Formulaire 1 — PARCOURS PROFESSIONNEL
Form 1 — PROFESSIONAL HISTORY

Nom / *Last name :* Gayral
Prénom / *First name :* Léo
Date de naissance / *Date of birth :*
Nationalité / *Nationality :* FR
Adresse postale / *Mailing address :*
N° de téléphone / *Phone number :*
Adresse électronique / *E-mail :* leo.gayral@math.cnrs.fr
Page Web personnelle / *Web page :* https://lgayral.pages.math.cnrs.fr/

Taille maximum de cette partie : 4pages
Maximum size for this part: 4 pages

1) Diplômes / *Diplomas*

Doctorat(s) / ***Ph.D(s)***

Intitulé / *Title*: Complexité et robustesse des pavages avec perturbations aléatoires
Date de soutenance / *Date of the defense of the Ph.D*: 23/06/2023
Établissement ayant délivré la thèse / *Granting institution*: Toulouse 3
Entité d'accueil (laboratoire, équipe, etc.) pour la préparation de la thèse / *Host entity (laboratory, team, etc.) for the preparation of the Ph.D*: Institut de mathématiques de Toulouse

2) Parcours Professionnel / *Professional history*

Situation professionnelle actuelle / ***Current professional status***

Statut et fonction[2] / *Position and Status*[2]: Agent contractuel (Postdoc)
Etablissement (ville - pays) / *Institution (city - country)*: Université Aix-Marseille (Marseille - France)
Date d'entrée en fonction / *Start*: 01/05/2024

Expériences professionnelles antérieures / ***Previous professional experiences***

Déroulez votre parcours professionnel antérieur à Inria, chez Inria, en détachement ou en mise à disposition.
Detail your professional history, before Inria, at Inria, on secondment or leave.

Date début *Start*	Date fin *End*	Etablissement *Institution*	Fonction et statut[2] *Position and status*[2]
01/09/2023	31/01/2024	Académie de Versailles	Professeur agrégé titulaire
01/02/2024	. . . .	. . . .	. . . Mise en disponibilité
01/05/2024	. . . .	. Université Aix-Marseille	CDD Postdoc

Nombre d'années d'exercice des métiers de la recherche après la thèse / *Number of years of professional research experience after the PhD:* 0

[1] Dans le cas où la thèse s'est déroulée au sein d'une équipe-projet Inria, veuillez indiquer le centre de recherche
[1] If the thesis took place within an Inria project-team, please indicate the research centre
[2] Indiquez avec précision chaque situation statutaire. Par exemple : pour une situation d'agent titulaire de la fonction publique, précisez le corps et le grade de rattachement, pour une situation de salarié(e) du secteur privé ou d'agent non titulaire d'un établissement public, précisez la nature du contrat salarial, etc.
[2] *For each position, indicate grade or rank. For example, for a tenured civil servant position, indicate the branch and rank, for a private sector position or non-tenured position in a public institution, indicate the nature of the work contract, etc.*

3) Interruptions de carrière/*Career breaks*

Sur l'année scolaire 2023–2024, un postdoc était initialement prévu avec Tom Meyerovitch en Israel, mais le génocide en cours nous a contraints à annuler le projet au dernier moment. Ceci explique les quelques mois de flottements sans poste cet hiver, jusqu'à la mise en place de mon contrat postdoctoral actuel, sans qu'on puisse pour autant réellement parler d'interruption de carrière, puisque j'ai notamment participé à des conférences dans l'intervalle.

4) Conséquences de votre handicap / *Consequences of your disability*

D'un point de vue professionnel, les principales conséquences de mon handicap se jouent au niveau des interactions sociales, et nuisent à ma bonne insertion. J'ai besoin d'un environnement de travail très calme pour me concentrer sur ma recherche, ce qui par nécessité m'isole de mes collègues l'essentiel du temps, et je souffre de troubles alimentaires qui m'empêchent de participer à l'essentiel des moments de sociabilisation plus informels lors des repas. A cela s'ajoutent également des troubles d'anxiété sociale. Une conséquence notable de ces difficultés à sociabiliser est le calvaire absolu qu'a été, pour moi, la recherche d'un contrat postdoctoral.
Mon handicap résulte également en une fatigabilité accrue, qui en thèse m'a contraint à négliger l'essentiel de mes activités extra-académiques (et notamment ma vie sociale) pour pouvoir me consacrer à mon travail et accomplir la charge de travail attendue sur la durée standard. Sur ce point, j'espère qu'une meilleure prise en compte de mes difficultés me permettra de poursuivre mes travaux à un rythme plus tenable au long terme, avec un meilleur équilibre entre le cadre professionnel et ma vie privée.
Cette fatigabilité m'empêche notamment d'exercer des activités d'enseignement, trop stimulantes pour moi, à une charge horaire attendue d'un MCF. Mon service d'enseignement de 64h en thèse était déjà difficile à gérer pour moi en parallèle d'activités de recherche, et depuis je n'envisage sous aucun prétexte une charge de 192h. Sachant qu'en pratique les universités refusent désormais toute décharge horaire sur les activités d'enseignement aux MCF ayant une RQTH, cela me ferme l'accès à la majorité des postes académiques existants.

5) Encadrement d'étudiants et de jeunes chercheurs / *Supervision of students and early-stage researchers*

À mon échelle de doctorant, sur l'année scolaire 2021–2022, j'ai eu l'occasion d'encadrer deux stagiaires issus de la double licence mathématiques-informatique de l'université Toulouse III. Ce stage s'est bien passé pour Alice De Guibert et Eliot Revol, qui ont respectivement intégré l'ENSIMAG et l'INSA Toulouse à l'issue de leur licence. J'ai supervisé le stage d'un bout à l'autre, du choix du sujet jusqu'à l'évaluation du rapport et de la soutenance, avec des réunions plus ou moins hebdomadaires sur un semestre pour guider leur travail, et quelques coups de pouce de mon encadrant à l'occasion.
De par les attentes de la double licence, leur travail de stage était à cheval entre des considérations mathématiques plus théoriques et des aspects informatiques plus appliqués. Le sujet du stage était la simulation d'un pavage de Socolar aléatoire par méthode de Monte-Carlo. Côté mathématique, il s'agissait avant tout d'un travail de bibliographie, pour comprendre et prouver le fonctionnement de la méthode de Monte-Carlo utilisée dans le cadre de la simulation de mesures de Gibbs. Côté informatique, il s'agissait d'implémenter cette méthode pour simuler le pavage aléatoire, puis d'analyser les simulations pour conjecturer des propriétés de ce pavage aléatoire, notamment vis-à-vis de l'existence d'une transition de phase. Ils sont allés légèrement au-delà des attentes sur la partie pratique, en implémentant une interface graphique permettant de manipuler à la main et tuile par tuile les pavages.
Ce travail n'ayant donné lieu à aucune vraie publication, je laisse à titre indicatif et confidentiel leur rapport de soutenance accessible à l'adresse suivante.

