Algèbre commutative

Léo Gayral
basées sur le cours de Laurent Berger

2016/2017

14/09

1 Modules

Définition (Module sur un anneau A)
$(M, +, \bullet)$ vérifie :

- $(M, +)$ un groupe abélien
- $\bullet : A \times M \mapsto M$
- $(a+b)\bullet m = a\bullet m + b\bullet m$, $a\bullet(m+n) = a\bullet m + a\bullet n$, $(a\times b)\bullet m = a\bullet(b\bullet m)$ et $1 \bullet m = m$

Définition (Sous-A-module de M)
$(N, +)$ est un sous-groupe de M stable par $\bullet$

Remarque
A est un A-module dont les sous-modules sont les idéaux

Définition (Éléments de torsion du A-module M, A intègre)
$m \in M$ est un elt. de torsion si $\exists a \in A, a \neq 0, a \bullet m = 0$
M_{tors} est l'ensemble des éléments de torsion de M

Proposition
Si A intègre, alors M_{tors} un sous-A-module de M

Définition (Morphisme de A-modules)
$f : M \mapsto N$ vérifie $f(am + n) = a \bullet f(m) + f(n)$
$Hom_A(M, N) = \{f : M \mapsto N \text{ morphisme}\}$ est un A-module
$M^* = Hom_A(M, A)$ est le dual topologique, l'ensemble des formes linéaires de M
$\ker(f) = \{m \in M, f(m) = 0\} \subset M$
$\mathrm{im}(f) = \{f(m), m \in M\} \subset N$

Définition (Diagramme commutatif)
Un diagramme est un graphe orienté dont les sommets sont des A-modules et les arrêtes des morphismes.
Un diagramme est dit commutatif si pour tous les sommets M et N,
la composée des applications de M à N ne dépend pas du chemin emprunté.

Définition (Suite exacte)
Une suite est un diagramme de la forme $... \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to ....$
On dit que la suite est exacte en N lorsque $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$.
On dit que la suite est exacte si elle l'est en tous ses points (sauf les modules le plus au bord si elle est finie).

2 Quotients

Définition (Quotient de N par le sous-module M)
N/M le quotient de N par $n_1 \sim n_2 \Leftrightarrow n_2 - n_1 \in M$
N/M muni de $a\overline{n_1} + \overline{n_2} = \overline{an_1 + n_2}$ est un A-module
$0 \to M \to N \to N/M \to 0$ est une suite exacte

Théorème
$f : M \to N$ un morphisme : $\exists! \overline{f} : M/\ker(f) \to \mathrm{im}(f)$ un isomorphisme tel que $\overline{f}(\overline{m}) = f(m)$

Corollaire
Si $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q \to 0$ est exacte alors Q isomorphe à $N/f(M)$ via $\overline{g}$.

Théorème (Propriété universelle du quotient)
$f : N \to P$ un morphisme :
Si $M \subset \ker(f)$ alors f se factorise en $g : N/M \to P$ tel que $g(\overline{n}) = f(n)$

Définition (Conoyau de $f : M \to N$)
Soit $\mathrm{coker}(f) := N/\mathrm{im}(f)$.
Alors la suite $0 \to \ker(f) \to M \xrightarrow{f} N \to \mathrm{coker}(f) \to 0$ est exacte.

3 Modules noethériens

Définition (Module de type fini)
M un A-module de type fini : $\exists m_1...m_r \in M,\ M = (m_1...m_r) = \{\sum\limits_{i=1}^{r} a_i m_i, (a_i) \in A^r\}$

Définition (Module noethérien)
M un A-module noethérien ssi tous ses sous-modules sont de type fini

Remarque
A un anneau noethérien ssi A un A-module noethérien

Proposition
M noethérien ssi $\forall M_1 \subset M_2 \subset ...$, la suite est stationnaire

Lemme
Soit $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ exacte : M noethérien ssi L et N noethériens

Théorème
Soit A un anneau noethérien : tout A-module de type fini est noethérien

4 Modules libres de type fini

Définition
A un anneau, J un ensemble : $\bigoplus_{j \in J} A = \{(x_j) \in A^J \text{ presque nulle}\}$ est un A-module

Définition (A-module libre)
M vérifie $\exists J$, $\bigoplus_{j \in J} A$ isomorphe à M
De façon équivalente, M admet une base (au sens des espaces vectoriels)

Définition (A-module libre de type fini)
M isomorphe à A^r, admet une base finie $m_1 ... m_r$. r est le rang de A.

21/09

Proposition
Toutes les bases d'un A-module libre ont le même cardinal.

Définition (Matrices, déterminant)
Soit M (resp. N) un A-module libre de base $(m_i)_{1 \leq i \leq r}$ $((n_j)_{1 \leq j \leq s})$.
$f : M \to N$ A-linéaire, $f(m_i) = \sum f_{i,j} n_j$.
Dans les bases (m_i), (n_j) on a $\mathrm{Mat}(f) = (f_{i,j}) \in M_{r,s}(A)$.
Soit $P \in M_n(A)$:
${}^t\mathrm{com}(P) \times P = \det(P) I_n$
$P \in GL_n(A) \Leftrightarrow \det(P) \in A^\times$

Proposition
M un A-module libre de rang n, $f : M \to M$ un morphisme et $P = \mathrm{Mat}(f)$.
f sujective $\Leftrightarrow \det(P) \in A^\times$
f injective $\Leftrightarrow \det(P)$ n'est pas un diviseur de 0

Corollaire
f surjective $\Rightarrow$ f injective

Corollaire
$f : A^r \to A^s$ injective $\Rightarrow r \leq s$

Théorème (Cayley-Hamilton)
$P \in M_n(A)$ de polynôme caractéristique $\Pi_P(X) = \det(XI_n - P) \in A[X]$. Alors $\Pi_P(P) = 0$.
Si $(m_1 ... m_n)$ engendre M, posons P la matrice de $f : M \to M$ dans cette famille. Alors $\Pi_P(f) = 0$.

Définition (Sous-module engendré par un idéal)
Soient M un A-module et I un idéal de A :
$IM := \{\sum\limits_{k=1}^{r} i_k m_k,\ r \in \mathbb{N},\ (i_k) \in I^r,\ (m_k) \in M^r\}$ définit un sous-module de M.
Soit $B \subset A$ quelconque et J l'idéal engendré par B. Avec la définition ci-dessus, $BM \subset M$ un sous-module et $BM = JM$.

