Analyse fonctionnelle

Léo Gayral
basées sur le cours de Emmanuel Grenier et Denis Serre

2016/2017

15/09

1 Topologie générale

Définition (Topologie sur X)
$\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ l'ensemble des ouverts vérifie :
- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- $\mathcal{T}$ stable par intersection finie
- $\mathcal{T}$ stable par union quelconque

Définition (Base d'ouverts de $(X, \mathcal{T})$)
$\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ tel que tout ouvert $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$ s'exprime comme union d'éléments de $\mathcal{B}$

2 Espaces vectoriels topologiques

Définition ($\mathbb{R}$-espace vectoriel topologique $(E, \mathcal{T}, +)$)
$(E, +)$ un espace vectoriel tel que :
- $(x, y) \mapsto x + y$ et $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ continues selon $\mathcal{T}$
- E séparé ($x \neq y \Rightarrow$ existence de voisinages disjoints)

Remarque
On admet les points suivants :
- $\forall x \in E, \{x\}$ est fermé
- Par translation, $\mathcal{T}$ est déterminé par les voisinages de 0
- E séparé $\Leftrightarrow \{0\}$ fermé

Définition
Dans ce cours, $\mathcal{L}(E, F) = \{f : E \to F$ linéaire continue$\}$

$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est le dual de E
$|||T||| = \sup\limits_{x \in E, ||x||_E = 1} ||T(x)||_F$

3 Complétude implique continuité

Un Banach est un evn complet

Définition (Borne ponctuelle de $\Phi \subset \mathcal{L}(E, F)$)
$\forall x \in E, \sup\limits_{\phi \in \Phi} ||\phi(x)||_F < \infty$

Définition (Équicontinuité de $\Phi \subset \mathcal{L}(E, F)$)
$\sup\limits_{\phi \in \Phi} |||\phi||| < \infty$

Théorème (Banach-Steinhaus)
Soient E un Banach, F un evn, $\Phi \subset \mathcal{L}(E, F)$:
Φ est ponctuellement bornée $\Leftrightarrow$ Φ est équicontinue

Corollaire
Soit $(T_n) \in \mathcal{L}(E, F)^{\mathbb{N}}$:
Si $\forall x \in E, T_n(x) \underset{n \to \infty}{\to} T(x) \in F$,
Alors $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\forall x \in E, \forall x_n \to x, T_n(x_n) \to T(x)$.

Théorème (formulation faible de Banach-Steinhaus)
Remplaçons le Banach E par un evt complet muni d'une distance invariante par translation.
On a équivalence entre les propriétés :
- $\forall x \in E, \forall \mathcal{W}(0) \subset F, \exists t > 0, \forall \phi \in \Phi, \phi(x) \in t\mathcal{W}$
- $\forall \mathcal{W}(0) \subset F, \exists \mathcal{V}(0) \subset E, \forall \phi \in \Phi, \phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{W}$

Théorème (Application ouverte)
Soient E et F des Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si T est surjective, alors T est ouverte (l'image d'un ouvert est un ouvert).
Si de plus T bijective alors $T^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ est continue.

Théorème (Graphe fermé)
Soit $T : E \to F$ linéaire :
$T \in \mathcal{L}$ est continue $\Leftrightarrow$ son graphe $\Gamma = \{(x, T(x)), x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$

Remarque
Pour un evt E :
E métrisable $\Leftrightarrow$ E métrisable par une distance invariante $\Leftrightarrow$ 0 admet une base dénombrable de voisinages

Remarque (Suites de Cauchy topologiques)
(x_n) de Cauchy sur un evt vérifie :
$\forall \mathcal{V}(0) \in \mathcal{T}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, (x_m - x_n) \in \mathcal{V}(0)$

22/09

4 Evt localement convexes

Définition (Evt localement convexe)
E est un evtlc si 0 admet une base de voisinages convexes.

Remarque
Soit $p : E \to \mathbb{R}$ une semi-norme. Comme $p\left(x + \lambda(y - x)\right) \leq \lambda p(x) + (1 - \lambda)p(y)$, les boules pour p sont convexes.
Donc un evn est un evtlc.

Définition (Famille de semi-normes séparante)
$(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ des semi-normes telles que $\bigcap\limits_{\alpha \in A} p_\alpha^{-1}(0) = \{0\}$

Théorème (Equivalence entre convexité locale et famille de semi-normes séparante)
Soit un espace vectoriel E muni d'une famille de semi-normes séparante (p_α).
Soit $\mathcal{T} = \{\bigcup\limits_{i \in I} \bigcap\limits_{j \in J_i} f_{\alpha_j}^{-1}(U_{\alpha_j}),\ I$ quelconque, J_i fini, U_{α_j} ouvert$\}$ la plus petite topologie qui rend les (p_α) continues.
Alors $(E, \mathcal{T})$ est un evtlc.
Réciproquement, tout evtlc admet une telle famille de semi-normes séparante dont la topologie $\mathcal{T}$ ci-dessus correspond à celle de l'evt.

Théorème (Topologie induite par des applications)
Soit X un ensemble muni de la topologie qui rend continue une famille $(f_\alpha : X \to X_\alpha)_{\alpha \in A}$.
Alors :
$g \in \mathcal{C}^0(Z, X) \Leftrightarrow \forall \alpha \in A, f_\alpha \circ g \in \mathcal{C}^0(Z, X_\alpha)$
$x_n \overset{X}{\to} x \Leftrightarrow \forall \alpha, f_\alpha(x_n) \overset{X_\alpha}{\to} f\alpha(x)$

Corollaire (Limites dans un evtlc)
E un evtlc, (p_α) sa famille de semi-normes.
$x_n \overset{E}{\to} x \Leftrightarrow \forall \alpha, p_\alpha(x_n - x) \to 0$

Proposition
Soient $(E, p_\alpha), (F, q_\beta)$ des evtlc et $T : E \to F$ linéaire.
$T \in \mathcal{C}^0(E, F) \Leftrightarrow \forall \beta, \exists C > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \exists (\alpha_i) \in A^n, \forall x \in E, q_\beta(T(x)) \leq C \times \max\limits_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}(x)$

5 Espace de Fréchet

Définition (Espace de Fréchet)
E un evtlc qui possède une famille de semi-normes séparante dénombrable.