6) Enseignement (si pertinent) / *Teaching (if relevant)*

Ayant effectué ma thèse dans un laboratoire de mathématiques, même si mon travail est très lié à l'informatique théorique, j'ai eu peu d'occasions au quotidien d'y interagir avec des considérations informatiques plus pratiques. J'ai essayé de légèrement compenser ceci par le biais de certaines de mes activités d'enseignement à l'université Toulouse III.
J'ai notablement dispensé 30h de TP de SQL et 28h de TP de structures de données en C, en L2 d'informatique. Pour le TP de structures de données, un soin particulier a été apporté à la gestion de la mémoire, pour que les structures de données implémentées soient efficacement créées et libérées après usage, en partant de structures élémentaires (type piles/files chainées), jusqu'à atteindre des structures plus complexes comme les arbres rouge-noir.
J'ai également dispensé 24h de TP d'introduction aux probabilités en L2 de mathématiques, dans une UE nouvellement créée. En l'absence de matériel antérieur à adapter, j'ai intégralement créé trois notebooks Jupyter qui avaient pour but d'illustrer les notions du CM, par exemple vis-à-vis de la convergence d'estimateurs tels que la moyenne empirique de tirages indépendants, ou la simulation de chaînes de Markov.

Enfin, je citerai également les 10h de colles (oraux blancs) pour le M2 de préparation à l'agrégation de mathématiques, pour souligner une autre activité qui n'était pas clé en main et m'a demandé un certain travail de préparation bibliographique pour trouver et choisir des exercices pertinents.

7) Responsabilités collectives / *Responsibilities*

RAS

8) Management (si pertinent) / *Management (if relevant)*

RAS

9) Encadrement de développements technologiques (logiciel, matériel, robotique) / *Supervision of technological development (software, hardware, robotics)*

RAS

10) Mobilité (si pertinent) / *Mobility (if relevant)*

Au cours de ma thèse, j'ai fait deux séjours d'un mois dans des laboratoires à l'étranger. L'un des deux, avec Anthony Quas à l'UVic (Victoria, Canada), nous a permis d'échanger sur notre travail, sans collaboration ultérieure. L'autre était avec Siamak Taati à l'AUB (Beyrouth, Liban), un collaborateur préalablement rencontré lors de sa visité à l'université Toulouse III, et nous a permis de longuement poursuivre nos échanges, qui ont depuis abouti en un article conséquent (ArXiv:2302.07326), actuellement en cours de publication.

11) Diffusion de l'information scientifique (si pertinent) / *Dissemination of scientific knowledge (if relevant)*

RAS

12) Visibilité (si pertinent) / *Visibility (if relevant)*

J'ai participé aux Journées de Combinatoire de Bordeaux en 2022, en tant qu'orateur invité, pour y parler de mon premier axe de recherche (résumé dans le Formulaire 2 et plus détaillé dans les Fiches 1 et 2 du Formulaire 3). Lors de ma visite à Siamak Taati au Liban en 2022, on m'a également invité à donner deux exposés au CAMS. J'étais aussi orateur invité à une conférence au CIRM, sur la dynamique symbolique multidimensionnelle de quasi-cristaux, où j'ai notamment parlé de mon second axe de recherche (détaillé dans la Fiche 3 du Formulaire 3).

13) Eléments divers / *Other relevant information*

RAS

Formulaire 2 — DESCRIPTION SYNTHÉTIQUE DE L'ACTIVITÉ ANTÉRIEURE
Form 2 — SUMMARY OF YOUR PAST ACTIVITY

I defended my PhD in June 2023, on the *Complexity and Robustness of Tilings with Random Perturbations*, tutored by Mathieu Sablik. For the current school year 2023–2024, I had an international postdoc planned with Tom Meyerovitch, at the Ben-Gurion University in Israel, but the genocide forced us to cancel plans weeks before the starting date, and I have been unable to work on my research since due to being both unemployed and homeless.
My work is part of an interdisciplinary effort, using mathematics (ergodic theory, random perturbations), theoretical computer science (computable analysis, complexity, arithmetical hierarchy) and their interface (combinatorics, symbolic dynamics), as well as some ideas associated to statisical physics (percolation theory, thermodynamic formalism, Gibbs measures, chaotic systems).
More precisely, I am insterested in studying the robustness of tilings (chosen at random, but not necessarily uniformly distributed) *to* random perturbations. The notions of robustness and of perturbations are both purposely loosely defined, and take different formal meanings depending on the context. The last key ingredient of my work, *complexity*, can be understood in various ways. First, informally, it refers to the complex aperiodic hierarchical structures embedded in most of the tilings I studied. Second, it can be here understood as the *computational* complexity, either of the sets of random tilings I studied or of the notion of stability as a decision problem.
Formally, a tiling is made of square tiles (from an alphabet $\mathcal{A}$) aligned on a grid (an integer lattice $\mathbb{Z}^d$), with "local rules" (forbidden patterns $\mathcal{F}$) that determine which tiles are allowed next to each other, like puzzle pieces. We denote $X_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ the corresponding set of admissible tilings, called a *Subshift of Finite Type* (SFT). One of the most known examples of the field is the Robinson tiling, with an aperiodic hierarchical structure where the lines on the tiles form squares that are embedded into bigger squares. In my work so far, I focused on two main directions, two kinds of random perturbations. On one hand, I used a Bernoulli noise (where each cell can violate the rules and be part of a forbidden pattern, independently with low probability) typical in information theory, and I focused on stability for the Besicovitch topology (that quantifies the global frequency of differences). On the other hand, I used the thermodynamic formalism to study systems of Gibbs measures, associated to SFTs, and the chaoticity of their limit behaviour.