Corollaire
M un A-module de type fini, I un idéal de A tel que $M \subset IM$.
Alors $\exists x \in A,\ x-1 = i \in I,\ x \times M = 0$ (autrement dit, $(m \mapsto i \times m) = Id_M$).

Définition (Anneau local)
A admet un unique idéal maximal I. On a alors $A = A^\times \sqcup I$.
Le corps A/I est alors appelé corps résiduel de A.

Corollaire (Lemme de Nakayama)
A un anneau local d'idéal maximal I, M un A-module de type fini :
Si $M \subset IM$, alors $\exists x \in (1+I) \subset A^\times, M = x^{-1} \times xM = 0$.

Proposition
A local et M de type fini : si $(\overline{m_i})_{i \leq n}$ engendre M/IM en tant que (A/I)-e.v., alors (m_i) engendre M.

5 Modules de type fini sur les anneaux principaux

Théorème
A un anneau principal, M un A-module libre de rang r.
Si N est un sous-module de M, alors N libre de rang $s \leq r$.

Remarque
On n'a pas nécessairement l'existence d'un supplémentaire.

28/09

Théorème
A principal, M un A-module libre de rang r, $N \subset M$ un sous-module de rang s.
$\exists (m_1 ... m_r)$ une base de M, $\exists (d_1 ... d_s) \in A\ \{0\}$ tels que :
$(d_1 m_1 ... d_s m_s)$ une base de N, $d_1 / ... / d_s$ (divise).

Remarque
$P \in M_{r,s}(A)$ se "diagonalise" en (d_i) comme ci-dessus (on parle de matrice sous forme normale) :
$\prod_{j_1}^{n} d_i$ est le pgcd des mineures d'ordre n de P.
Les d_i sont appelés facteurs invariants de P. Les idéaux (d_1) ... (d_s) sont déterminés par P donc par M et N.

Définition (Anneau à diviseurs élémentaires)
Dans un tel anneau A, toute matrice est équivalente à une matrice sous forme normale :
$\forall r, s \in \mathbb{N},\ \forall P \in M_{r,s}(A),\ \exists X \in GL_r(A),\ \exists Y \in GL_s(A),\ \exists d_1/.../d_s \in A,\ XPY = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_s \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Remarque
A principal $\Rightarrow$ A à diviseurs élémentaires.

Remarque
A à diviseurs élémentaires, I idéal de type fini $\Rightarrow$ I principal

Proposition
A principal, M un A-module de type fini :
$\exists n \in \mathbb{N},\ \exists d_1/.../d_m \in A \setminus (A^\times \sqcup \{0\})$ tels que $M \cong A^n \bigoplus_{i=1}^{m} (A/d_iA)$

Remarque
$(M/M_{tors})_{tors} = \{0\}$ donc $M/M_{tors} \cong A^n$ et $M_{tors} \cong \bigoplus_{i=1}^{m} (A/d_iA)$.
n ne dépend donc pas du choix d'une base : c'est le rang de M/M_{tors}.
Par la proposition suivante, n et les idéaux (d_i) ne dépendent que de M, pas du choix d'une base.

Corollaire
A principal : M de type fini, sans torsion $\Rightarrow$ M libre.

Proposition
A principal. Soient $d_1/.../d_m$ et $e_1/.../e_n \in A \setminus (A^\times \sqcup \{0\})$ tels que $\bigoplus_{i=1}^{m} (A/d_iA) \cong \bigoplus_{j=1}^{n} (A/e_jA)$.
Alors $m = n$ et $\forall 1 \leq i \leq n,\ (d_i) = (e_i)$.

05/10

Théorème
Soit G un groupe abélien (un $\mathbb{Z}$-module) de type fini : $\exists m, n \in \mathbb{N},\ \exists d_1/.../d_n \geq 2,\ G \cong \mathbb{Z}^n \bigoplus\limits_{i=1}^{m}(\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z})$

6 Application aux espaces vectoriels

Soient $V = K^d$ un espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(V)$.
V est un $K[X]$-module pour $P \bullet v = P(f)(v)$ de type fini, de torsion.
Soit (v_i) une K-base de V et $M = (m_{i,j})$ la matrice de f dans cette base.
L'application $\Pi : \bigoplus\limits_{i=1}^{d} K[X] \bullet \omega_i \to V$ telle que $\Pi(\omega_i) = v_i$ est en particulier un morphisme surjectif.

Proposition
Soit N le sous-module de $\bigoplus\limits_{i=1}^{d} K[X]\bullet\omega_i$ engendré par les $n_i = X\bullet\omega_i - \sum\limits_{j=1}^{d} m_{j,i}\omega_j$.
Alors la suite $0 \to N \xrightarrow{i} \bigoplus\limits_{i=1}^{d} K[X] \bullet \omega_i \xrightarrow{\Pi} V \to 0$ est exacte.

Théorème
En tant que $K[X]$-module, $V \cong \bigoplus\limits_{i=1}^{m}(K[X]/(d_i))$ où les (d_i) sont les facteurs invariants de $XI_d - M \in M_d(K[X])$.
$\prod\limits_{i=1}^{m} d_i$ est égal au polynôme caractéristique χ_f et d_n au polynôme minimal de f.
Dans une base adaptée de $K[X]/(d_i)$, $\mathrm{Mat}(f)$ est la matrice compagnon de d_i.

Corollaire
A et B semblables dans $M_d(K)$ $(A = PBP^{-1}) \Leftrightarrow XI_d - A$ et $XI_d - B$ équivalentes dans $M_d(K[X])$.

