Graphes Aléatoires

Gayral Léo
basées sur le cours de Erich Baur

Table des matières

Chapitre 1

Graphes Aléatoires

20/01

1.1. Modèle

Remarque 1 (Notations)
Par la suite, on considère des graphes non orientés, sans arrêtes multiples ou qui bouclent sur un sommet. On a donc au plus $\binom{n}{2}$ arrêtes sur un graphe à n sommets.

On pose $[n] := [\![1, n]\!]$ un ensemble de sommets.

$\mathcal{G}_n$ l'ensemble des graphes sur $[n]$, de cardinal $2^{\binom{n}{2}}$.

Soit G un graphe : $V(G)$ son ensemble de sommets et $E(G)$ ses arrêtes.

On a $G = (V(G), E(G))$. Ainsi, $G \in \mathcal{G}_n \;\Leftrightarrow\; V(G) = [n]$.

On pose $\mathcal{G}_{n,m} = \{G \in \mathcal{G}_n,\ \#E(G) = m\}$ les graphes à m arrêtes sur $[n]$.

Ainsi $\mathcal{G}_n = \bigsqcup_{m=0}^{\binom{n}{2}} \mathcal{G}_{n,m}$.

Définition 1 (Graphe aléatoire uniforme)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $m \in [\![0, \binom{n}{2}]\!]$. $G_{n,m}$ la variable définie par la loi uniforme sur $\mathcal{G}_{n,m}$:

$\forall G \in \mathcal{G}_{n,m},\ \mathbb{P}(G_{n,m} = G) = \frac{1}{\#\mathcal{G}_{n,m}}$ avec $\#\mathcal{G}_{n,m} = \binom{\binom{n}{2}}{m}$.

On pose $E_{n,m} = E(G_{n,m})$ la variable des arrêtes. On a $\#E_{n,m} = m$ constant.

Définition 2 (Graphe aléatoire binomial)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$. $G_{n,p}$ la variable définie par la loi :

$\forall G \in \mathcal{G}_{n,m},\ \mathbb{P}(G_{n,p} = G) = p^m \times (1-p)^{\binom{n}{2}-m}$.

On pose $E_{n,p} = E(G_{n,p})$ la variable des arrêtes.

Remarque 2
La loi du graphe aléatoire binomial revient à considérer chaque arrête possible selon une loi de Bernouilli $\mathcal{B}(p)$ indépendamment des autres. Il en résulte $\#E_{n,p} \sim \mathcal{B}(\binom{n}{2}, p)$.

Lemme 1
$G_{n,p}$ conditionné par l'évènement $\#E_{n,p} = m$ a la même loi que $G_{n,m}$.

Démonstration.
Clairement, si $\#E(G) = \#E(G')$, alors $\mathbb{P}(G_{n,p} = G) = \mathbb{P}(G_{n,p} = G')$. Conditionner $G_{n,p}$ par $\#E_{n,p} = m$ donne donc la loi uniforme sur $\mathcal{G}_{n,m}$. □

1.1.1. Techniques de couplage.

Proposition 1 (Couplage des $\mathcal{G}_{n,m}$)
Soient $m, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq \binom{n}{2}$ et $m = m_1 + m_2$.

On a la décomposition $G_{n,m} = G_{n,m_1} \cup H_{n,m_2}$.

H_{n,m_2} est un graphe aléatoire suivant une loi uniforme dans l'ensemble (lui-même aléatoire, fonction de G_{n,m_1}) $\{G \in \mathcal{G}_{n,m_2}, E(G) \cap E(G_{n,m_1}) = \emptyset\}$.

Autrement dit, choisir uniformément m arrêtes revient à en choisir m_1 uniformément puis m_2 uniformément parmi celles qui n'ont pas été choisies au préalable.

Proposition 2 (Couplage des $\mathcal{G}_{n,p}$)
Soient $p, p_1, p_2 \in [0,1]$ tels que $(1-p) = (1-p_1)(1-p_2)$.