1) Besicovitch Stability in the Arithmetical Hierarchy

In this context, we consider translational-invariant random tilings where each cell has a probability ε of independently violating the local rules, and we denote $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}}(\varepsilon)$ the space of such perturbed measures. To compare two random tilings, we use the Besicovitch distance d_B, which quantifies the frequency of differences between configurations. A system is (resp. linearly, polynomially) *stable* if the induced distance between ε-noisy measures and non-noisy ones goes to 0 as $\varepsilon \to 0$ (resp. at speed $O(\varepsilon)$, or $O(\varepsilon^r)$ for some rate $0 < r \leq 1$).
My first mathematical results about stability were a proof of conjugacy-invariance, a full characterisation of one-dimensional stable systems (equivalent to the SFT being mixing). More importantly, in two or more dimensions, I proved the (linear) stability of periodic structures, which was then transposed to a class of quasi-periodic tilings (without explicit bounds on the speed), including a variant of the Robinson tiling (which is polynomially stable). I also exhibited an unstable example also using the Robinson structure.
Then, using all these (un)stable examples as basic building blocks, I studied stability as a decision problem, with the set of forbidden patterns $\mathcal{F}$ as the input of the algorithm. I proved that stability is undecidable (which is expected for most questions about SFTs like the domino problem, *i.e.* whether $X_{\mathcal{F}} = \emptyset$), and between Π_2-hard and Π_4 in the arithmetical hierarchy of undecidable problems (for comparison, the domino problem is Π_1-complete, thus simpler).
The natural follow-up of this work would be to improve either bound on stability to establish a completeness result that precisely locates it in the hierarchy, as is the case for the domino problem.

2) Chaoticity of Ground States in Finite-Range Lattice Models

Here, we study a statistical physics model, with a potential φ that quantifies the interaction energy (*i.e.* the number of rules violated by the origin of the grid). We define $\mathcal{G}_\beta$ the set of measures that maximise $\mu \mapsto h(\mu) - \beta\mu(\varphi)$ at inverse temperature β, and $\mathcal{G}_\infty$ the limit accumulation set as the temperature goes to 0. In particular, measures of $\mathcal{G}_\infty$ have minimal energy, they are supported by $X_{\mathcal{F}}$. In this context, the questions are *how* the sets $\mathcal{G}_\beta$ converge to $\mathcal{G}_\infty$ and *what* is this limit set exactly.
Chaoticity is defined as the fact that no trajectory $\left(\mu_\beta\right)$ (with $\mu_\beta \in \mathcal{G}_\beta$) converges as $\beta \to \infty$. Our main novelty here is to introduce the notion of uniformity, the idea that *all* trajectories have the same accumulation set $\mathcal{G}_\infty$. Working with this constraint in mind, we proved that the complexity of $\mathcal{G}_\infty$ is at most Π_2 (in the context of computable analysis), and then established a completeness result by building a whole class of simulating tilesets that realise any connected Π_2-computable set as an accumulation set (up to a computable affine bijection).
The natural follow-up of this work would be to remove the uniformity constraint, in which case we have established a Π_3 upper bound on the complexity of $\mathcal{G}_\infty$, and to try to establish a completeness realisation result in this case.

Formulaire 3 — CONTRIBUTIONS MAJEURES
Form 3 — MAJOR CONTRIBUTIONS

Fiche 1 : On the Besicovitch-Stability of Noisy Random Tilings (2021)

1. Description de la contribution / *Description of the contribution*

Dans cet article, nous introduisons un cadre pour l'étude d'un sous-décalage de type fini (SFT) avec du bruit, permettant l'apparition d'une certaine quantité de configurations interdites. En utilisant la distance de Besicovitch, qui permet une comparaison globale des configurations, nous étudions ensuite la proximité des mesures sur les configurations bruitées par rapport au cas non bruité lorsque la quantité de bruit est égale à 0. Notre premier résultat principal est la classification complète de l'(in)stabilité dans le cas unidimensionnel. Notre deuxième résultat principal est une propriété de stabilité pour des bruits de Bernoulli pour les SFT périodiques en dimension supérieure, que nous étendons finalement à un exemple apériodique grâce à une variante du pavage de Robinson.

2. Contribution personnelle de la candidate ou du candidate / *Personal contribution of the applicant*

Le travail de recherche et de réflexion en amont est le fruit d'une collaboration équilibrée avec mon co-auteur Mathieu Sablik, mais j'ai pris en charge la majorité du travail de rédaction et de publication.

3. Originalité et difficulté / *Originality and difficulty*

Cet article représente la première moitié du travail effectué sur mon premier axe de recherche, et met en place tous les outils mathématiques (dynamique symbolique, arguments combinatoires sur le pavage de Robinson) qui ont dans un second temps permis de se concentrer sur des aspects plus informatiques (calculabilité) dans le papier suivant (détaillé en Fiche 2).
Des questions de stabilité d'un point de vue global, en termes de fréquence des différences, ont déjà été étudiées en particulier par Miękisz dans un cadre thermodynamique (avec une autre variante du pavage de Robinson) dans les années 90, et par Durand, Romashchenko et Shen avec un bruit indépendant localisé (celui majoritairement considéré dans ce travail) il y a une quinzaine d'années. La grosse nouveauté de notre approche est de pleinement utiliser la topologie de Besicovitch (elle-même présente dans la littérature depuis une cinquantaine d'années sous le nom de distance d'Ornstein notamment), et d'adopter un point de vue *quantitatif* sur la vitesse de convergence, plutôt que simplement *qualitatif* vis-à-vis du phénomène de convergence.
D'un point de vue technique, la principale difficulté a été de trouver une structure quasi-périodique stable (ce qui n'est a priori pas le cas du pavage de Robinson folklorique, dont on ne sait pas s'il est stable ou non), tout en étant simple à définir et à manipuler pour ultérieurement pouvoir y simuler des calculs.
Dans les questions ouvertes très directement adjacentes à ce travail mathématique, on peut naturellement se demander si des propriétés de stabilité ou d'instabilité intéressantes sont à trouver en changeant un des paramètres du problème (en étudiant d'autres structures apériodiques, comme le pavage de Kari-Culik, en utilisant d'autres bruits non localisés, à l'instar de Miękisz avec des mesures de Gibbs, en changeant la structure de la grille de $\mathbb{Z}^d$ à un autre groupe, comme le groupe de Baumslag-Solitar où des SFT apériodiques existent d'après Esnay et Moutot).

