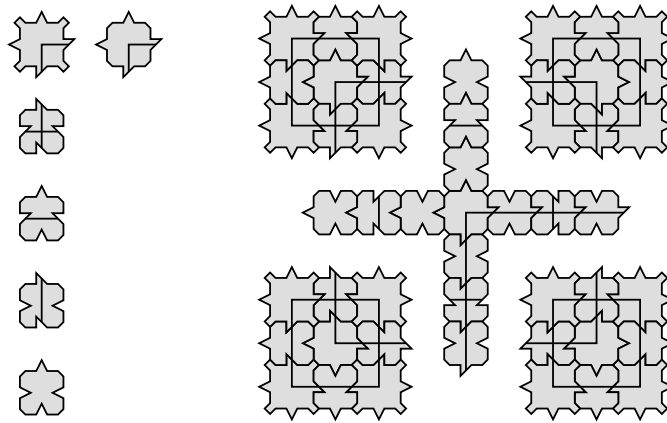


FIGURE 1 – Jeu de tuiles et structure hiérarchique pour le pavage de Robinson.

L'idée de robustesse correspond alors à l'étude, qu'elle soit qualitative ou quantitative, du comportement du pavage aléatoire lorsque la fréquence des erreurs tend vers 0 au sein de la grille. Dans ce contexte, on distingue deux approches, deux philosophies complémentaires qui s'alimentent : la *théorie de l'information* et la *physique statistique*.

En théorie de l'information, à cheval sur l'informatique, le pavage représente un canal de communication, ou un modèle de calcul. Le pavage de Robinson, via sa structure hiérarchique, permet notamment d'encoder en son sein une *machine de Turing* [12] pour en faire un véritable modèle de calcul avec une structure géométrique. Ici les perturbations aléatoires sont considérées comme très localisées et indépendantes, modélisées par un *bruit de Bernoulli*, qui correspond assez bien à l'effet de *perturbations par une particule isolée* [13] sur un ordinateur.

Dans cette direction, un premier article [6] a déjà été soumis pour publication, et un second sera bientôt prépublié (une version préliminaire [5] a été présentée comme article exploratoire en conférence). Dans le premier article, nous étudions la stabilité dans la *topologie de Besicovitch*, qui quantifie globalement la fréquence des différences entre un pavage bruité (avec erreurs) et un pavage parfait (sans erreurs), pour en déduire des propriétés structurelles d'alignement notamment. Nous montrons en particulier qu'une variante du pavage de Robinson est robuste en ce sens lorsque la quantité de bruit tend vers 0, ce qui implique dans une certaine mesure que les calculs qu'on pourrait encoder dans la structure sont eux aussi persistants malgré les erreurs. Dans le second article, nous montrons que cette propriété de stabilité à grande échelle ne peut être déduite ou niée algorithmiquement à partir du jeu de tuiles utilisé (on parle de *problème indécidable* [10]) puis essayons de situer plus en détail ce problème dans la *hiérarchie arithmétique* [11].

En physique statistique, le pavage modélise ou représente par analogie un matériau, un *quasi-cristal* [14] par exemple dans le cas du pavage de Robinson. Ici, les perturbations aléatoires sont définies de façon plus globale et structurée, modélisées par des *mesures de Gibbs*. La quantité de bruit est alors fonction de la *température du système*, qu'on va chercher à faire tendre vers le zéro absolu.

Dans cette direction, mon encadrant et moi-même avons un projet d'article en cours de rédaction avec Siamak Taati, qui était invité à l'IMT en 2021. Notre résultat principal consiste à utiliser des machines de Turing encodées dans le pavage de Robinson pour obtenir des pavages aléatoires au comportement chaotique lorsque la température tend vers 0, de sorte qu'il n'y ait jamais unicité de la mesure limite. Un résultat similaire était déjà démontré par Chazottes, d'abord en collaboration avec Hochman [2] dans le cas tridimensionnel puis Shinoda [3] dans le cas bidimensionnel, en faisant osciller le système entre *deux* configurations limites incompatibles. La valeur ajoutée de notre approche consiste alors à caractériser les géométries possibles de l'ensemble des valeurs d'adhérence du système chaotique : à isométrie affine près, ce sont les ensembles connexes et Π_2 -calculables.