Théorème (Hahn-Banach)
E un ev, $p : E \to \mathbb{R}$ est sous-additive ($p(x+y) \leq p(x)+p(y)$) et positivement homogène ($\forall \lambda \geq 0, p(\lambda x) = \lambda p(x)$).
Soit f une forme linéaire sur F un E-sev telle que $\forall x \in F, f(x) \leq p(x)$. Alors f se prolonge en une forme linéaire $\tilde{f}$ sur E et $\tilde{f} \leq$ sur E tout entier.

Corollaire
Soit E un evtlc : son dual E^* sépare les points ($\forall x \neq y, \exists f \in E^*, f(x) \neq f(y)$).
Soit E un espace de Banach : $\forall x \in E, ||x||_E = \sup\limits_{f \in E^*, |||f|||=1} f(x)$

29/09

6 Aspects géométriques

Théorème (Théorème de Hahn-Banach géométrique)
Soient A et B des convexes non vides, disjoints, dans l'evtlc E.
Si A est ouvert, alors $\exists \phi \in E^* \setminus \{0\},\ \sup\limits_A \phi \leq \inf\limits_B \phi$.
Si A compact et B fermé, alors $\exists \phi \in E^* \setminus \{0\},\ \sup\limits_A \phi < \inf\limits_B \phi$.

Proposition
E un evtlc, F un E-sev : F dense dans $E \Leftrightarrow \forall \phi \in E^*, (\phi(F) = 0 \Rightarrow \phi = 0)$

7 Krein-Milman

Définition
Soit $K \subset E$ quelconque :
$S \subset K$ est extrémal dans K si $\forall x \in S,\ \forall y, z \in K,\ x \in]y; z[\Rightarrow y, z \in S$.
En particulier, $x \in K$ est un point extrémal lorsque $\{x\}$ extrémal.

Théorème (Théorème de Krein-Milman)
Soit K compact convexe dans un evtlc E. Alors $K = \overline{\mathrm{Conv}(\{x \in K \text{ point extrémal}\})}$.
(adhérence de l'enveloppe convexe des points extrémaux)

8 Dualité

Définition (Topologie faible)
Soit $(E, \mathcal{T})$ un evtlc : $f \in E^*$: $p_f(x) = |f(x)|$ définit une semi-norme sur E.
La famille séparante $(p_f)_{f \in E^*}$ définit une nouvelle structure d'evtlc sur E, notée $\sigma(E, E^*)$.
Les voisinages de 0 sont engendrés par les $\{x \in E, |f(x)| < \alpha\}$.
$\sigma(E, E^*) \subset \mathcal{T}$: la nouvelle topologie contient moins d'ouverts, elle ne rend que les semi-normes ci-dessus continues.
En particulier, si f continue pour la topologie faible sur E, alors f continue sur $(E, \mathcal{T})$.

Définition (Topologie préfaible, faible $*$)
Soit $(E, \mathcal{T})$ un evtlc : $x \in E$: $q_x(f) = |f(x)|$ définit une semi-norme sur E^*.
La famille séparante $(q_x)_{x \in E}$ définit une structure d'evtlc sur E^*, notée $\sigma(E^*, E)$.
Les voisinages de 0 sont engendrés par les $\{f \in E^*, |f(x)| < \alpha\}$.

Proposition
$(E, \mathcal{T})$ un evtlc et E^* son dual. On dispose des isométries linéaires canoniques suivantes :
$(E, \sigma(E, E^*))^* \cong (E, \mathcal{T})^*$
$(E^*, \sigma(E^*, E))^* \cong E$

06/10

Proposition
Soit E un evtlc, $\phi, \psi_1 ... \psi_n \in E^*$ des formes linéaires :
$\phi \in \mathrm{Vect}(\phi_i) \Leftrightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker(\psi_i) \subset \ker(\phi)$

9 Topologie faible

Proposition
Si (x_n) converge faiblement vers $x \in E$, alors (x_n) bornée et $||x|| \leq \underline{\lim}\, ||x_n||$

Remarque
$\dim(E) = \infty \Leftrightarrow \sigma(E, E^*) \subsetneq \mathcal{T}$

Théorème
E un Banach, $C \subset E$ convexe :
C (fortement) fermé dans $(E, \mathcal{T}) \Leftrightarrow C$ (faiblement) fermé dans $(E, \sigma(E, E^*))$

Corollaire (Lemme de Mazur)
Si (x_n) converge faiblement vers x, alors $x \in \overline{\mathrm{Conv}(\{x_n, n \in \mathbb{N}\})}$ (adhérence forte).

10 Topologie préfaible

Proposition
(ϕ_n) converge faiblement (sur tout $x \in E$) vers $\phi \in E^*$. Alors (ϕ_n) bornée et $|||\phi||| \leq \underline{\lim}\, |||\phi_n|||$

Théorème (Banach-Alaoglu)
La boule unité fermée $B_{E^*} = \{\phi \in E^*, |||\phi||| \leq 1\}$ est faiblement compacte.

Théorème
Soit E un Banach : E séparable (famille dénombrable dense) $\Leftrightarrow (B_{E^*}, \sigma(E^*, E))$ est métrisable.

11 Réflexivité

Remarque
$J_E : x \mapsto (\phi \mapsto \phi(x))$ une isométrie injective de $E \to E^{**}$.

Définition (Espace réflexif)
E un Banach réflexif si J_E surjective.