4. Validation et impact / *Validation and impact*

Publié dans Electronic Journal of Probability 28 (2023).

5. Diffusion / *Dissemination*

J'ai diffusé les résultats de ce travail sous forme d'exposés dans de nombreux séminaires, conférences et groupes de travail : *On the Besicovitch-Stability of some Noisy Subshifts of Finite Type* (Journées ALEA 2021, EJCIM 2021), *The Besicovitch-Stability of Noisy Tilings is Undecidable* (Automata 2021), *An Autumn Stroll Among Random Tilings* (Rentrée de l'ANR DIMERS en 2021), *The Stability of Noisy Tilings in the Arithmetical Hierarchy* (GTC 2021), *A Short Hike Through Symbolic Dynamics and the Random Noise Therein* (JCB 2022, Séminaire de probabilités de l'Institut Fourier, Séminaire CAMS (AUB, Beyrouth, Liban) et Séminaire de probabilités du PIMS (UBC, Vancouver, Canada) en 2022) et *From Noisy Tilings to Computable Analysis* (Séminaire CAMS (AUB, Liban)).

Fiche 2 : Arithmetical Hierarchy of the Besicovitch-Stability of Noisy Tilings (2022)

1. Description de la contribution / *Description of the contribution*

Le but de cet article est d'étudier la complexité algorithmique de la stabilité de Besicovitch des sous-décalages de type fini bruités, une notion étudiée dans un article précédent. Tout d'abord, nous exhibons un pavage apériodique instable, puis nous voyons comment il peut servir de bloc de construction pour implémenter plusieurs réductions de problèmes classiques indécidables sur des machines de Turing. Il s'ensuit que la question de la stabilité des sous-décalages de type fini est indécidable, et que la borne inférieure la plus forte que nous obtenons dans la hiérarchie arithmétique est Π_2-dure. Enfin, nous prouvons que ce problème de décision, qui nécessite de quantifier sur un ensemble indénombrable de mesures de probabilité, a une borne supérieure Π_4.

2. Contribution personnelle de la candidate ou du candidate / *Personal contribution of the applicant*

Le travail de recherche et de réflexion en amont est le fruit d'une collaboration équilibrée avec mon co-auteur Mathieu Sablik, mais j'ai pris en charge la majorité du travail de rédaction et de publication.

3. Originalité et difficulté / *Originality and difficulty*

Cet article représente la seconde moitié du travail effectué sur mon premier axe de recherche, et utilise le formalisme et les outils mathématiques mis en place dans le papier précédente (détaillé en Fiche 1) pour étudier cette notion de stabilité sous un jour plus informatique (calculabilité).
Les interactions entre les systèmes dynamiques et des questions de calculabilité ne sont pas une nouveauté, et datent pratiquement des premiers balbutiements de la dynamique symbolique. En effet, l'une des principales caractéristiques du pavage du Robinson était sa capacité à simuler des machines de Turing, établissant ainsi l'indécidabilité du problème domino, qui consiste à savoir si un jeu de tuiles donné peut paver le plan, en l'assimilant au problème de l'arrêt. Ces interactions ont été largement étudiées au cours de la dernière décennie (par exemple la caractérisation des ensembles limite génériques d'automates cellulaires, ou l'étude de problèmes de conjugaison et de factorisation des SFT), avec des preuves impliquant assez systématiquement l'encodage et la simulation de machines de Turing dans des structures hiérarchiques autosimilaires (et apériodiques), et ce travail s'inscrit assez naturellement dans cette lignée. L'originalité de notre approche est surtout à trouver dans la propriété mathématique considérée, dans cette approche quantitative de la stabilité en fréquence globale des différences, elle-même assez nouvelle.
D'un point de vue technique, le cheminement nécessaire pour aboutir à une borne inférieure et supérieure sur la complexité de la stabilité a été essentiellement indépendant, faisant appel à des outils et raisonnements assez distinct.
En ce qui concerne la borne inférieure (Π_2-dur), ce travail repose sur la simulation de machines de Turing dans des pavages de Robinson. Outre la variante du pavage de Robinson structurellement stable déjà étudiée dans l'article précédent, nous avons introduit une variante instable, basée sur un bit synchronisé entre macro-tuiles voisines, mais pouvant être facilement désynchronisé en présence d'erreurs. En conditionnant la présence de ce bit instable au sein de la structure à des phénomènes calculatoires vérifiés par les machines de Turing (simulées dans les macro-tuiles de Robinson), on a ainsi pu obtenir des réductions de problèmes indécidables classiques vers la question de la stabilité. Avant d'obtenir la borne Π_2-dure par réduction depuis le problème du support total (*est-ce que la machine termine sur toutes les entrées ?*), diverses réductions depuis le problème de l'arrêt ont été proposées car plus simples à appréhender, pour mettre en place séparément et un à un les différents arguments utilisés dans le cas Π_2-dur, et permettant d'obtenir des bornes inférieures Π_1-dure et Σ_1-dure.
En ce qui concerne la borne supérieure (Π_4), le cœur de la démarche a été de réécrire une formule mathématique décrivant la propriété de stabilité, pour pas-à-pas en remplacer chaque ensemble indénombrable par une caractérisation de cet ensemble à partir d'une base dénombrable dense. Le champ de l'analyse calculable étant assez confidentiel, il y a un vrai manque de conventions et d'outils canoniques, la plus grosse difficulté dans cette partie du travail a donc été bibliographique plus que technique, pour trouver quels résultats intermédiaires étaient déjà établis jusqu'à un certain point, et quand devoir repartir de zéro pour des résultats parfois élémentaires mais malgré tout inédits.
Assez naturellement, une suite de ce travail serait d'améliorer une des deux bornes pour obtenir un résultat de complétude sur la complexité de la stabilité.