2 Projet de Mobilité

Anthony Quas, professeur à l'université de Victoria au Canada, travaille entre-autres sur des questions de dynamique symbolique et de théorie ergodique. Dans un article publié en 2021 [8], il a exhibé un potentiel continu (à interactions non locales cependant), qu'on pourrait associer à un sous-shift énumérable unidimensionnel, pour lequel on contrôle très précisément la suite de températures inverses (β_n) auxquelles ont lieu des *transitions de phase* pour les mesures de Gibbs du système. Dans ce contexte, une transition de phase désigne un point β pour lequel il n'y a pas unicité de la mesure de Gibbs $\mu_\beta \in \mathcal{G}_\beta$, et où $\mathcal{G}_\beta = \{t\mu_{\beta^+} + (1-t)\mu_{\beta^-}, t \in [0, 1]\}$ est l'enveloppe convexe des limites à gauche μ_{β^-} et à droite μ_{β^+} , distinctes et toutes deux uniquement définies.

Parmi les outils mis en œuvre dans mon travail avec Siamak Taati, on retrouve notamment l'idée de simuler un sous-shift énumérable unidimensionnel (sur \mathbb{Z}) au sein d'un sous-shift de type fini bidimensionnel (sur \mathbb{Z}^2), en utilisant les machines de Turing encodées géométriquement dans le pavage de Robinson pour énumérer les motifs interdits unidimensionnels et en contrôler

l'absence. De telles simulations ont d'abord été réalisées par Hochman [7] en trois dimensions, puis par Aubrun et Sablik [1] en parallèle de Durand, Romashchenko et Shen [4] dans le cas bidimensionnel.

L'idée du projet serait donc de rencontrer Anthony Quas pour pouvoir discuter plus en détail de la jonction de ces deux idées, pour peut-être à terme produire ensemble un résultat de contrôle sur les transitions de phase pour un potentiel local (donc continu) associé à un sous-shift de type fini bidimensionnel. En une phrase, la question au cœur du projet est donc :

Quel diagramme de phase peut-on avoir pour un SFT bidimensionnel ?

Plus généralement, l'intérêt du projet serait de rencontrer le vivier local de chercheurs, que je n'ai pas eu l'occasion de rencontrer en (visio)conférences au vu du décalage horaire conséquent, et peut-être d'y trouver certaines opportunités de post-docs pour la rentrée 2023-2024.

Références

- [1] Nathalie Aubrun and Mathieu Sablik, *Simulation of effective subshifts by two-dimensional subshifts of finite type*, Acta Applicandae Mathematicae. An International Survey Journal on Applying Mathematics and Mathematical Applications **126** (2013), 35–63. [MR3077943](#)
- [2] Jean-René Chazottes and Michael Hochman, *On the zero-temperature limit of Gibbs states*, Communications in Mathematical Physics **297** (2010), no. 1, 265–281. [MR2645753](#)
- [3] Jean-René Chazottes and Mao Shinoda, *On the absence of zero-temperature limit of equilibrium states for finite-range interactions on the lattice \mathbb{Z}^2* , 2020, [arXiv:2010.08998](#).
- [4] Bruno Durand, Andrei Romashchenko, and Alexander Shen, *Fixed-point tile sets and their applications*, Journal of Computer and System Sciences **78** (2012), no. 3, 731–764. [MR2900032](#)
- [5] Léo Gayral, *The Besicovitch-stability of noisy tilings is undecidable*, Automata 2021, July 2021, [hal-03233596](#).
- [6] Léo Gayral and Mathieu Sablik, *On the Besicovitch-stability of noisy random tilings*, 2021, [hal-03203745](#).
- [7] Michael Hochman, *On the dynamics and recursive properties of multidimensional symbolic systems*, Inventiones Mathematicae **176** (2009), no. 1, 131–167. [MR2485881](#)
- [8] Tamara Kucherenko, Anthony Quas, and Christian Wolf, *Multiple phase transitions on compact symbolic systems*, Advances in Mathematics **385** (2021), 107768. [MR4256134](#)
- [9] Raphael Robinson, *Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane*, Inventiones mathematicae **12** (1971), 177–209. [MR0297572](#)
- [10] Wikipédia, *Décidabilité*, [version du 13 janvier 2022]. [fr.wikipedia.org/wiki/Décidabilité](#).
- [11] Wikipédia, *Hierarchie arithmétique*, [version du 30 juillet 2021]. [fr.wikipedia.org/wiki/Hierarchie_arithmétique](#).
- [12] Wikipédia, *Machine de Turing*, [version du 30 janvier 2022]. [fr.wikipedia.org/wiki/Machine_de_Turing](#).
- [13] Wikipédia, *Perturbation par une particule isolée*, [version du 8 octobre 2021]. [fr.wikipedia.org/wiki/Perturbation_par_une_particule_isolée](#).
- [14] Wikipédia, *Quasi-cristal*, [version du 24 janvier 2022]. [fr.wikipedia.org/wiki/Quasi-cristal](#).