Corollaire (Décomposition de Jordan)
Si K est algébriquement clos, les facteurs premiers dans $K[X]$ sont les $(X-\lambda)$.
Dans ce cas, on a $V = \bigoplus\limits_{\lambda\in K} V(X-\lambda)$ avec $V(X-\lambda) = \bigoplus\limits_{i=1}^{m(\lambda)}(K/(X-\lambda)^{\alpha_i(\lambda)})$.
Sur chaque $(K/(X-\lambda)^{\alpha_i(\lambda)})$, dans la base $(X-\lambda)^{\alpha-1}...(X-\lambda), 1$, on peut mettre $\mathrm{Mat}(f)$ sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

7 Modules projectifs

Définition
Soient M,N_1 et N_2 des A-modules, $f : N_1 \to N_2$ un morphisme.
$f_* : h \mapsto f \circ h$ définit un morphisme de $\hom_A(M, N_1) \to \hom_A(M, N_2)$.
$f^* : h \mapsto h \circ f$ définit un morphisme de $\hom_A(N_2, M) \to \hom_A(N_1, M)$.

Proposition
Soient des modules A,B,C. On a les équivalences suivantes :
$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ est exacte $\Leftrightarrow \forall M,\ 0 \to \hom(M, A) \xrightarrow{f_*} \hom(M, B) \xrightarrow{g_*} \hom(M, C)$ exacte
$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ est exacte $\Leftrightarrow \forall M,\ 0 \to \hom(C, M) \xrightarrow{g^*} \hom(B, M) \xrightarrow{f^*} \hom(A, M)$ exacte

Définition (Modules projectifs)
P un A-module vérifie : $\forall f : M \to Q$ surjectif, $f_* : \hom(M, P) \to \hom(M, Q)$ surjectif.

Définition (Suite scindée)
Soit $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ exacte.
La suite est scindée si $\exists r : P \to N$ un morphisme tel que $g \circ r = Id_P$.
De façon équivalente, s'il existe $P' \subset N$ un sous-module, $N = P' \oplus f(M)$.

Théorème
Soit P un A-module. De façon équivalente, on a :
- P projectif.
- Toute suite exacte $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ est scindée.
- $\exists R$ un A-module tel que $P \oplus R$ un module libre.

Remarque
Si P est projectif de type fini, on peut trouver L libre de rang fini tel que $L = P \oplus R$.
Si de plus A est principal, alors P est libre de rang fini dans ce cas.

12/10

8 Produit tensoriel

Définition
M,N,P des A-modules. $f : M \times N \to P$ est bilinéaire si :
$\forall m \in M,\ n \mapsto f(m,n) \in \hom_A(N,P)$ et $\forall n \in N,\ m \mapsto f(m,n) \in \hom(M,P)$
On pose $\mathrm{Bil}_A(M \times N, P)$ l'ensemble de ces applications.
On définit pareillement les applications multilinéaires $\mathrm{Mult}(M_1 \times ... \times M_r, P)$.

Théorème
$\exists M \bigotimes N$ un A-module, $\exists t \in \mathrm{Bil}_A(M \times N, M \otimes N)$ tels que :
$\forall P$ un A-module, $f \in \hom(M \bigotimes N, P) \mapsto f \circ t \in \mathrm{Bil}(M \times N, P)$ est une bijection.
Ce produit tensoriel est l'application t associée sont uniques à isomorphisme près.

Remarque
Par la suite, on note $t(m,n) = m \otimes n$

Proposition
$M \bigotimes N$ est engendré par les éléments $m \otimes n$
Si $(m_i)_{i\in I}$ engendre M et $(n_j)_{j\in J}$ engendre N, alors $(m_i \otimes n_j)_{i\in I, j\in J}$ engendre $M \bigotimes N$.
Donc M et N de type fini $\Rightarrow M \bigotimes N$ de type fini.

Proposition
On a les résultats élémentaires suivants :
- Commutativité : $M \times N = N \times M$ donc $M \bigotimes N = N \bigotimes M$
- Distributivité : $\mathrm{Bil}((\bigoplus_{i\in I} M_i) \times N, P) = \prod_{i\in I} \mathrm{Bil}(M_i \times N, P)$ donc $(\bigoplus_{i\in I} M_i) \bigotimes N = \bigoplus_{i\in I} (M_i \bigotimes N)$
- Unité : $\mathrm{Bil}(A \times M, P) \cong \hom_A(M,P)$ donc $A \bigotimes M = M$
- $\mathrm{Bil}(M \times N, P) = \hom_A(M, \hom_A(N,P))$ donc $\hom_A(M \bigotimes N, P) = \hom_A(M, \hom_A(N,P))$
- Associativité : $\mathrm{Bil}((M \bigotimes N) \times Q, P) = \mathrm{Mult}(M \times N \times Q, P)$ donc $(M \bigotimes N) \bigotimes Q = M \bigotimes (N \bigotimes Q)$

Corollaire
M libre de base (m_i), N libre de base $(n_j) \Rightarrow M \bigotimes N$ libre de base $(m_i \otimes n_j)$

Corollaire
M et N projectifs $\Rightarrow M \bigotimes N$ projectif

Proposition
$M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M" \to 0$ exacte $\Leftrightarrow \forall N,\ M \bigotimes N \overset{f\otimes Id_N}{\longrightarrow} M' \bigotimes N \overset{g\otimes Id_N}{\longrightarrow} M" \bigotimes N \to 0$ exacte

Corollaire
Soient I un idéal de A, M un A-module : $M \bigotimes_A (A/I) \cong M/(IM)$ en tant que A-module.

Corollaire
I et J des idéaux : $(A/I) \bigotimes (A/J) \cong A/(I+J)$.
Si A est principal, $(A/mA) \bigotimes (A/nA) \cong A/(\gcd(m,n)A)$

Remarque
$f : M' \to M$ injectif $\not\Rightarrow f \otimes Id_N : M' \bigotimes N \to M \bigotimes N$ injectif

Définition (Module plat)
P vérifie $\forall M, M'$, $\forall f \in \hom_A(M', M)$, si f injective alors $f \otimes Id_P \in \hom_A(M' \bigotimes P, M \bigotimes P)$ injective.

Proposition
P libre $\Rightarrow P$ projectif $\Rightarrow P$ plat
En particulier, sur un corps K, tous les K-modules (espaces vectoriels) sont plats.

9 Homomorphismes et produit tensoriel

Définition (Produit tensoriel de morphismes)
$f \in \hom_A(M_1, M_2)$, $g \in \hom_A(N_1, N_2)$ des morphismes de A-modules.
$f \otimes g\ :\ m \otimes n\ \mapsto\ f(m) \otimes g(n)$ définit un morphisme de $\hom_A(M_1 \bigotimes N_1, M_2 \bigotimes N_2)$.