Alors si on considère deux graphes aléatoires binomiaux indépendant G_{n,p_1} et G_{n,p_2}, on a $G_{n,p} = G_{n,p_1} \cup G_{n,p_2}$.

Cela vient du fait que si les variables $X \sim \mathcal{B}(p_1)$ et $Y \sim \mathcal{B}(p_2)$ sont indépendantes, alors $\max(X,Y) \sim \mathcal{B}(p)$. Cela implique que pour chaque arrête possible, la considérer avec probabilité p dans $G_{n,p}$ revient à la considérer avec probabilité p_1 dans G_{n,p_1} ou (inclusif) avec probabilité p_2 dans G_{n,p_2}.

1.1.2. Propriétés sur un graphe.

Définition 3 (Propriété sur un ensemble)
Une propriété sur X est une partie $\mathcal{P} \subset X$.

Définition 4 (Propriété croissante)
$\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_n$ une propriété sur les graphes de $[n]$ telle que :

$\forall G = ([n], E) \in \mathcal{P},\ \forall e$ une arrête, on a $G + e = ([n], E \cup \{e\}) \in \mathcal{P}$.

Définition 5 (Propriété décroissante)
$\mathcal{P}$ telle que :

$\forall G \in \mathcal{P},\ \forall e$ une arrête, on a $G - e = ([n], E\backslash\{e\}) \in \mathcal{P}$.

Remarque 3
On note $\mathcal{G} = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n$ l'ensemble des graphes finis.

On dit qu'une propriété $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}$ est (dé)croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n := \mathcal{P} \cup \mathcal{G}_n$ est (dé)croissante au sens précédent.

Le complémentaire d'une propriété croissante est une propriété décroissante et inversement.

Remarque 4
Soit $\mathcal{P}$ une propriété croissante. L'application $p \mapsto \mathbb{P}(G_{n,p} \in \mathcal{P})$ est croissante sur $[0, 1]$.

Démonstration.
Soient $p < q \in [0, 1]$. On a la décomposition $G_{n,q} = G_{n,p} \cup G_{n,r}$. Par croissance de $\mathcal{P}$, si l'évènement $G_{n,p} \in \mathcal{P}$ est réalisé alors nécessairement $G_{n,q} \in \mathcal{P}$ également. On a donc $\mathbb{1}_{G_{n,p} \in \mathcal{P}} \leq \mathbb{1}_{G_{n,q} \in \mathcal{P}}$, d'où le résultat. $\square$

Lemme 2
Soient $\mathcal{P}$ une propriété monotone et $m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. On pose $N(n) = \binom{n}{2}$ et $p = \frac{m}{N}$. Supposons $m \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ et $\frac{N(1-p)}{\sqrt{m}} \longrightarrow \infty$. Alors à partir d'un rang n, $\mathbb{P}(G_{n,m} \in \mathcal{P}) \leq 3\mathbb{P}(G_{n,p} \in \mathcal{P})$.

On peut en réalité remplacer 3 par une constante $C > \sqrt{2\pi}$.

Démonstration.
cf. notes manuscrites. $\square$

1.2. Fonctions seuil

Définition 6 (Fonction seuil sur $G_{n,m}$)
Soit $\mathcal{P}$ croissante. $m^* : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifie $\forall m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

- Si $\frac{m}{m^*} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $\mathbb{P}(G_{n,m(n)} \in \mathcal{P}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
- Si $\frac{m}{m^*} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ alors $\mathbb{P}(G_{n,m(n)} \in \mathcal{P}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

Définition 7 (Fonction seuil sur $G_{n,p}$)
Soit $\mathcal{P}$ croissante. $p^* : \mathbb{N} \to [0, 1]$ vérifie $\forall p : \mathbb{N} \to [0, 1]$:

- Si $\frac{p}{p^*} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $\mathbb{P}(G_{n,p(n)} \in \mathcal{P}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
- Si $\frac{p}{p^*} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ alors $\mathbb{P}(G_{n,p(n)} \in \mathcal{P}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

Remarque 5
On n'a pas unicité des fonctions seuil.