4. Validation et impact / *Validation and impact*

Publié dans Theory of Computing Systems (2023).

5. Diffusion / *Dissemination*

J'ai diffusé les résultats de ce travail sous forme d'exposés dans plusieurs séminaires, conférences et groupes de travail : *The Besicovitch-Stability of Noisy Tilings is Undecidable* (Automata 2021), *The Stability of Noisy Tilings in the Arithmetical Hierarchy* (GTC 2021) et *From Noisy Tilings to Computable Analysis* (Séminaire CAMS (AUB, Liban)).

Fiche 3 : Characterisation of the Set of Ground States of Uniformly Chaotic Finite-Range Lattice Models (2023)

1. Description de la contribution / *Description of the contribution*

La dépendance chaotique en la température fait référence au phénomène de divergence des mesures de Gibbs lorsque la température approche d'une certaine valeur. Les modèles ayant un comportement chaotique à une température proche de zéro ont plusieurs états fondamentaux, dont aucun n'est stable. Dans cet article, nous étudions la classe des modèles uniformément chaotiques, *i.e.* ceux dans lesquels, lorsque la température descend à zéro, chaque choix de mesures de Gibbs s'accumule sur tout l'ensemble des états fondamentaux. Nous caractérisons les ensembles possibles d'états fondamentaux des modèles uniformément chaotiques à portée finie, à homéomorphisme calculable près.
Nous montrons notamment que l'ensemble des états fondamentaux de chaque modèle avec des interactions à portée finie et à valeurs rationnelles est compact et connexe, et appartient à la classe Π_2 de la hiérarchie arithmétique. Inversement, tout ensemble de mesures de probabilité Π_2-calculable, compact et connexe, peut être encodé (via une injection affine calculable) comme l'ensemble des états fondamentaux d'un modèle bidimensionnel uniformément chaotique, avec des interactions à portée finie et à valeurs rationnelles.

2. Contribution personnelle de la candidate ou du candidate / *Personal contribution of the applicant*

Le travail de recherche et de réflexion en amont est le fruit d'une collaboration équilibrée avec mes deux co-auteurs Mathieu Sablik et Siamak Taati, notamment via mes échanges avec Siamak lors de ma visite à l'*American University of Beirut*, mais j'ai pris en charge la majorité du travail de rédaction (à l'exception de la Section 4, principalement rédigée par Siamak, où j'ai plutôt joué un rôle éditorial pour harmoniser cette partie avec le reste du document).

3. Originalité et difficulté / *Originality and difficulty*

Le sujet des modèles de physique statistique chaotiques a été assez actif ces deux dernières décennies. Notamment, un modèle chaotique 3D basé sur un potentiel à interactions locales, induit par les motifs interdits d'un SFT, a été trouvé par Chazottes et Hochman il y a une quinzaine d'années. Ce résultat a été récemment transposé au cas 2D, en parallèle par Chazottes et Shinoda d'un côté, et par Barbieri, Bissacot, Dalle Vedove et Thieullen de l'autre. Ce résultat est optimal car, en 1D, des interactions locales induisent forcément un système stable. Dans ce contexte, la principale différence et originalité de notre approche consiste à décaler la question de l'existence du phénomène de chaoticité au contrôle de l'ensemble d'accumulation du système lorsque la température tend vers 0, via l'introduction de modèles *uniformes*.
Dans toutes ces approches, des machines de Turing simulées dans le pavage forcent différents comportements à plusieurs échelles, et l'échelle "typique" dans le cas thermodynamique dépendant de la température. Chazottes et Hochman ont obtenu leur résultat de chaoticité via un contrôle structurel sur certains intervalles de température, une approche adoptée par tous les résultats ultérieurs. Notre grosse nouveauté a été de soigneusement construire un pavage avec plusieurs propriétés structurelles, notamment un contrôle fin de son entropie, pour ne pas seulement contrôler le comportement du modèle thermodynamique sur *certains* intervalles, mais à *toutes* les températures assez faibles (permettant de conclure sur l'uniformité du modèle, avec un comportement stable ou chaotique selon l'ensemble d'accumulation induit par le pavage).
Un autre enjeu assez technique a été ensuite de précisément caractériser quels genres d'ensembles limites peuvent être réalisés. Le cas Π_2-calculable s'est assez naturellement imposé, notamment car intrinsèquement définissable comme un ensemble de valeurs d'adhérence d'une suite calculable (à rattacher à l'idée des valeurs d'adhérence du modèle thermodynamique), mais il a fallu précisément vérifier que les machines de Turing en question avaient le temps d'effectuer tous les calculs nécessaires dans un temps limité (par la taille des macro-tuiles finies où les calculs sont contenus) pour l'établir formellement. Ce résultat est optimal dans le cas uniforme, où l'ensemble d'accumulation a une complexité Π_2 au plus.
Une question ouverte assez ardue mais probablement très riche à étudier serait celle du cas général non-uniforme, où la borne supérieure sur la complexité de l'ensemble d'accumulation passe de Π_2 à Π_3, et où un résultat de réalisation optimale demanderait vraisemblablement la création de nouvelles structures simulantes.

4. Validation et impact / *Validation and impact*

Nous avions initialement soumis l'article à *Communications in Mathematical Physics* après sa mise à disposition sur arXiv, mais il y a été rejeté cet automne car "trop mathématique" pour leur ligne éditoriale. En conséquence, nous avons depuis soumis l'article à *Nonlinearity*.