Définition
Soit $h : \hom_A(M_1, M_2) \bigotimes \hom_A(N_1, N_2) \to \hom_A(M_1 \bigotimes N_1, M_2 \bigotimes N_2)$:
h associe l'application $f \otimes g$ définie précédemment au produit tensoriel $f \otimes g$.

Proposition
Si M_1 et N_1 (ou bien M_1 et M_2) libres de rang fini, alors h est un isomorphisme.

Corollaire
Si les modules sont tous libres de rang fini : on fixe des bases des modules et les bases de $M_i \bigotimes N_i$ associées.

Si $\mathrm{Mat}(f) = A$ et $\mathrm{Mat}(g) = B$, alors $\mathrm{Mat}(f \otimes g) = A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}B & \dots & a_{m,n}B \end{pmatrix}$

Si de plus A et B carrées ($M_1 \cong M_2$ et $N_1 \cong N_2$) alors $\mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A) \times \mathrm{tr}(B)$

Corollaire
Avec $M_1 = M$, $N_2 = N$ et $M_2 = N_1 = A$:
Si M libre de type fini, alors $h(\sum_{i=1}^{r} f_i \times n_i) = (m \mapsto \sum_{i=1}^{r} f_i(m) \times n_i)$ est un isomorphisme de $M^* \bigotimes N \to \hom_A(M, N)$.

Définition (Rang d'un tenseur)
$u \in M \bigotimes N$ est tenseur simple si $\exists m \in M,\ n \in N,\ u = m \otimes n$.
Les tenseurs simples sont une famille génératrice de $M \bigotimes N$.
On définit le rang $\mathrm{rg}(u) := \min\{r \in \mathbb{N},\ \exists (m_i) \in M^r,\ (n_i) \in N^r,\ u = \sum_{i=1}^{r} m_i \otimes n_i\}$

Proposition
Soient V et W des K-ev de dimension finie. Soit $f \in \hom_A(V, W)$:
D'après le corollaire précédent, $\exists! u \in V^* \bigotimes W,\ g = h(u)$,
et le rang de l'application linéaire f coïncide avec le rang de u défini ci-dessus.

19/10

Corollaire
Si M_1 et N_1 (ou bien M_1 et M_2) projectifs de type fini, alors h est un isomorphisme.

En particulier, si M projectif de type fini, $M^* \otimes M \overset{h}{\cong} \hom_A(M, M)$.

Définition (Trace d'un endomorphisme sur un module projectif)
On la définit par $\mathrm{tr}(f \otimes m) = f(m) \in A$ linéaire, puis on se ramène aux endomorphismes via h.
Si M libre de rang fini, on retrouve la trace usuelle.

10 Extension des scalaires

Dans cette section : B un anneau muni de $f : A \to B$ un homéomorphisme, donc une A-algèbre.

Définition (Restriction des scalaires)
$(N, \bullet)$ un B-module $\Rightarrow$ $(N, \times)$ un A-module via $a \times n = f(a) \bullet n$.

Définition (Extension des scalaires)
M un A-module $\Rightarrow$ $B \bigotimes\limits_A M$ un B-module via $b \times (c \otimes m) = (bc) \otimes m$.

Proposition
M un A-module, N un B-module. $\hom_A(M, N) = \hom_B(B \bigotimes\limits_A M, N)$ en tant que A et B-modules via l'isomorphisme :
Si $h \in \hom_A(M, N)$ on définit $\tilde{h}(b \otimes m) = b \times h(m) \in N$.
Réciproquement, si $g \in \hom_B(B \bigotimes\limits_A M, N)$ on pose $\overline{g}(m) = g(1 \otimes m)$.

Proposition
P un A-module et M un B-module. $P \bigotimes\limits_A M = (P \bigotimes\limits_A B) \bigotimes\limits_B M$ en tant que A et B-modules via l'isomorphisme :
Si $p \otimes m \in P \bigotimes\limits_A M$ on définit $u(p \otimes m) = (p \otimes 1) \otimes m$.
Réciproquement, si $(p \otimes b) \otimes m \in (P \bigotimes\limits_A B) \bigotimes\limits_B M$ on pose $v((p \otimes b) \otimes m) = p \otimes (bm)$.

Corollaire
Soit P un A-module plat : $B \bigotimes\limits_A P$ est un B-module plat.

11 Produit tensoriel d'algèbres

M, N des A-algèbres : $M \bigotimes\limits_A N$ une A-algèbre via le produit interne $(m_1 \otimes n_1) \times (m_2 \otimes n_2) = (m_1 m_2) \otimes (n_1 n_2)$.

Proposition (Produit tensoriel de suites exactes)
Soient $K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0$ et $L \xrightarrow{j} N \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$ des suites exactes.
$(K \bigotimes N) \bigoplus (M \bigotimes L)$ est un A-module pour le produit $a(u \oplus v) = (au \oplus av)$.
On définit le morphisme $(i \otimes Id_N \oplus Id_M \otimes j)(k \otimes n \oplus m \otimes l) = i(k) \otimes n + m \otimes j(l) \in M \bigotimes N$.
Alors la suite $K \bigotimes N \bigoplus M \bigotimes L \xrightarrow{i \otimes Id_N \oplus Id_M \otimes j} M \bigotimes N \xrightarrow{f \otimes g} P \bigotimes Q \longrightarrow 0$ est exacte.

Proposition
Soient X et Y topologiques. Pour $f \otimes g \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R}) \bigotimes \mathcal{C}^0(Y, \mathbb{R})$, on pose $m(f \otimes g) = (x, y \mapsto f(x) \times g(y)) \in \mathcal{C}^0(X \times Y)$.
Alors m est injective. Si de plus X et Y compacts, alors l'image de m est dense dans $(\mathcal{C}^0(XY), ||.||_\infty)$.