Si on considère une propriété décroissante, les conditions du seuil s'inversent : $0 \Rightarrow 1$ et $\infty \Rightarrow 0$.

Théorème 1 (Existence d'une fonction seuil)
Soit $\mathcal{P}$ une propriété croissante non triviale ($\exists n_0,\ \forall n > n_0,\ \emptyset \subsetneq \mathcal{P}_n \subsetneq \mathcal{G}_n$). Alors $\mathcal{P}$ admet une fonction seuil p^*.

Démonstration.
cf. notes manuscrites. □

Exemple 1
Soit $\mathcal{P} = \{G \in \mathcal{G},\ \#E(G) > 0\}$ l'ensemble des graphes qui ont une arrête.
$p^*(n) = \frac{1}{n^2}$ est un seuil pour cette propriété croissante.

Démonstration.
cf. notes manuscrites. □

Exemple 2
Soit $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}$ l'ensemble des graphes qui ont un sommet isolé.

On peut toujours écrire m sous la forme $m(n) = \frac{n}{2}(\ln(n) + k(n))$.

- Si $k(n) \to +\infty$ alors $\mathbb{P}(G_{n,m(n)} \in \mathcal{P}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
- Si $k(n) \to -\infty$ alors $\mathbb{P}(G_{n,m(n)} \in \mathcal{P}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

En particulier, $m^*(n) = \frac{n\ln(n)}{2}$ est un seuil pour cette propriété décroissante.

Démonstration.
cf. notes manuscrites. □

Remarque 6 (Méthode des premier et second moments)
Soit $X \in \mathbb{N}$ une variable aléatoire. On va souvent exploiter les inégalités :

- Premier moment : $\mathbb{P}(X > 0) \leq \mathbb{E}[X]$
- Second moment : $\mathbb{P}(X > 0) \geq \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]} = 1 - \frac{Var[X]}{\mathbb{E}[X^2]}$

27/01

Théorème 2
Soient $p_0 \in [0,1]$, $p : \mathbb{N} \to [0,1]$ telle que $s(n) = n \times \sqrt{p(n)(1-p(n))} \to \infty$ et $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $f(n) \to \infty$.

(1) Soit $\mathcal{P}$ une propriété quelconque. Si pour $\forall m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $|m - \binom{n}{2}| \leq (f \times s)$ on a $\mathbb{P}(G_{n,m} \in \mathcal{P}) \to p_0$, alors $\mathbb{P}(G_{n,p} \in \mathcal{P}) \to p_0$.

(2) Soit $\mathcal{P}$ une propriété croissante. On définit $p_- = p - \frac{fs}{n^3}$, $p_+ = p + \frac{fs}{n^3}$ et $m(n) = \lfloor p \times \binom{n}{2} \rfloor$. Si $\mathbb{P}(G_{n,p_-} \in \mathcal{P}) \to p_0$ et $\mathbb{P}(G_{n,p_+} \in \mathcal{P}) \to p_0$, alors $\mathbb{P}(G_{n,m} \in \mathcal{P}) \to p_0$.

Évolution des graphes d'Erdős-Rényi

On rappelle le "couplage" entre p et m lorsque $m = \lfloor p \times \binom{n}{2} \rfloor \sim p\frac{n^2}{2}$. Avec ce couplage en tête, on distingue trois phases dans $G_{n,m}$ et $G_{n,p}$:

- Sous-critique :
  - $m << n$ ou $p << \frac{1}{n}$
  - $m \sim cn,\ c < \frac{1}{2}$ ou $p \sim \frac{c}{n},\ c < 1$
- Critique :
  - $m \sim \frac{n}{2}$ ou $p \sim \frac{1}{n}$
- Sur-critique :
  - $m \sim cn,\ c > \frac{1}{2}$ ou $p \sim \frac{c}{n},\ c > 1$
  - $m >> n$ ou $p >> \frac{1}{n}$

Par la suite, on va principalement montrer des résultats sur $G_{n,p}$ mais une bonne partie peut se transporter à $G_{n,m}$ avec le théorème précédent.