3 Répartition du Budget

Ce projet s'est monté autour de l'appel d'offres Mobilité Doctorale UT3 2022, qui propose un financement pour des séjours de 1 à 2 mois à partir de juin, durant l'année civile en cours, à hauteur de 700 € pour le trajet puis 500 € par mois sur place (en d'autres termes 125 € par semaine).

L'organisme d'accueil, l'Université de Victoria (UVic) peut apporter un soutien logistique (accès à un bureau sur place) et financier (1000 CAD, environ 700 €).

N'ayant bénéficié d'aucun financement mobilité d'une EUR par le passé, je peux également demander une **bourse de mobilité de l'EUR MINT**, qui garantit 1000 € de fonds, éventuellement plus sous réserve d'étude du projet.

Anthony Quas sera disponible jusqu'à mi-août, et j'ai d'autres obligations avant mi-juin, c'est donc sur un séjour de 6 semaines sur cette période que le budget sera estimé par la suite.

Le coût de l'aller-retour en avion Toulouse-Victoria est estimé entre 500 et 600 € à l'heure actuelle, et ne semble pas augmenter de façon conséquente sur des trajets plus proches dans le temps, donc l'enveloppe dédiée de **700 € de l'UT3** devrait couvrir ce trajet.

Logement	1400 € de loyer mensuel CC
Transports en commun	5 € par jour
Alimentation	10 € par repas

TABLE 1 – Coût de la vie à Victoria

Au vu du l'IJ de 167 € pour le Canada issu des **données officielles de la chancellerie de la direction générale des finances publiques**, cela donne une première estimation (trop) haute à 5000 € par mois, pour un montant forfaitaire maximal de 29 € par repas et 108 € par nuitée.

La plus grosse part du budget en question serait allouée au logement, mais compte tenu de la durée du séjour supérieure à un mois, il est possible de diminuer ce facteur de dépense en louant un appartement sur airbnb pour toute la durée plutôt qu'une chambre d'hôtel onéreuse. De même, sur l'échelle du séjour, nombre de repas modestes n'atteindront pas le montant maximal forfaitaire et il semble assez raisonnable de tirer le prix moyen vers le bas.

En prenant en compte le coût de la vie estimé en Table 1, cela ferait donc une enveloppe hebdomadaire d'environ 525 €, donc au total **3150 € pour une mission de 6 semaines**.

La répartition suivante du budget est proposée :

- UT3 : 750 €,
- UVic : 700 €,
- MINT : 1700 €.

Sous réserve d'acceptation du projet par l'UT3, en incluant les 1000 € garantis par MINT et les 700 € de l'UVic, le budget minimal nécessaire à la viabilité du projet (avion+logement) sera clairement atteint. Des sources complémentaires de financements (EDMITT et IMT) seront envisagées si besoin, selon le financement attribué par MINT.