Remarque
E réflexif $\Rightarrow \sigma(E^{**}, E^*) = \sigma(E, E^*)$

Théorème
E réflexif $\Leftrightarrow B_E = \{x \in E, ||x|| \leq 1\}$ faiblement compacte

Proposition
Soit E un Banach (non nécessairement réflexif) : $B_{E^{**}} = \overline{J_E(B_E)}^{\sigma(E^{**}, E^*)}$ (adhérence préfaible dans E^{**})

Proposition
F un E-sev fermé : E réflexif $\Rightarrow F$ réflexif

Proposition
E un Banach réflexif : si (x_n) bornée alors elle admet une sous-suite faiblement convergente de limite $x_\infty \in \overline{\mathrm{Vect}(x_n)}$.

12 Uniforme convexité

Définition (Espace uniformément convexe)
E un Banach vérifie : $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in B_E,\ ||x - y|| > \epsilon \Rightarrow ||\frac{x+y}{2}|| < 1 - \delta$

Théorème (Théorème de Milman-Pettis)
E uniformément convexe $\Rightarrow$ E réflexif

13/10

13 Adjoint

Proposition
E et F des evtlc, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ continue. Alors $T^* : \phi \in F^* \mapsto (\phi \circ T) \in E^*$ continue pour les topologies préfaibles.
Si de plus E et F des Banach, alors $||T||_{\mathcal{L}(E,F)} = ||T^*||_{\mathcal{L}(F^*,E^*)}$.

14 Préliminaires aux distributions

Définition (Notations élémentaires)
Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^d$
$K \subset\subset \Omega$ signifie K compact de $\mathbb{R}^d$, $K \subset \Omega$
$\mathcal{D}(\Omega) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega),\ \text{supp}(f) \subset\subset \Omega\}$ les fonctions test.
$\mathcal{D}_K(\Omega) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega),\ \text{supp}(f) \subset K\}$
$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup\limits_{K\subset\subset\Omega} \mathcal{D}_K(\Omega)$
Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$: $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{d} \alpha_i$ et $D^\alpha \phi = \partial_1^{\alpha_1} ... \partial_d^{\alpha_d} \phi$.
$\mathcal{D}_K(\Omega)$ un espace de Fréchet pour $||\phi||_{N,K} = \sup\limits_{|\alpha|\leq N} (||D^\alpha \phi||_{\infty,K})$

Proposition
$\forall 0 < r < R,\ \exists \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d),\ \phi(\overline{B}(0,r)) = 1$ et $\text{supp}(\phi) \subset \overline{B}(0,R)$.

15 Partition de l'unité

Théorème (Partition de l'unité subordonnée à un recouvrement)
Soit Γ un recouvrement de Ω par des ouverts :
$\exists (\psi_n) \in \mathcal{D}(\Omega)^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \phi_n \geq 0,\ \exists \omega_n \in \Gamma,\ \text{supp}(\psi_n) \subset \omega_n$,
$\forall K \subset\subset \Omega,\ \{n \in \mathbb{N},\ \text{supp}(\psi_n) \cap K \neq \emptyset\}$ fini, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \psi_n = 1$ sur Ω.

Corollaire
$\forall K \subset\subset \Omega, \exists \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \phi(K) = \{1\}$ et $\phi(\Omega) = [0;1]$.

16 Distributions

Définition (Distribution sur $\mathcal{D}(\Omega)$)
$T \in \mathcal{D}'(\Omega) \iff T \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega), \mathbb{R}),\ \forall K \subset\subset \Omega,\ \exists N \in \mathbb{N}, \exists C > 0,\ \forall \phi \in \mathcal{D}_K(\Omega),\ |T(\phi)| \leq C \times ||\phi||_{N,K}$
On note N^k l'ordre minimal sur K et C_K la constante optimale pour K et N_K fixés.
On note ${}_{\mathcal{D}'} < T, \phi >_{\mathcal{D}} = T(\phi)$.

Définition (Ordre fini)
$T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est d'ordre fini N si $N = \sup\{N_K, K \subset\subset \Omega\} < \infty$ (ordre au sens large : $\sup \leq N < \infty$).

17 Convergence et topologie

On munit $\mathcal{D}'(\Omega)$ de la topologie d'evtlc pour les semi-normes $(T \mapsto |T(\phi)|)_{\phi \in \mathcal{D}(\Omega)}$.

Proposition
T_n converge vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega) \Leftrightarrow \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),\ T_n(\phi) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} T(\phi)$

Définition (Distribution positive)
$T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ positive $\Leftrightarrow$ Si $\phi \geq 0$ alors $T(\phi) \geq 0$

Théorème
Toute distribution positive est une mesure positive μ localement finie sur Ω :
$T(\phi) = \int\limits_{\Omega} \phi(x) d\mu(x)$ et $\forall K \subset\subset \Omega,\ 0 \leq \mu(K) < \infty$

18 Dérivation

Définition
Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$:
$< T_f, \phi > := \int\limits_{\Omega} f\phi$ définit une distribution $T_f \in \mathcal{D}'$ d'ordre 1.

Définition
Soient $T \in \mathcal{D}',\ \alpha \in \mathbb{N}^d$:
$< D^\alpha T, \phi > := < T, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \phi >$ définit une distribution $D^\alpha T \in \mathcal{D}'$.

Proposition
Si $f \in \mathcal{C}^N(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}$ et $|\alpha| \leq N$ alors $D^\alpha T_f = T_{D^\alpha f}$.

Remarque
Si $T_n \to T$ alors $\forall \alpha,\ D^\alpha T_n \to D^\alpha T$.