2.1. Structure des composantes connexes

2.1.1. Cas sous-critique, p«1/n.

Proposition 3
Soit $\mathcal{P}^F = \{G \in \mathcal{G},\ G \text{ une forêt/un graphe sans cycles}\}$.

Si $m << n$, alors $\mathbb{P}(G_{n,m} \in \mathcal{P}^F) \to 1$.

Démonstration.
On s'intéresse à $G_{n,p}$ avec $p(n) = \frac{m}{\binom{n}{2}} \leq \frac{3}{n \times f(n)}$ avec $f(n) = \frac{n}{m(n)} \to \infty$. Comme $\mathcal{P}^F$ décroissante, $\mathbb{P}(G_{n,m} \in \mathcal{P}^F) \geq 1 - 3\mathbb{P}(G_{n,p} \notin \mathcal{P}^F)$ à partir d'un rang donc il suffit de montrer $\mathbb{P}(G_{n,p} \notin \mathcal{P}^F) \to 0$.

Soit X le nombre de cycles du graphe $G_{n,p}$. On a :

$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \frac{(k-1)!}{2} p^k \leq \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{3}{2f(n)}\right)^k \sim \left(\frac{3}{2f(n)}\right)^3$

D'où $\mathbb{P}(G_{n,p} \notin \mathcal{P}^F) = \mathbb{P}(X > 0) \leq \mathbb{E}[X] \to 0$. □

Proposition 4
(réunie avec la proposition suivante)

Proposition 5
Soit $\mathcal{P}^I = \{G \in \mathcal{G}$ sans chemins de longueur $\geq 2\}$ décroissante.

$m^*(n) = \sqrt{n}$ est un seuil pour $\mathcal{P}^I$.

Démonstration.
cf. notes manuscrites. □

Théorème 3
Soit $\mathcal{P}^{(k)} = \{G \in \mathcal{G},\ G$ continent un arbre à k sommets$\}$ croissante ($k \geq 3$).

$m^*(n) = n^{\frac{k-2}{k-1}}$ est un seuil pour $\mathcal{P}^{(k)}$.

Démonstration.
cf. notes manuscrites. □

Remarque 7 (Formule de Cayley)
Lorsque $n \geq 2$, on peut construire n^{n-2} arbres qui visitent tout $[n]$. Il en découle l'existence de $\binom{n}{k} k^{k-2}$ arbres à k sommets dans $[n]$.

Théorème 4
Soit T un arbre à k sommets fixé (en tant que structure abstraite). Soient $m(n) \sim c \times n^{\frac{k-2}{k-1}}$ et $X_n = \#\{$copies isolées de T dans $G_{n,m(n)}\}$.

Alors $X_n \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{P}(\lambda)$ une loi de poisson avec $\lambda = \frac{(2c)^{k-1}}{\mathrm{Aut}(T)}$ ($\mathrm{Aut}(T)$ le nombre d'automorphismes sur T, de bijections sur les sommets qui préservent les arrêtes). En particulier, $\mathbb{P}(X_n > 0) \to 1 - e^{-\lambda}$.

Démonstration.
cf. notes manuscrites. □

Théorème 5 (Méthode des moments factoriels pour des variables entières)
Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}, X \in \mathbb{N}$ des variables entières positives.

On pose $\mathbb{E}[(X)_l] = \mathbb{E}[X \times (X-1)...(X-l+1)]$ le l-ième moment factoriel de X.

Si $\forall l \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}[(X_n)_l] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[(X)_l]$, et $\forall k \in \mathbb{N},\ \frac{\mathbb{E}[(X)_r]}{(r-k)!} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors on a la convergence en loi $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

La seconde hypothèse est en particulier vérifiée lorsque $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ suit une loi de Poisson.

03/02

Remarque 8
On va dans la suite de cette sous-section s'intéresser au cas $p(n) = \frac{c}{n},\ c > 0$.

On note (L_i) une énumération des composantes connexes de $G_{n,p}$ par taille (nombre de sommets) décroissante. On identifiera L_i à sa taille par la suite.