12 Produit tensoriel de corps

Soit F un corps de caractéristique nulle.
$L = F(\alpha) = F[\alpha] = F[X]/\Pi_\alpha \times F[X]$ une extension finie, avec Π_α le polynôme minimal de α.
F de caractéristique nulle donc Π_α n'a que des racines simples.
K une autre extension finie de L : $K \bigotimes_F L = K \bigotimes_F (F[X]/\Pi_\alpha F[X]) = K[X]/(\Pi_\alpha K[X])$.
Dans $K[X]$, $\Pi_\alpha = P_1 \times ... \times P_r$ avec les P_i premiers entre eux, irréductibles et à racines simples dans $K[X]$.
Posons $K_i = K[X]/(P_i)$. Alors $F \bigotimes L = \prod_{i=1}^{r} K_i$.
Si de plus $K \backslash F$ une extension galoisienne et $L \subset K$: Π_α scindé dans $K[X]$.
Alors $K_i = K[X]/(X - \alpha_i) = K$ et donc $K \bigotimes_F L = K^{\deg(\Pi_\alpha)} = K^{[L:F]}$.
Si de plus $L \backslash F$ est aussi galoisienne, alors on a l'isomorphisme $x \otimes y \in K \bigotimes L \mapsto (x \times g(y))_{g \in \mathrm{Gal}(LK)} \in K^{[L:F]}$.
Ces résultats ne sont pas vrais en caractéristique non nulle.

13 Platitude

Proposition
P_1 et P_2 plats $\Rightarrow$ $P_1 \bigoplus P_2$ et $P_1 \bigotimes P_2$ le sont.

Remarque
Soit I un idéal de A : $I \xrightarrow{i} A$ est injective.
Donc pour P plat, $I \bigotimes_A P \xrightarrow{i \otimes Id_P} A \bigotimes_A P \cong P$ est injectif via $i \otimes Id(i \otimes p) = i \times p \in P$.
Or $i \otimes Id(I \bigotimes P) = IP$ donc $I \bigotimes_A P \cong IP$ en tant que A-modules.

Théorème
P un A-module plat $\Leftrightarrow \forall I \subset A$ idéal, $I \bigotimes P \xrightarrow{i \otimes Id_P} P$ injectif.

Proposition
Soit $a \in A$ qui ne divise pas 0 : $A \xrightarrow{\times a} A$ est injectif.
Si P plat, alors $p \mapsto ap$ est injective.

Corollaire
Si A est intègre et P plat, alors P est sans torsion.

26/10

Définition (Relation dans un A-module)
Équation $\sum_{i=1}^{r} f_i m_i = 0$ avec $f_i \in A,\ m_i \in M$.

Définition (Relation triviale)
$\sum_{i=1}^{r} f_i m_i = 0$ vérifie :
$\exists (a_{i,j})_{i \leq r, j \leq s} \in A, (x_j)_{j \leq s} \in M$ tels que $\forall i,\ m_i = \sum_j a_{i,j} x_j$ et $\forall j,\ \sum_i f_i a_{i,j} = 0$.

Proposition
M plat $\Leftrightarrow$ toute relation dans M est triviale.

14 Produits symétriques

Définition
$T^k(M) = \bigotimes_{i=1}^{k} M$
$\mathrm{Mult}(M^k, P) = \hom_A(T^k(M), P)$

Définition (Application symétrique)
$f \in \mathrm{Mult}(M^k, P)$ vérifie $\forall \sigma \in S_k,\ f(m_1 ... m_k) = f(m_{\sigma(1)} ... m_{\sigma(k)})$.
On note Mult $\mathrm{sym}(M^k, P)$ l'ensemble des applications k-linéaires symétriques.

Proposition
Soit S le sous-module de $\hom_A(T^k(M), P)$ engendré par les $(\otimes m_i - \otimes m_{\sigma(i)})_{(m_i) \in M^k, \sigma \in S_k}$.
On pose $\mathrm{Sym}^k(M) = T^k(M)/S$. Alors Mult $\mathrm{sym}(M^k, P) \cong \mathrm{Sym}^k(M)$.

Remarque
On note $m_1 \bullet ... \bullet m_k$ l'image de $m_1 \otimes ... \otimes m_k$ dans $\mathrm{Sym}^k(M)$.

Définition (Algèbre symétrique de M)
Si $v \in \mathrm{Sym}^k(M)$ et $w \in \mathrm{Sym}^j(M)$, on a naturellement un morphisme $v \bullet w \in \mathrm{Sym}^{k+j}(M)$.
Soit $\mathrm{Sym}(M) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Sym}^n(M)$.
Alors $(\mathrm{Sym}(M), +, \bullet)$ est un anneau, une M-algèbre.

Proposition
$M = (m_1 ... m_n)$ un A-module de type fini.
$\mathrm{Sym}^k(M)$ engendré par la famille $(m_1^{a_1} \bullet ... \bullet m_n^{a_n})_{a_i \in \mathbb{N}, \sum_i a_i = k}$ de cardinal $\binom{n+k-1}{k}$.

Théorème
$M = (m_1 ... m_n)$ libre de rang n fini.
Alors $\mathrm{Sym}^k(M)$ libre de rang $\binom{n+k-1}{k}$, avec la base ci-dessus.

Corollaire
Si M libre de rang n, alors $\mathrm{Sym}(M) \cong A[X_1 ... X_n]$.

15 Produits alternés

Définition (Application alternée)
$f \in \mathrm{Mult}(M^k, P)$ vérifie $\forall (m_1 ... m_k) \in M^k,\ \exists i \neq j, m_i = m_j \Rightarrow f(m_1 ... m_k) = 0$.
On note Mult $\mathrm{alt}(M^k, P)$ l'ensemble des applications k-linéaires alternées.

Proposition
Si f alternée, alors $\forall\sigma \in S_n,\ f(m_1...m_k) = \epsilon(\sigma) \times f(m_{\sigma(1)}...m_{\sigma(k)})$.

Proposition
Soit L le sous-module de $\hom_A(T^k(M), P)$ engendré par les $(\otimes m_i)_{(m_i)\in M^k,\ \exists i\neq j, m_i=m_j}$.
On pose $\Lambda^k(M) = T^k(M)/L$.
Alors Mult alt$(M^k, P) \cong \Lambda^k(M)$.
Si $\otimes m_i \in T^k$, on note $\wedge m_i$ sa projection dans Λ^k.

Lemme
$M = (m_1...m_n)$ de type fini.
Alors pour $k > n$, on a $\Lambda^k(M) = 0$.

Théorème
$M = (m_1...m_n)$ libre de rang n fini.
Alors $\Lambda^k(M)$ libre de rang $\binom{n}{k}$, de base $(\wedge m_{i_j})_{1\leq i_1<...<i_k\leq n}$.