19 Formule des sauts

Soient $\Omega =]a_0; a_{n+1}[\subset \mathbb{R}$ et $a_0 < a_1 < ... < a_n < a_{n+1}$
Soient $\phi_i \in \mathcal{C}^1([a_i, a_{i+1}]),\ 1 \leq i < n,\ \phi_0 \in \mathcal{C}^1(]a_0, a_1])$ et $\phi_n \in \mathcal{C}^1([a_n, a_{n+1}[)$.
On définit $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ par $f = \phi_i$ sur $]a_i, a_{i+1}[$. f est dérivable sauf en un nombre fini de points, on note f' cette dérivée.
Alors $(T_f)' = T_{f'} + \sum\limits_{i=1}^{n} (\phi_i(a_i) - \phi_{i-1}(a_i)) \times \delta_{a_i}$.

20 Multiplication

Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'$.
$< fT, \phi > := < T, f\phi >$ définit une distribution $f \times T \in \mathcal{D}'$.

21 Support

Définition (Support de $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$)
Complémentaire de l'union des ouverts de Ω où T s'annule :
T s'annule sur $\omega \subset \mathbb{R}^d \Leftrightarrow \forall \phi \in \mathcal{D}(\omega) \subset \mathcal{D}(\Omega),\ T(\phi) = 0$.

Proposition
Si T s'annule sur une famille d'ouverts, T s'annule sur leur union.
Incidemment, supp(T) est le complémentaire du plus grand ouvert où T s'annule.
Si $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ s'annule sur un voisinage de supp(T), alors $< T, \phi >= 0$.

Remarque
Si ϕ s'annule seulement sur supp(T), on n'a pas nécessairement $< T, \phi >= 0$.

Définition
$\mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions à support compact.

Théorème
Soit $T \in \mathcal{E}'$: notons $K' = \text{supp}(T)$.
Alors $\exists C > 0,\ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),\ | < T, \phi > | \leq C||\phi||_{N,K'}$.
Il en découle $\forall K \subset\subset \Omega,\ \forall \phi \in \mathcal{D}_K(\Omega),\ | < T, \phi > | \leq C||\phi||_{N,K}$.

Théorème
Si supp$(T) \subset \{a\}$ alors $\exists N \in \mathbb{N},\ \exists (c_\alpha)_{|\alpha| \leq N},\ T = \sum\limits_{|\alpha| \leq N} c_\alpha \times D^\alpha(\delta_a)$.

20/10

22 Recollement

Définition
Soit $\omega \subset \Omega$ ouvert : T_1 et T_2 coïncident sur $\omega \Leftrightarrow \forall \phi \in \mathcal{D}'(\omega),\ < T_1, \phi >=< T_2, \phi >$.

Proposition
$(\omega_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de Ω.
Soient $T_i \in \mathcal{D}'(\omega_i)$ des distributions telles que $\forall i, j \in I$, T_i et T_j coïncident sur $\omega_i \cap \omega_j$.
Alors $\exists T \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \forall i \in I,\ T$ et T_i coïncident sur ω_i.

23 Convolution

Définition (Convolution fonction-distribution)
$T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d), f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.
$T * f(x) :=< T, f(x - \bullet) >$
Si $T = T_g$, alors $T * f(x) = g * f(x) = \int g(y)f(x-y)dy$.

Proposition
$T * f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $D^\alpha(T * f) = (D^\alpha T) * f = T * (D^\alpha f)$.
On a l'inclusion $\mathrm{supp}(T * f) \subset \mathrm{supp}(T) + \mathrm{supp}(f)$.
En particulier, si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, alors $T * f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Théorème (Densité des fonctions dans les distributions)
$\forall T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \exists (f_n) \in (\mathcal{C}^\infty)^\mathbb{N}, T_{f_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T$.

Définition (Convolution de distributions)
Soient $T \in \mathcal{D}', M \in \mathcal{E}'$ des distributions :
$< T * M, \phi >:=< T, < M, \phi(x + \bullet) > >$
Si $M = T_\psi$, alors $T * M = T_{T*\psi}$

Proposition
Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $M, N \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. On a les propriétés :
- $T * \delta_0 = T$
- $\mathrm{supp}(T * M) \subset \mathrm{supp}(T) + \mathrm{supp}(M)$
- $\mathrm{ordre}(T * M) \leq \mathrm{ordre}(T) + \mathrm{ordre}(M)$
- $D^\alpha(T * M) = (D^\alpha T) * M = T * (D^\alpha M)$
- $M * N = N * M \in \mathcal{E}'$
- $(T * M) * N = T * (M * N)$

24 Solution fondamentale

Théorème
Soit (c_α) des constantes et T une distribution telle que $\sum\limits_\alpha c_\alpha D^\alpha T = \delta_0$.
Alors $\forall f \in \mathcal{D}(\Omega),\ T * f$ est solution du système $\sum\limits_\alpha c_\alpha D^\alpha u = f$

Remarque
On a aussi ce résultat pour $f \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et $T * f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemple (Laplacien)
$-\Delta u = -\sum\limits_{i=1}^d \partial_i^2 u = f$.
En dimension 2, $T = \frac{\ln(|x|)}{2\pi}$.
En dimension $d \geq 3$, $T = \frac{|x|^{2-d}}{d(d-2)\times|B(0,1)|}$.

Exemple (Équation de la chaleur)
$\partial_t u - \Delta u = f$.
En dimension 1 (en espace), $T(t,x) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}^d} \times \mathbb{1}_{t\geq 0}$.

Exemple (Équation des ondes)
$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$.
En dimension 1 (en espace), $T(t,x) = \frac{\mathbb{1}_{|x|\leq t}}{2}$.

25 Transformée de Fourier

On définit la transformée de Fourier de $f \in L^1$ par $\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi \bullet x} f(x)dx$.

On peut prolonger cette application en transformée de Plancherel sur L^2.

Définition (Espace de Schwartz)
$S(\mathbb{R}^d) = \{f \in \mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide$\}$
f à décroissance rapide $\Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}, \sup\limits_{|\alpha| \leq N} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^d} \Big((1+|x|)^N \times |D^\alpha f(x)| \Big) < \infty$
De façon équivalente, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \forall N \geq |\alpha|,\ \exists C_{\alpha,N},\ |D^\alpha f(x)| \leq \frac{C_{\alpha,N}}{(1+|x|)^N}$.