5. Diffusion / *Dissemination*

J'ai diffusé ce travail sous forme d'exposés à plusieurs séminaires, conférences et groupes de travail : *Controlling the Chaos in Gibbs Measures* (SDA2 2022, Rencontre ANR IZES 2022), *Computational Complexity of Chaotic Gibbs Measures* (GTC 2022) and *Uniformly Chaotic Finite-Range Lattice Models* (Séminaire Rauzy et GdT Pytheas Fogg en 2023).

Formulaire 4 — PROGRAMME DE RECHERCHE
Form 4 — RESEARCH PROGRAM

I would like to apply for the following project-team: MOCQUA

Title of research program: Complexity and Robustness of Tilings with Random Perturbations

My research is part of an interdisciplinary effort, between the fields of mathematics (ergodic theory, random perturbations), theoretical computer science (computable analysis, complexity, the arithmetical hierarchy) and their interface (symbolic dynamics, combinatorics), as well as statistical physics (percolation theory, Gibbs measures, chaotic systems). More specifically, I propose to study properties of complexity and robustness/stability of tilings with local rules (formally known as Subshifts of Finite Type, SFTs) with random perturbations.
As such, this project would be a good fit for the MOCQUA team. The stated goal of the team is to "tackle challenges coming from the emergence of new or future computational models" such as those based on physical considerations, which is exactly what I did during my PhD, in particular in my last paper where I studied the computational complexity of the zero-temperature accumulation set of thermodynamic models (see Fiche 3 in Form 3).
I notably met some of the team members when I gave a talk there for GTC 2022. My most plausible collaborators here would be Mathieu Hoyrup (who broadly works on questions related to computable analysis for dynamical systems), Guilhem Gamard (who recently joined the team, and studied the aperiodic Kari-Culik tiling and automata networks in the past), Emmanuel Jeandel (who works on many undecidable properties involving subshifts, such as the word problem on groups, the conjugacy and factorisation of multidimensional subshifts or the complexity of the slopes of 2D and 3D subshifts in recent years, and studied aperiodic subshifts on groups and robust aperiodic tilesets in the past) and Nazim Fatès (who broadly works on questions related to robustness of probabilistic cellular automata to perturbations).

Themes of the Research Program

In the next (numbered) sections, I will briefly introduce some of the open questions I've been thinking about recently. All of them fit some of the main research themes of the MOCQUA team, which I will briefly contextualise in this section.
One of the main interests of the team is that of fault tolerance of large scale systems, as one of the challenges already important in current-day distributed computing infrastructures. This theme is kind of intrinsic to the idea of Besicovitch-stability, that quantifies the frequency of faults in the global structure of a perturbed system, and as such is a central motivation in studying Problems 1, 2, 3 and 4.
An object of particular significance in this context is cellular automata, which are not only used in computer science to reason about errors in large scale systems, but also used in many other sciences for various reasons. Formally, if the space of configurations of the automata is $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$, then its space-time diagrams can be seen as a kind of $(d+1)$-dimensional SFT, and as such the study of the robustness of cellular automata to various perturbations fits the framework I have been working with in my PhD. The idea of cellular automata as a denoising tool, a way to not only resist but also repair perturbations, is one of the ideas that may be discussed in Problem 3. A recent outgrowth of this model (one I am interested in working on in the future) is that of automata networks, which may be described as asynchronous cellular automata on finite graphs, and that have been notably studied by Gamard.
Another interest of the team is the idea of computations with infinite precision. This general idea can be achieved in various way, either with theoretical models that manipulate real numbers, or in more practical settings through computable numbers where one can produce arbitrarily good approximations if necessary. Both of these ideas are reflected in the tilings I mention in Problem 2.
A last point of interest I will mention here is that of the interactions between computer science and physics. In the case of computers simulating physics, the finite precision is one of the main barriers to accurately predict the long term behaviour of a system, which can be an intractable issue when studying chaotic models. In the case of physics simulating computers, robustness to perturbations comes into play again to evaluate the degree to which we can trust the result of computations in a practical setting. These dual aspects come full circle in Problem 5, in which I discuss matters of robustness to small perturbations of (the potentials used to define) statistical physics models, models that themselves perform computations highly sensitive to perturbations.

1) Improving Previous Undecidability Results

In Form 3, I mention two leftover questions related to my articles. In the case of Fiche 2, where I discuss the undecidability of stability, I have a Π_2-hard lower bound and a Π_4 upper bound, but a gap remains in order to find a completeness result. In the case of Fiche 3, where I discuss the complexity of the accumulation set for Gibbs measures, I have an optimal Π_2

realisation result in the uniform case, but an optimal realisation result remains to be found in the general case where the upper bound on the complexity is Π_3.
Given several members of the team (notably Jeandel and Hoyrup) have experience with undecidable properties and a computable analysis framework, discussing in detail my current results with them may create the right context to find what exactly may be improved in the current results.

2) Besicovitch-Stability for Other Tilesets

Setting the case of the canonical Robinson tiling aside (as it is yet unknown whether it is stable), I studied other examples that do not fit the current almost-periodic scheme at all, to try and obtain different Besicovitch-stability results. Obtaining stability results for some of those would allow for a deeper understanding of the implications and limitations of the notion of stability itself. In particular, both examples given here can be related to the idea of computations with infinite precision, either because of the encoded real numbers in the Kari-Culik case or because of the arbitrarily long computation time stabilised in the case of robust tilesets.

1. Stability for the Kari-Culik Tiling

One such example was the Kari-Culik tiling. This two-dimensional tileset enforces an aperiodic structure, that encodes a real number on each line, and simulates the transitions $x \mapsto f(x)$ of a continuous system from one line to the next, but Gamard proved that it has positive entropy (thus no self-similar structure). Similar computable systems f on real numbers were studied, in which the limit measure was not computable, but adding perturbations broke the asymptotic complexity of the set of invariant measures (such that $f_*(\mu) = \mu$, which corresponds to an invariance for vertical translations on tilings). From this point of view, the Kari-Culik would represent an interesting system to study, as the independent Bernoulli noise on tilings translates as an unusual kind of perturbation on real numbers. However, precisely because of the weird structure of the noise once translated to real numbers (roughly speaking independent on each digit), the current tools and schemes of proof available are unfit and a new approach is necessary. Given his past experience with this structure, Gamard may be interested in investigating together this question of stability for the Kari-Culik tiling.