Proposition
$f \in \mathcal{L}_A(M)$: on pose $T^k(f) : \otimes m_i \mapsto \otimes f(m_i) \in T^k(M)$.
$T^k(f)$ laisse L stable donc passe au quotient : $\Lambda^k(f) : \wedge m_i \mapsto \wedge f(m_i) \in \Lambda^k(M)$.

Proposition
M libre de rang n, de base $\mathcal{B} = (m_i)$.
Soit $f \in \mathcal{L}(M)$ et $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
Dans la base $(\wedge m_{i_j})_{i_1<...<i_k}$, les coefficient de la matrice de $\Lambda^k(f)$ sont les mineures $k \times k$ de P.
Le coefficient en $(i_1 < ... < i_k), (j_1 < ... < j_k)$ est la mineure de P associée aux lignes i et colonnes j.

Corollaire
$\Lambda^n(f)$ correspond à la multiplication par $\det(f)$.

9/11

16 Localisation

Proposition
Soient A un anneau local et M un A-module.
$M/IM \cong M \underset{A}{\otimes} A/I$ peut-être muni d'une structure de A/I-module.

Théorème
Soit A local : si M plat de type fini, alors M libre.

Corollaire
M projectif de type fini sur A local $\Rightarrow M$ libre.

17 Localisation d'anneaux quelconques

Définition (Localisé de A en S)
Soient A quelconque (non nécessairement intègre) et $S \subset A$ stable par produit (en particulier par produit vide : $1 \in S$).
$S^{-1}A := A \times S/\sim$ avec $(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2) \Leftrightarrow \exists t \in S,\ t(a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$.
On note alors $\frac{a}{s}$ la classe de (a, s).

Proposition
$(S^{-1}A, +, \times)$ est un anneau pour $\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1 s_2 + a_2 s_1}{s_1 s_2}$ et $\frac{a_1}{s_1} \times \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1 a_2}{s_1 s_2}$.
C'est une A-algèbre via $\phi_S(a) = \frac{a}{1}$.

Proposition
$\forall B$ anneau, $\forall f \in \mathcal{L}(A, B)$:
Si $\forall s \in S, f(s) \in B^\times$, alors $\exists! g \in \mathcal{L}(S^{-1}A, B),\ f = g \circ \phi_S$.

Remarque
Si A intègre, $\mathrm{Frac}(A) = (A \backslash \{0\})^{-1}A$ et ϕ_S injective.
Si $0 \in S$, $S^{-1}A = 0$.
ϕ_S non nécessairement injective.

Lemme
$\ker(\phi_S) = \{a \in A,\ \exists s \in S,\ as = 0\}$

Définition
Soit $f \in A$: on pose $S = \{f^n, n \geq 0\}$.
Alors $A_f = S^{-1}A = A[\frac{1}{f}] = A[X]/(Xf - 1)$.

Proposition
Soit P idéal premier de A : $S = A \backslash P$ stable par produit. On pose $A_P = S^{-1}A$.
Alors A_P est un anneau local et son idéal maximal est $\{\frac{a}{s},\ a \in P,\ s \in S\}$

18 Localisation de modules

Définition (Localisé de M en S)
Soient M un A-module et $S \subset A$ stable par produit.
$S^{-1}M := M \times S/\sim$ avec $(m_1, s_1) \sim (m_2, s_2) \Leftrightarrow \exists t \in S,\ t(m_1 s_2 - m_2 s_1) = 0$.
On note alors $\frac{m}{s}$ la classe de (m, s).

Proposition
$S^{-1}M$ est $S^{-1}A$-module.
$\phi_S : m \mapsto \frac{m}{1} \in \mathcal{L}(M, S^{-1}M)$ de noyau $\{m \in M,\ \exists s \in S,\ sm = 0\}$

Définition
Soit $u \in \mathcal{L}(M, N)$: on définit $S^{-1}u : \frac{m}{s} \in S^{-1}M \mapsto \frac{u(m)}{s} \in S^{-1}N$.

Proposition
Si $M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M''$ exacte, alors $S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$ exacte.

Corollaire
N et P deux sous-modules de M :
En tant que sous-modules de $S^{-1}M$, on a $S^{-1}(N \cap P) = S^{-1}N \cap S^{-1}P$ et $S^{-1}(N + P) = S^{-1}N + S^{-1}P$.

Théorème
$\Phi : \frac{a}{s} \otimes m \in S^{-1}A \bigotimes_A M \mapsto \frac{am}{s} \in S^{-1}M$ un isomorphisme.

Corollaire
$S^{-1}A$ est un A-module plat.

Proposition
$\Phi : \frac{m}{s} \otimes \frac{n}{t} \in S^{-1}M \bigotimes_A S^{-1}N \mapsto \frac{(m \otimes n)}{st} \in S^{-1}(M \bigotimes_A N)$ un isomorphisme.

19 Localisation d'idéaux

Définition (Extension des idéaux)
Soit I idéal de A : $S^{-1}I$ est un idéal de l'anneau $S^{-1}A$.
On pose $E : I \mapsto S^{-1}I$ l'extension des idéaux de A.

Définition
Soit J idéal de $S^{-1}A$: $\phi_S^{-1}(J) = \{a \in A,\ \frac{a}{1} \in J\}$ un idéal de A.
On pose $C : J \mapsto \phi_S^{-1}(J)$.

Proposition
Soit J idéal de $S^{-1}A$: $E \circ C(J) = J$.

Corollaire
Si A noethérien, alors $S^{-1}A$ noethérien.

Proposition
On a la bijection suivante : $\{P \subset A \text{ premier}, P \cap S = \emptyset\} \underset{C}{\overset{E}{\rightleftharpoons}} \{S^{-1}P \subset S^{-1}A \text{ premier}\}$

23/11

20 Localisation de morphismes

Proposition
Soit M un A-module. On a l'équivalence :
- $M = 0$
- $\forall P$ premier, $M_P = 0$
- $\forall m$ maximal, $M_m = 0$

Corollaire
Si de plus M de type fini, le troisième point équivaut à :
$\forall m$ maximal, $M \bigotimes\limits_A (A/m) = 0$

Corollaire
Soit $f \in \hom_A(M, N)$. De façon équivalente :
- f injective
- $\forall P$ premier, $f_P \in \hom_A(M_P, N_P)$ injective
- $\forall m$ maximal, f_m injective

Ce résultat est vrai si on remplace l'injection par une surjection/bijection.