Proposition
S est stable par somme et produit interne, par dérivation, par multiplication par un polynôme.
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans S pour la topologie d'evtlc issue des semi-normes.
La transformée $\mathcal{F}$ est un isomorphisme linéaire continu sur S ($\mathcal{F}(\partial_k f)(\xi) = i\xi_k \times \mathcal{F}f(\xi)$).

03/11

26 Distributions Tempérées

Définition (Distribution tempérée)
$T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ vérifie :
$\exists N \in \mathbb{N}, \exists C > 0,\ \forall \phi \in \mathcal{D},\ | < T, \phi > | \leq C \times \sup\limits_{|\alpha| \leq N} \Big(||(1+|x|)^N \times D^\alpha \phi(x)||_{\infty, \mathbb{R}^d} \Big)$.

Proposition
Par densité, T ci-dessus s'étend à l'espace S, $T \in S'$ (dual topologique).
Réciproquement, si $T \in S'$ une forme linéaire continue sur S, alors $T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} \in \mathcal{D}'$ une distribution tempérée.

Proposition
S' est stable par dérivation et multiplication par un polynôme.

Remarque
Si $f \in L^1_{loc}$ à croissance polynômiale, en particulier si $f \in L^1$, alors $T_f \in S'$.
Si supp(T) est compact, alors $T \in S'$.

27 Transformée de Fourier (bis)

Définition
Soit $u \in S'$: ${}_{S'} < \mathcal{F}u, \phi >_S := {}_{S'} < u, \mathcal{F}\phi >_S$ définit une distribution dans S'.
On peut faire de même pour la transformée inverse $\overline{\mathcal{F}}g(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int e^{i\zeta x} g(x) dx$.

Proposition (Cohérence)
Si $f \in L^1$, alors $\mathcal{F}(T_f) = T_{(\mathcal{F}f)}$.

Théorème
$\mathcal{F}$ un isomorphisme sur S' et $(\mathcal{F})^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$.

Théorème
Soient $T \in S'$ et $U \in \mathcal{E}'$:

— $T * U \in S'$
— $\mathcal{F}U$ est la distribution d'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty$
— $\mathcal{F}(T * U) = \sqrt{2\pi}^d f \times \mathcal{F}T = \sqrt{2\pi}^d \mathcal{F}T \times \mathcal{F}U$

Remarque
$\mathcal{F}(\partial_k T) = i\zeta_k \times \mathcal{F}(T)$

28 Topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$

Soit $K \subset\subset \Omega$: $N_n(\phi) = \sup\limits_{|\alpha| \leq n} ||D^\alpha \phi||_{\infty, K}$.
$\mathcal{D}_K(\Omega)$ est muni d'une structure d'evtlc par les $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
On munit $\mathcal{D}$ de la topologie qui rend les injections $\mathcal{D}_K \to \mathcal{D}$ continues.
$\beta = \{V \subset \mathcal{D}(\Omega)$ convexe, $V = -V$, $\forall K \subset\subset \Omega, V \cap \mathcal{D}_K$ ouvert de $\mathcal{D}_K\}$ les voisinages de 0.
$\tau = \bigcup\limits_{\phi \in \mathcal{D}(\Omega)} (\phi + V)$ la topologie sur $\mathcal{D}$ qui en découle.

Proposition
$(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ est un evtlc.
$\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \phi \iff \exists K \subset\subset \Omega, \phi \in \mathcal{D}_K,\ \forall n \in \mathbb{N}, \phi_n \mathcal{D}_K,$ et $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}_K} \phi$
$\mathcal{D}'(\Omega)$ est le dual topologique de $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$.

17/11

29 Espaces de Sobolev

Soient par la suite un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, \infty]$.

Définition (Espace de Sobolev)
$W^{k,p}(\Omega) := \{T \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \forall |\alpha| \leq k,\ \exists v_\alpha \in L^p(\Omega),\ D^\alpha T = T_{v_\alpha}\}$.
C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'$.

Remarque
Pour $u \in L^p$ associée à $T \in W^{k,p}$, on note $\partial_i u \in L^p$ associée à $\partial_i T$ et $D^\alpha u \in L^p$ associée à $D^\alpha T$.
Par la suite, on considère alors indifféremment la distribution T et l'application u.

Remarque
$T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ correspond à une application $L^p(\Omega) \Leftrightarrow \exists C \geq 0,\ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), |< T, \phi >| \leq C \times ||\phi||_{L^q}$.

Définition
Soit $u \in W^{k,p}(\Omega)$: on définit la norme $||u||_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum\limits_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha u||^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$.

Proposition
Avec les normes précédentes, on a les injections 1-lipschitziennes :
$W^{k+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow (...) \hookrightarrow W^{0,p}(\Omega) \cong L^p(\Omega)$

Proposition
$\left(W^{k,p}(\Omega), ||.||_{W^{k,p}(\Omega)}\right)$ est un Banach.
Si de plus :
- $p < \infty$: alors il est séparable.
- $1 < p < \infty$: il est réflexif.
- $p = 2$: c'est un Hilbert.

Remarque
Ces résultats découlent de l'isométrie $u \in W^{k,p} \mapsto (D^\alpha u)_{|\alpha| \leq k} \in (L^p)^{I_k}$.

Proposition (Approximation de l'unité sur $\mathbb{R}^d$)
Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\int \rho = 1$. On pose $\rho_n(x) = n^d \rho(nx)$.
Alors si $p < \infty$ et $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$, on a $u_n = \rho_n * u \in W^{k,p}$ et $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{W^{k,p}} u$.
De plus, $\text{supp}(u_n) \subset \text{supp}(u) + \text{supp}(\rho_n)$.