2. Robust Tilesets and Infinite Precision Computations

Another fruitful topic may be that of robust tilesets, which were notably studied by Jeandel. Durand, Romashchenko and Shen proved that if a tileset is robust, then it must be Besicovitch-stable. What is interesting in their approach is that they seem to obtain a kind of stronger notion of stability for all the scales of the tiling. The stable variant of the Robinson tileset I studied is *not* robust, hence I got interested in whether one could encode information in the Robinson tiles to "robustify" it.
One of the main limitations of the notion of Besicovitch topology is that it does not account for the "aperiodic" low-density structure of a given tiling. Notably, with the stable variant of the Robinson tiling, for any fixed $\varepsilon > 0$, at a high-enough scale of N-macro-tiles, the surrounding grid is just made of finite local patches independent from each other (it forms a subcritical percolation). In other words, the aperiodic structure is not preserved, and this would consequently affect phenomenons that require order at arbitrarily large scales, such as Mozes-like substitutive structures.
One way to get around this problem may be to use robust tilesets, precisely because of this seemingly stronger kind of structural stability at all scales they exhibit. In Chapter 6.2 of my PhD thesis, I sketch the construction of a robust variant of the Robinson tiling, and it would thus be interesting to follow-through with this idea and implement Besicovitch-stable Mozes-like substitutions in this robust Robinson structure. I think this project may be of interest to Jeandel.
If such a result was established, it would in some sense represent a kind of a simulating structure with infinite precision in the presence of noise, in the sense that the structure would have a correction process (itself infinitely long to perform, but well-defined by increasingly large local corrections, each step being performed by a 2D cellular automaton) that can ultimately repair any scale of macro-tiles, thus any computation regardless of its runtime.

3) Quantifying the Stability of the Aperiodic Structure

Directly related to the previous conversation around robust tilesets lies the question of how to define a topology, stronger than the Besicovitch distance d_B, that accounts for the stability of the (aperiodic) low-density structure.
As stated, even though the enhanced Robinson tiling is stable, the "aperiodic structure" cannot be recovered. The main reason, informally, is that the aperiodic structure is a zero-density phenomenon caused by (almost) periodic stability at increasingly large scales.
Whenever a tiling has a kind of substitutive structure, for the aperiodic part of the structure to be preserved, we want to be able to iterate the substitution in a noisy environment, for example by saying that if part of the window to substitute is perturbed at a given scale, in such a way that the substitution cannot be uniquely deduced anymore, then the whole window must be perturbed at the next one.

In some sense, robustness seems to address this issue, in that it forbids a local modification of the low-density aperiodic structure in the middle of the large area that behaves periodically. Thence, non-admissible patterns can be iteratively locally repaired in increasingly large obscured areas (the islands of errors). Of course, at the limit, the induced invariant map $f : X_{\widetilde{\mathcal{F}}} \to X_{\mathcal{F}}$ (from perturbed tilings to non-perturbed ones) is not a cellular automaton, but it still describes a measurable correction process. Hence, we might define the divergence from *global agreement* as:

$$D_A(\nu\|\mu) = \inf_{f_*(\nu)=\mu} \int d_H(\omega, f(\omega))\, \mathrm{d}\nu(\omega),$$

by analogy with the Kullback–Leibler divergence. In particular, $D_A = \infty$ when no such function f exists. Naturally, we have $D_A(\nu\|\mu) \geq d_B(\nu, \mu)$, and it even satisfies the triangle inequality, but D_A is not symmetrical so it is not a distance. What's more, $f_*(\nu) = \mu$ imposes $h(\mu) \leq h(\nu)$, so f must really be thought as a kind of denoiser, and $D_A(\nu\|\mu) = \infty$ whenever $h(\mu) > h(\nu)$. Consequently, an SFT is stable with global agreement when:

$$D_A\left(\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{F}}(\varepsilon)\middle\|\mathcal{M}_\sigma(X_{\mathcal{F}})\right) := \sup_{\nu\in\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{F}}(\varepsilon)} \inf_{\mu\in\mathcal{M}_\sigma(X_{\mathcal{F}})} D_A(\nu\|\mu) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Note that stability with global agreement implies Besicovitch-stability.

It follows from this definition that the correction process used by Durand, Romashchenko and Shen gives stability for robust tilesets. In comparison, the proof of Besicovitch-stability I used in my first paper still gives global agreement stability in the periodic case, but breaks in the aperiodic case where an outside source of randomness, of entropy, is necessary to formally conclude.

Thus, the global agreement divergence D_A seems like a good candidate to measure and quantify the stability of the aperiodic structure in a perturbed setting, with the idea of denoising baked into its definition. Even tighter restrictions may also be placed upon the denoiser f, such as being a cellular automaton, or a computable function. Other similar local reconstruction arguments using iterated cellular automata have been studied in recent years by Fatès in particular, hence I think this project may be of interest to him.

4) Moving Onto Other Groups

Another direction of investigation, instead of changing the kind of SFTs we study or the topology of stability, may be to change the underlying group structure G of the full-shift space $\Omega_{\mathcal{A}} := \mathcal{A}^G$.

In order to obtain interesting stability results similar to those on $\mathbb{Z}^d$, we would need a group G for which there are known almost-periodic hierarchical SFTs. This question was notably studied by Jeandel. One such case may be that of the Baumslag-Solitar groups $BS(m,n) = \langle a, b | ab^m = b^n a\rangle$. Whenever $|m|, |n| \geq 2$ and $|n| \neq |m|$, or when $m = n \geq 2$, the group is not amenable so the Besicovitch distance is not really well-defined. This notably leaves out one case, that of $BS(1,n)$ (which is solvable thus amenable), where we have the existence of strongly aperiodic SFTs).

The subject of Bernoulli percolation on general amenable groups seems quite interesting, and would certainly warrants further discussion with specialists. In particular, I have not encountered discussions around the Bernoulli percolation on Baumslag-Solitar groups in the literature, probably because it is not usually known or studied in statistical physics.