Définition (Module de présentation finie)
M de type fini vérifie :
$\exists L' \subset L$ libres de rang fini, $\exists \pi : L \to M$ tels que $0 \to L' \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\pi} M \to 0$ exacte.

Remarque
Si A noethérien, M de type fini $\Rightarrow$ M de représentation finie.

Proposition
Soient M et N des A-modules. On a le morphisme :
$$\alpha : \begin{array}{ccc} S^{-1}(\hom_A(M,N)) & \to & \hom_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N) \\ \frac{f}{m} & \mapsto & \left(\frac{m}{t} \mapsto \frac{m}{st}\right) \end{array}$$
Si de plus M de présentation finie, α est in isomorphisme.

Remarque

Plus généralement, on a les mêmes résultats pour : α : $\begin{array}{ccc} B \bigotimes_A (\hom_A(M,N)) & \to & \hom_B(B \bigotimes_A M, B \\ b \otimes f & \mapsto & (c \otimes m \mapsto bc \otimes f \end{array}$

dans le cas où B est une A-algèbre.

Définition (Module localement libre)
M un A-module tel que $\forall P$ premier, M_P un A_P-module libre.

Théorème
Soit M de présentation finie : M projectif $\Leftrightarrow$ M localement libre.

Corollaire
M plat, de présentation finie $\Rightarrow$ M projectif.

Remarque
M de présentation finie $\Leftrightarrow$ $\exists f_1 ... f_m \in A$ une famille génératrice telle que $\forall 1 \leq i \leq m,\ M[\frac{1}{f_i}]$ est un $A[\frac{1}{f_i}]$-module libre.

21 Entiers

Définition (Éléments entiers)
Soient $A \subset B$ des anneaux.
$x \in B$ est entier sur $A \Leftrightarrow \exists P \in A[X]$ unitaire, $P(x) = 0$

Remarque
Ceci généralise la notion d'éléments algébriques sur un corps.

Proposition
De façon équivalente :
- $x \in B$ entier sur A
- $A[x] \subset B$ un A-module de type fini
- $\exists C \subset B$ un A-module de type fini tel que $x \in C$

Corollaire
$B_{ent} := \{x \in B,\ x \text{ entier sur } A\}$ est un sous-anneau de B.

Définition (Clôture intégrable)
B_{ent} est la clôture intégrable de A dans B.
Si $B_{ent} = A$, on dit que A est intégralement clos dans B.
Si $B_{ent} = B$, on dit que B est entier sur A.

Définition
Soit K une extension du corps $\mathbb{Q}$.
On note $\mathcal{O}_K$ la clôture intégrable de $\mathbb{Z}$ dans K.

22 30/11

Remarque
$\mathcal{O}_K$ n'est pas nécessairement factoriel.
Dans $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(i\sqrt{5})} = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$, $6 = 2 \times 3 = (1 - i\sqrt{5})(1 + i\sqrt{5})$ admet deux décompositions irréductible.

Proposition
A factoriel $\Rightarrow$ A intégralement clos.

Proposition
Soient $A \subset B$ des anneaux et $S \subset A$ une partie multiplicative :
B entier sur $A \Rightarrow S^{-1}B$ entier sur $S^{-1}A$.

23 Théorie des invariants

Définition (Invariants par une action de groupe)
Soient A une K-algèbre de type fini et G un groupe fini : une action de G sur A est un morphisme de groupes $G \to \hom_K(A)$.
On note alors $A^G = \{a \in A,\ \forall g \in G,\ g \cdot a = a\}$ la sous-K-algèbre des invariants par l'action de G.

Remarque
Soit $A = K[X_1 ... X_n]$: Les permutations S_n agissent sur A via $\sigma \cdot X_n = X_{\sigma(n)}$.
$A^{S_n} = K[S_1 ... S_n]$ où $S_i \in A$ est, au signe près, le facteur devant T^{n-i} dans $\prod\limits_{i=1}^{n} (T - X_i)$.
En particulier, $S_n = \prod X_i$, $S_1 = \sum X_i$ et $S_2 = \sum\limits_{i<j} X_i X_j$.

Théorème (Théorème de Hilbert)
Soient A une K-algèbre de type fini et G un groupe fini qui agit K-linéairement sur A.
Alors A^G une K-algèbre de type fini.

Lemme
A est entier sur A^G.

Lemme
$A \subset B$ des anneaux, B entier sur A et B une A-algèbre de type fini.
Alors B un A-module de type fini.

Proposition (Artin-Tate)
B une K-algèbre de type fini. $A \subset B$ un B-module de type fini et une K-algèbre.
Alors A une K-algèbre de type fini.

24 Normalisation de Noether

Définition
$a_1...a_n \in A$ sont algébriquement indépendants $\Leftrightarrow P \in K[X_1...X_n] \mapsto P(a_1...a_n) \in A$ est un morphisme injectif.

Théorème (Noether)
Soit $A = K[a_1...a_m]$ une K-algèbre de type fini :
$\exists x_1...x_n \in A,\ n \leq m$ algébriquement indépendants tels que A un $K[x_1...x_n]$-module de type fini.

Lemme
Soit K un corps infini :
$P \in K[T_1...T_k],\ P \neq 0 \Rightarrow \exists t_1...t_k \in K,\ P(t_1...t_k) \neq 0$

Lemme
Soient $A = K[a_1...a_m]$ une K-algèbre de type fini et $P \in K[X_1...X_m]$ non nul.
Si $P(a_1...a_m) = 0$, alors $\exists b_1...b_{m-1} \in A$ tels que $A = K[b_1...b_{m-1}, a_m]$ et a_m entier sur $K[b_1...b_{m-1}]$.

25 Théorème des zéros de Hilbert

Théorème
K un corps algébriquement clos.
Tout idéal maximal de $K[X_1...X_n]$ est de la forme $(X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$ avec $a_i \in K$.