Proposition
Soient $\Omega' \subset \Omega$:

- $u \in W^{k,p}(\Omega) \Rightarrow u|_{\Omega'} \in W^{k,p}(\Omega')$
- $u \in W^{k,p}(\Omega')$ à support K compact $\Rightarrow$ La prolongation de u par 0 est $\tilde{u} \in W^{k,p}(\Omega)$
- $u \in W^{k,p}(\Omega)$ et $\phi \in \mathcal{C}_B^k(\Omega)$ (dérivées bornées) $\Rightarrow \phi \times u \in W^{k,p}(\Omega)$
- $u \in W^{k,p}(\Omega) \Leftrightarrow u \in W^{k-1,p}$ et $\forall 1 \leq j \leq d,\ \partial_j u \in W^{k-1,p}(\Omega)$

Théorème
Soit $p < \infty$: $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ est dense dans $W^{k,p}(\Omega)$.

Proposition
Soit $p < \infty$: $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dense dans $W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$.

Définition
Si $k > 0$ et $\Omega \neq \mathbb{R}^d$, alors on n'a pas densité ci-dessus.
On définit alors $W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)} \subset W^{k,p}(\Omega)$.

30 Prolongement

Proposition
Soient $\Omega' \subset \Omega$:
$u \in W_0^{k,p}(\Omega') \Rightarrow \tilde{u} \in W_0^{k,p}(\Omega)$

Remarque
Si $u \in W^{k,p}(\Omega')$ à support non compact, a priori, $\tilde{u} \notin W^{k,p}(\Omega)$.

Définition
$\mathbb{R}_+^d = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^{+*} = \{(x_1 ... x_d) \in \mathbb{R}^d, x_d > 0\}$.

Proposition
Soit $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}_+^d)$:
$u \in W_0^{k,p}(\mathbb{R}_+^d) \Leftrightarrow \tilde{u} \in W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$

Théorème (Prolongement de Babitch)
Soit $p < \infty$. On définit $P : W^{k,p}(\mathbb{R}_+^d) \to W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ linéaire continue par :
$Pu(x', x_d) = u(x', x_d)$ si $x_d > 0$ et $Pu(x', x_d) = \sum\limits_{j=1}^{k} a_j \times u(x', -j \times x_d)$ si $x_d < 0$.
Où (a_i) est l'unique solution du système de Vandermonde : $\forall 0 \leq n \leq k - 1,\ \sum\limits_{j=1}^{k} (-j)^m a_j = 1$.
Alors Pu est une prolongation de u : $Pu|_{\mathbb{R}_+^d} = u$.

Corollaire
$u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^d) \mapsto u|_{\mathbb{R}^d_+} \in W^{k,p}(\mathbb{R}^d_+)$ est surjective, et admet un inverse à droite.

24/11

Remarque
On a le même résultat pour $P : W^{k,p}(B^+ := B \cap \mathbb{R}^d_+) \mapsto W^{k,p}(B)$.

Théorème
Soit Ω un ouvert borné tel que $\partial\Omega$ une sous-variété $\mathcal{C}^k$ (de dimension $d-1$).
Alors $\exists P_{k,\Omega} : W^{k,p}(\Omega) \to W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ linéaire continue telle que $Pu|_\Omega = u$.

Corollaire
Soit Ω ouvert borné à bord $\mathcal{C}^k$:
$\{f|_\Omega,\ f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\}$ dense dans $W^{k,p}(\Omega)$.

31 Injections de Sobolev

Proposition
Soient E et F deux $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$-sev, $(E, |.|_E)$ et $(F, |.|_F)$ des Banach qui s'injectent continument dans $\mathcal{D}'$.
Si $E \subset F$ une injection continue, alors $\exists C < \infty, \forall u \in E, |u|_F \leq C|u|_E$.
Réciproquement, si $\forall u \in X \subset E \cap F,\ |u|_F \leq C|u|_E$ (avec X dense dans les deux Banach), alors $E \subset F$.

32 Cas p>d

Définition (Fonctions α-hölderiennes)
$\mathcal{C}^\alpha(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}$ bornée, $\sup\limits_{x \neq y \in \Omega} \left(\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}\right) < \infty\}$

Proposition
Soit $||f||_{\mathcal{C}^\alpha} = ||f||_\infty + \sup\limits_{x \neq y \in \Omega} \left(\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}\right)$.
$(\mathcal{C}^\alpha, ||.||_{\mathcal{C}^\alpha})$ est un Banach.

Remarque
Si $\alpha = 0$, $\mathcal{C}^\alpha$ les fonctions bornées.
Si $\alpha = 1$, $\mathcal{C}^\alpha$ les fonctions lipschitziennes.
Si $\alpha > 1$, $\mathcal{C}^\alpha$ les fonctions constantes.

Théorème (Théorème de Morrey)
Soit $\Omega = \mathcal{R}^d$, $\mathcal{R}^d_+$ ou bien un ouvert à bord $\mathcal{C}^k$. On fixe $d < p < \infty$.
Alors $W^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}^\alpha(\bar{\Omega})$ pour $\alpha = 1 - \frac{d}{p} \in]0, 1[$.

Lemme
Posons $\fint\limits_E f := \frac{1}{|E|} \int\limits_E f$ la valeur moyenne de f sur E.
Alors $\forall r > 0,\ \exists C < \infty,\ \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d),\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall y \in B(x, r),\ \left| u(x) - \fint\limits_{B(x,r)} u \right| \leq C \times r^\alpha \times ||\nabla u||_{L^p(B(x,r))}$.

33 Cas 1≤p<d

Théorème (Injection de Sobolev)
On a l'injection continue $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$.

Remarque
Comme $p < p^* < \infty$ et $W^{1,p} \subset L^p$ par définition, alors $\forall p \leq q \leq p^*,\ W^{1,p} \subset L^q$.