Assuming we have percolation results on $BS(1,n)$ similar to those on $\mathbb{Z}^2 = BS(1,1)$, Jeandel might be interested in studying what this implies for the Besicovitch-stability of perturbed tilings on these structures.

5) Robustness of Chaoticity to Potential Perturbations

One last question I will mention here, without any specific collaborator in mind but that still fits well in the theme of predictability of physical systems, is that of the robustness of the limit behaviour of a model (chaoticity, stability) to arbitrarily small perturbations of the potential. The informal idea here is that our model of reality is necessarily an abstraction, an approximation (physical constants are only known up to a certain precision in theory and can only be used up to a certain precision in practice, Heisenberg's uncertainty principle prevents position and speed to be exactly defined simultaneously...), and so any model relying on a very specific set of parameters (such as a specifically curated potential) is unfit for predictions.

Chaoticity and stability are (mutually exclusive) yes/no discrete properties, and the space of potentials is a continuum, so these properties cannot behave continuously in the parameter φ. Consequently, we will say that a potential φ induces a *robust* chaotic (resp. stable) model if, for any potential ψ in a sufficiently small neighbourhood of φ, ψ induces a chaotic (resp. stable) model. Using the finite-range potentials I built in my third article, I exhibited in Chapter 6.5 of my PhD a sketch of construction of both stable and chaotic models that are *not* robust in this sense.

The general idea is that, with arbitrarily small perturbations of the stable (resp. chaotic) potential φ (induced by $\mathcal{F}$), we can add new forbidden patterns to the base tileset $X_{\mathcal{F}}$ (with the right combinatorial properties) that enforce specific computations to obtain chaotic (resp. stable) neighbouring models. More broadly, we may perhaps even simulate U a non-deterministic universal Turing machine with a potential φ, in such a way that we can add supplementary local rules as a potential φ_M to force U to simulate any specific deterministic machine M. Thus, for any $\varepsilon > 0$, we obtain a potential $\varphi + \varepsilon\psi_M$ that forces the uniform asymptotic behaviour corresponding to M. In doing so, we may thus obtain arbitrarily small neighbourhoods of φ inside which, for any Π_2-computable accumulation set, there is a potential ψ that realises it uniformly.

This idea needs to be properly formalised all the way through, but it would imply that in all generality, in a physical setting, the limit set $\mathcal{G}_\infty$ cannot be predicted in a meaningful way, and I think this topic may be of interest to several team members.

Formulaire 5 — LISTE COMPLÈTE DES CONTRIBUTIONS[1]
Form 5 — COMPLETE LIST OF CONTRIBUTIONS[1]

1. Publications caractéristiques / *Representative publications*

Ayant jusqu'ici produit trois (pré)publications, ce sont de facto celles qui me rendent le plus fier. Ce faible nombre de publications s'explique notamment par le fait qu'il s'agit à chaque fois de publications longues (entre 30 et 50 pages), techniques, qui ont requis de nombreux mois à temps plein de travail minutieux, et en termes de réflexions préliminaires et vis-à-vis de la rédaction. Je les classe ici par ordre chronologique de prépublication, les deux premières formant un diptyque, tandis que la troisième est indépendante :

- On the Besicovitch-Stability of Noisy Random Tilings,
- Arithmetical Hierarchy of the Besicovitch-Stability of Noisy Tilings,
- Characterisation of the Set of Ground States of Uniformly Chaotic Finite-Range Lattice Models.

2. Politique de publication / *Publication policy*

Mon travail étant à l'interface entre les mathématiques et l'informatique théorique, la question de favoriser des publications en revues ou en conférences s'est posée. Les considérations mathématiques étant toujours présentes dans mes travaux, même dans les aspects plus informatiques, il m'a au final semblé assez nécessaire de prendre le temps de détailler les preuves en profondeur, ce qui explique le fait que j'aie privilégié les revues comme support de diffusion de mon travail.

Mon article exploratoire au workshop Automata est une version préliminaire de notre publication (avec mon encadrant) dans Theory of Computing Systems, qui reprend ses résultats pour les étendre conséquemment.

Les auteurs sont systématiquement classés par ordre alphabétique, sans considérations d'importance des contributions.

3. Publications

3.1 Revues internationales / *International journals*

Arithmetical Hierarchy of the Besicovitch-Stability of Noisy Tilings (aussi disponible sur ArXiv:2209.01949),
avec Mathieu Sablik. Theory of Computing Systems (2023). 32 pages.

On the Besicovitch-Stability of Noisy Random Tilings,
avec Mathieu Sablik. Electronic Journal of Probability 28 (2023). 38 pages.

3.2 Conférence internationales avec comité de lecture / *Reviewed international conferences*

3.3 Ateliers internationaux avec comité de lecture / *Reviewed international workshops*

The Besicovitch-Stability of Noisy Tilings is Undecidable.
Article exploratoire accepté à Automata 2021. 11 pages (et 3 pages en annexe).

3.4 Livres et chapitres de livre / *Books and book chapters*

3.5 Autres publications internationales (posters, articles courts) / *Other international publications (posters, short papers)*

3.6 Revues nationales / *National journals*

3.7 Conférence nationales avec comité de lecture / *Reviewed national conferences*

3.8 Ateliers nationaux avec comité de lecture / *Reviewed national workshops*

3.9 Rapports de recherche et articles soumis / *Research reports and publications under review*

Characterisation of the Set of Ground States of Uniformly Chaotic Finite-Range Lattice Models,
avec Mathieu Sablik et Siamak Taati. En attente de publication. 48 pages.

[1] Les publications et réalisations les plus significatives devront, dans la mesure du possible, être consultables sur la page web de la candidate ou du candidat.
Most relevant contributions (publications, software) should be, as much as possible, available for consultation via the web page of the applicant.

4. Développements technologiques : logiciel ou autre réalisation / ***Technology development : software or other realization***

RAS

5. Impact socio-économique et transfert / ***Socio-economic impact and transfer***

RAS