Lemme
Soit B intègre et entier sur $A \subset B$: B un corps $\Leftrightarrow$ A un corps

Lemme
Soient K un corps et A une $K[X]$-algèbre de type fini :
A un corps $\Leftrightarrow$ A une extension finie du corps K.

Corollaire
Soit I idéal de $K[X_1...X_n]$. On a une correspondance entre :
- Les idéaux maximaux de $K[X_1...X_n]/I$
- Les idéaux $(X_1 - a_1 ... X_n - a_n)$ de $K[X_1...X_n]$ tels que $\forall P \in I,\ P(a_1...a_n) = 0$

Corollaire
Soient $P_1...P_m \in K[X_1...X_n]$. De façon équivalente :

— $\nexists a_1...a_n \in K,\ P_1(a_1...a_n) = ... = P_m(a_1...a_n) = 0$
— $\exists f_1...f_m \in K[X_1...X_n],\ \sum\limits_{i=1}^{m} f_i \times P_i = 1 \in K[X_1...X_n]$

Corollaire
Soient $P_1...P_m \in K[X_1...X_n]$ et $L \backslash K$ une extension quelconque.
Si $\exists b_1...b_n \in L,\ P_1(b_1...b_n) = ... = P_m(b_1...b_n) = 0$, alors $\exists a_1...a_n \in K,\ P_1(a_1...a_n) = ... = P_m(a_1...a_n) = 0$.

07/12

26 Ensembles algébriquement affines

Définition (Ensemble algébrique affine)
Soient K algébriquement clos et $S \subset K[X_1...X_n]$ quelconque.
$\bar{V}(S) := \{(a_i) \in K^n,\ \forall P \in S,\ P(a_1...a_n) = 0\}$ un ensemble algébrique affine.

Proposition
Soit I l'idéal engendré par S : $\bar{V}(S) = \bar{V}(I)$.

Définition
Réciproquement, soit $V \subset K^n$:
$\bar{I}(V) = \{P \in K[X_1...X_n],\ \forall (a_i) \in I,\ P(a_1...a_n) = 0\}$ un idéal.

Définition (Idéal radical)
I un idéal de A : $\sqrt{I} := \{f \in A,\ \exists n \in \mathbb{N}, f^n \in I\} \subset I$ un idéal.
Si $I = \sqrt{I}$, I est un idéal radical.

Proposition
Soit $V \subset K^n$: $\bar{I}(V)$ est radical.

Théorème
$\bar{I}$ et $\bar{V}$ définissent une bijection entre les idéaux radicaux de $K[X_1...X_n]$ et les ensembles algébriques affines de K^n.

27 Anneaux de Dedekind

Définition (Anneau de Dedekind)
A un anneau intègre tel que :

— A n'est pas un corps (A admet un idéal propre non nul)
— P idéal premier de $A \Rightarrow P$ maximal
— A intégralement clos
— A noethérien

Proposition
Soient A de Dedekind et $S \subset A$ stable par multiplication.
Alors $S^{-1}A$ est un anneau de Dedekind ou un corps.

Théorème
Soit A de Dedekind tel que $K = \mathrm{frac}(A)$ de caractéristique nulle.
Si $L \backslash K$ une extension finie, alors la clôture intégrale de A dans L, notée B, est un anneau de Dedekind.

Définition (Trace)
Si on pose $[L : K] = d$, alors on a exactement d isomorphismes $\sigma_i \in \hom_K(L)$.
On définit alors $\mathrm{tr} : x \in L \mapsto \sum\limits_{i=1}^{d} \sigma_i(x) \in K$ un morphisme K-linéaire.
Si $L = K[x]$, alors $-\mathrm{tr}(x)$ est le coefficient devant T^{d-1} dans $\Pi_x \in K[T]$ de degré d.
$\mathrm{tr}(1) = d \neq 0$ donc la K-forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \mathrm{tr}(xy)$ est non dégénérée ($\forall x \neq 0,\ \exists y = x^{-1},\ \mathrm{tr}(xy) = d \neq 0$).

Lemme
Sous les hypothèses du théorème précédent, si $x \in B$ alors $\mathrm{tr}(x) \in A$.

Remarque
Si $K \backslash \mathbb{Q}$ une extension finie : $\mathcal{O}_K$ un anneau de Dedekind, et un $\mathbb{Z}$-module de libre rang $[K : \mathbb{Q}]$.

14/12

28 Factorisation des idéaux

Théorème
Dans un anneau de Dedekind, tout idéal se décompose de façon unique en produit d'idéaux premiers.

Remarque
Dans le cas où A est un anneau principal (donc de Dedekind), le théorème de factorisation des idéaux équivaut à la décomposition en facteurs premiers usuelle.

Lemme
Soit A noethérien :
$\forall I$ idéal, $\exists Q = P1 \times ... \times P_k$ un produit d'idéaux premiers tel que $Q \subset I$.

Lemme
Soient A quelconque et $P,\ P_1...P_k$ premiers tels que $P_1 \times ... \times P_k \subset P$. Alors $\exists i,\ P_i \subset P$.

Lemme
Soient A de Dedekind et $K = \text{frac}(A)$. $\forall I \subsetneq A$ idéal propre, $\exists \lambda \in K \backslash A$ tel que $\lambda I \subset A$.

Définition (Idéal fractionnaire de A)
$I \subset K$ un A-module tel que $\exists x \in A,\ x \neq 0,\ xI \subset A$ (de façon équivalente, $I \subset x^{-1}A$).
En particulier, tout idéal de A est idéal fractionnaire.

Remarque
Soient (I, x) et (J, y) deux idéaux fractionnaires. Le A-module IJ (engendré par les $(i \times j)_{i \in I,\ j \in J}$) est un idéal fractionnaire, $(xy)IJ \subset A$.

Proposition
Soit I fractionnaire : $I^{-1} := \{x \in K, xI \subset A\}$ est un idéal fractionnaire.
On a de plus $II^{-1} = I^{-1}I = A$.

Corollaire
Soit A de Dedekind :
$\{I \subset K \text{ fractionnaire},\ I \neq 0\}$ forme un groupe pour le produit d'idéaux fractionnaires ci-dessus, de neutre A.

Remarque
Soient A un anneau de Dedekind et $I, X \subset A$ des idéaux.
$\exists Y$ un idéal, $I = XY \Leftrightarrow I \subset X$