01/12

Lemme (Lemme de Gagliardo)

Soient $(F_j)_{1\geq j\geq d} \in L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})$. On pose $F(x) := \prod_{i=1}^{d} Fi(\hat{x}_i)$ avec $x = (x_1 ... x_d) \in \mathbb{R}^d$ et $\hat{x}_i = (x_1 ... x_{i-1}, x_{i+1} ... x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$.

Alors $F \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $||F||_{L^1} \leq \prod_{i=1}^{d} ||F_i||_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})}$.

34 Cas limite p=d

Théorème

On a l'injection continue $W^{1,1}(\Omega) \subset (\mathcal{C}_b(\Omega), ||.||_\infty)$.

Pour $d \geq 2$, $W^{1,d} \not\subset L^\infty$ (on n'a pas d'injection).

$\forall q \in [d, \infty[,\ W^{1,d}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$.

35 Injections Compactes

Définition (Injection compacte)
Soient $i : X \hookrightarrow Y$ une injection continue entre deux Banach.
$i : X \hookrightarrow Y$ est compacte $\Leftrightarrow$ B_X relativement compact dans Y ($\overline{B_X}$ compact).

Remarque
Dans le cas où Y (et donc X) est séparable (famille dénombrable dense), de façon équivalente :
$\forall (x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ bornée, $\exists y \in Y,\ x_{\sigma(n)} \xrightarrow{Y} y$.

Lemme (Lemme de Riesz)
L'injection $X \subset X$ est compacte $\Leftrightarrow$ $\dim X < \infty$.

Théorème (Cas p>d)
L'injection continue de Morrey ci-dessus n'est pas compacte.
$W^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}^\beta(\overline{\Omega})$ est compacte $\Leftrightarrow$ Ω borné, et $\beta < 1 - \frac{d}{p}$.

Remarque (Cas p<d)
Si Ω borné et $q < p^*$ alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ compacte.

36 Cas fractionnaire, $W^{s,p}$ avec $s \notin \mathbb{N}$

Remarque (Cas $k \in \mathbb{N}$)
$H^k(\mathbb{R}^d) := W^{k,2}(\mathbb{R}^d) = \{u \in L^2,\ \sqrt{1+|\xi|^2}^k \times (\mathcal{F}u)(\xi) \in L^2\} = \mathcal{F}^{-1}\left(\sqrt{1+|\xi|^2}^{-k} \times \mathcal{F}(L^2)\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\sqrt{1+|\xi|^2}^{-k} \times L^2\right)$

Définition
Soit $s \in \mathbb{R}$, on pose $H^s(\mathbb{R}^d) = \mathcal{F}^{-1}\left(\sqrt{1+|\xi|^2}^{-s} \times L^2\right) \subset S'(\mathbb{R}^d)$.

Proposition
H^s est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $< u, v >= \int\limits_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s \times \mathcal{F}u(\xi) \times \overline{\mathcal{F}v(\xi)}\xi$.
On a $||u||_{H^s} = ||\sqrt{1+|\xi|^2}^s \times \mathcal{F}u||_{L^2}$.

Remarque
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans S' donc dans H^s.

Proposition
$s \mapsto H^s$ est décroissante pour l'inclusion.
Cette définition des H^s coïncide avec la remarque initiale sur les H^k. En particulier, $H^0 = L^2$.
Il en découle $H^s \subset L^2$ lorsque $s \geq 0$ (et inversement).

Définition
$H_s(\Omega) := \{u|_\Omega,\ u \in H_s(\mathbb{R}^d)\}$ un Hilbert, muni de la norme $||u||_{H^s(\Omega)} = \inf\limits_{v \in H^s(\mathcal{R}^d),\ v|_\Omega = u} ||v||_{H^s(\mathbb{R}^d)}$.

Proposition
Soient $k \in \mathbb{N}$ et Ω est $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^d_+$ ou bien un ouvert à bord $\mathcal{C}^k$.
On a l'égalité $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ et l'équivalence entre les normes $||.||_{H^k}$ et $||.||_{W^{k,2}}$.

37 Trace

Définition (Trace sur les applications continues)
On définit $\gamma_0 : f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d) \mapsto f(\bullet, 0) \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^{d-1})$ la trace, linéaire continue.
En particulier, on s'intéresse par la suite à la restriction $\gamma_0 : S(\mathbb{R}^d) \to S(\mathbb{R}^{d-1})$.

Théorème
Soit $s > \frac{1}{2}$. γ_0 s'étend de manière unique en $\gamma : H^s(\mathbb{R}^d) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$ un opérateur de trace linéaire, continu et surjectif.

Remarque
On peut généraliser les résultats précédents à $\mathbb{R}^d_+$ puis à un ouvert borné Ω à bord suffisamment régulier.

38 Théorie Spectrale

Par la suite, E et F des Banach complexes.

Définition (Ensemble résolvant et spectre d'un opérateur)
Soit $L \in \mathcal{L}(E)$.
$\rho(L) := \{\lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \times Id_E - L \in \mathcal{L}(E)$ bijective (donc bicontinue)$\}$ l'ensemble résolvant de L.
$\sigma(L) = \mathbb{C} \backslash \rho(L)$ le spectre de L.

Proposition
$\sigma(L)$ est un compact non vide de $\mathbb{C}$.

Définition (Opérateur Compact)
$T \in \mathcal{L}(E, F)$ est compact $\Leftrightarrow T(B_E)$ relativement compact dans F, c'est-à-dire :
$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \exists y_1 ... y_N \in F,\ T(B_E) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} B_F(y_i, \epsilon)$
On note $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble de ces opérateurs compacts.

Proposition
Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$:
- T de rang fini $\Rightarrow T$ est compact.
- T compact et $\mathrm{im}(T)$ fermé $\Rightarrow T$ de rang fini.

Proposition
On a les résultats suivants :
- $\mathcal{K}(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$ un sev fermé.
- En composant les applications, on a $\mathcal{L}(G, H)\mathcal{K}(F, G)\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{K}(E, H)$.
- $\mathcal{K}(E)$ est un idéal bilatère de $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.

Définition
Soit $A \subset E : A^{\perp} := \{\phi \in E^*,\ \forall x \in A,\ \phi(x) = 0\}$
Soit $B \subset E^* : {}^{\perp}B := \{x \in E,\ \forall \phi \in B,\ \phi(x) = 0\}$

Théorème (Théorème de Schauder)
Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ (et $T^* : \phi \in F^* \mapsto \phi \circ T \in E^*$).
$T \in \mathcal{K}(E, F) \Leftrightarrow T^* \in \mathcal{K}(F^*, E^*)$

39 Alternative de Fredholm

Théorème
Soit $T \in \mathcal{K}(E)$:

— $\dim\ \ker(Id_E - T) < \infty$
— $\text{im}(Id_E - T)$ fermée, de codimension finie.
— Si $Id_E - T$ injective, alors $Id_E - T$ surjective.
— $\dim\ \ker(Id_E - T) = \text{codim im}(Id_E - T)$

Définition (Opérateur de Fredholm)
$L \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que :
— $\dim\ \ker(L) < \infty$
— $\text{im}(L)$ fermée
— $\text{codim im}(L) < \infty$

On pose $\text{ind}(L) = \text{codim im}(L) - \dim\ \ker(L) \in \mathbb{Z}$ l'indice de L.

Remarque
$T \in \mathcal{K}(E) \Rightarrow T$ de Fredholm, $\text{ind}(T) = 0$

15/12

Lemme
Soient $F \subset E$ un sev fermé et $x \notin F$: $\exists x' \in (x + F),\ ||x'||_E \leq 2 \times d_E(x, F)$ (et par définition $d(x, F) = d(x', F)$).

Théorème (Alternative de Fredholm)
Soit $T \in \mathcal{K}(E)$:
$(\forall b \in E,\ \exists u \in E,\ u - Tu = b) \Leftrightarrow (x = Tx \Leftrightarrow x = 0)$

40 Spectre d'un Opérateur Compact

Théorème
E un Banach de dimension infinie, $T \in \mathcal{K}(E)$:
— $0 \in \sigma(T)$
— Si $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$, alors λ valeur propre de T de multiplicité $\dim\ \ker(\lambda Id_E - T) < \infty$
— $\forall \epsilon > 0,\ \sigma(T) \backslash B(0, \epsilon)$ est fini, d'où $\sigma(T)$ au plus dénombrable.

Remarque
$0 \in \sigma(T)$ n'est pas nécessairement valeur propre, T peut être injectif.

41 Algèbre de Banach

Définition (Algèbre de Banach)
$\mathcal{A}$ est une $\mathbb{C}$-algèbre unitaire normée, telle que $(\mathcal{A}, ||.||)$ un Banach, $||1|| = 1$ et $||xy|| \leq ||x|| \times ||y||$.

Proposition
Si $x \in \mathcal{A}$ et $||x|| < 1$, alors :
- $\sum\limits_{i=0}^{\infty} x^n$ converge normalement
- $(\sum x^n) \times (1 - x) = 1$
- $(1 - x) \in \mathcal{A}^{\times}$

Corollaire
$\forall x \in \mathcal{A},\ B(x, \frac{1}{||x||}) \subset \mathcal{A}$ donc $\mathcal{A}$ ouvert.

Proposition
Sur $\mathcal{A}^{\times}$, $(x \mapsto x^{-1}) \in \mathcal{C}^0$

Proposition
On a les résultats suivants :
- Sur $\mathcal{A}^{\times}$, $(x \mapsto x^{-1}) \in \mathcal{C}^0$
- Soient $x, y \in \mathcal{A}$: $U := \{z \in \mathbb{C},\ (x + zy) \in \mathcal{A}^{\times}\} \subset \mathbb{C}$ ouvert.
- Soit $\phi \in \mathcal{L}(A, \mathbb{C})$: $z \in U \mapsto \phi((x + zy)^{-1}) \in \mathbb{C}$ un holomorphisme.

Définition (Spectre de $x \in \mathcal{A}$)
$\sigma_{\mathcal{A}}(x) := \{z \in \mathcal{C},\ (z - x) \notin \mathcal{A}^{\times}\}$

Proposition
$\forall x \in \mathcal{A},\ \sigma_{\mathcal{A}}(x)$ compact non vide de $\mathbb{C}$.

42 Rayon spectral

Définition (Rayon spectral de $x \in \mathcal{A}$)
$\rho_{\mathcal{A}}(x) := \max\limits_{z \in \sigma_{\mathcal{A}}(x)} |z|$

Proposition
$\rho_{\mathcal{A}}(x) = \lim\limits_{n \to \infty} ||x^n||^{\frac{1}{n}}$

43 Opérateurs Adjoints et Normaux

Proposition (Opérateur Dual)
Soient H un Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$: $\exists ! T^* \in \mathcal{L}(H),\ \forall x, y \in H, < Tx, y > = < x, T^* y >$.
$T \mapsto T^*$ est antilinéaire : $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} \times T^*$.

Remarque
$(\mathcal{L}(H), \circ, |||.|||)$ est une algèbre de Banach non commutative.

Définition
T autoadjoint : $T = T^*$
T normal : $TT^* = T^*T$

Proposition
T autoadjoint $\Rightarrow \sigma(T) \subset \mathbb{R}$

Proposition
T normal $\Rightarrow \rho(T) = |||T|||$

Théorème
Si $T \in \mathcal{K}(H)$ est normal, alors :
$\exists (h_n)$ une base orthonormée (dénombrable) de H formée de vecteurs propres de T.