Les résultats suivants se transposent relativement bien au cas $m(n) = \frac{cn}{2}$, ce qui nous ramène bien au cas sous-critique lorsque $c < 1$.

2.1.2. Cas p=c/n, c<1.

Lemme 3
$\mathbb{P}(\exists i,\ L_i$ contient au moins deux cycles$) = O(\frac{1}{n})$.

Autrement dit, asymptotiquement, toute composante connexe de $G_{n,p}$ contient au plus un cycle.

Démonstration.
cf. notes manuscrites. □

Lemme 4
On pose $Z^n = \#\{s \in [n], s \in\ L_i \subset G_{n,p}$ qui contient exactement un cycle$\}$ le nombre de sommets dans une composante à un seul cycle.

$\exists K > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}[Z^n] < K$.

Démonstration.
cf. notes manuscrites. □

Proposition 6
Soient ici $c \in \mathbb{R}^{+*},\ c \neq 1$ quelconque et T_i une énumération par taille décroissante des arbres isolés de $G_{n,p}$ (l'extraction des L_i sans cycles).

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+,\ f(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ mais $f(n) << \ln[\ln(n)]$.

On pose $\alpha = c - 1 - \ln(c) \in]0, \infty[$ et on fixe $l \in \mathbb{N}^*$.

Alors $\mathbb{P}\left(\ \left|\frac{1}{\alpha}\left(\ln(n) - \frac{5}{2}\ln[\ln(n)]\right) - T_l\right| < f(n)\ \right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

Démonstration.
cf. notes manuscrites. $\square$

Théorème 6
En synthétisant les résultats précédents, on obtient, lorsque $c \in]0,1[$:

(1) $\frac{L_l}{\ln(n)} \overset{\text{proba}}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha}$

(2) $\forall \epsilon > 0,\ \mathbb{P}(L_l \geq (1-\epsilon)\frac{\ln(n)}{\alpha}) \to 1$

(3) $\mathbb{P}(L_l \text{ est un arbre}) \to 1$

2.1.3. cas p=c/n, c>1.

Lemme 5
Soit $c \neq 1$: $\exists! x(c) \in]0,1[,\ xe^{-x} = ce^{-c}$ et on a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{k!}(ce^{-c})^k = x(c)$.

Cette égalité reste vraie pour $c = x(c) = 1$.

Démonstration.
cf. notes manuscrites. $\square$

Théorème 7
On a ici une "asymétrie" qui émerge entre l'énorme composante L_1 et les petits L_i qui suivent :

(1) $\frac{L_1}{n} \overset{\text{proba}}{\longrightarrow} 1 - \frac{x(c)}{c} > 0$.

(2) $\exists K(c) > 0,\ \mathbb{P}(L_2 > K\ln(n)) \to 0$ (a fortiori vrai pour les L_i suivants).

Démonstration.
cf. notes manuscrites. $\square$

13/02

2.1.4. Cas critique p=1/n.

De façon générale, compte tenu de la nature critique de ce cas, les résultats obtenus dépendront fortement de la vitesse de convergence lorsque $p(n) \sim \frac{1}{n}$ seulement. Ainsi, on considère souvent la fenêtre critique $\left[\frac{1}{n} \pm \frac{2}{n^{\frac{4}{3}}}\right]$.

Lemme 6
Soit $k(n) = o\left(n^{\frac{3}{4}}\right)$. On a alors $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!} \exp\left(-\frac{k^2}{2n} - \frac{k^3}{6n^2}\right)$.

Théorème 8
$\forall \epsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall n > 0,\ \mathbb{P}\left(L_1 \leq \frac{n^{\frac{2}{3}}}{A}\right) \leq \epsilon$ et $\mathbb{P}\left(L_1 \geq A \times n^{\frac{2}{3}}\right) \leq \epsilon$.

03/03

2.2. Degrés des sommets dans $G_{n,p}$

Remarque 9
On sait que $\forall v \in V(G_{n,p}) = [n],\ d(v) \sim \mathcal{B}(n-1,p)$.
On s'intéresse par la suite aux variables $X_d = \#\{v \in V(G_{n,p}),\ d(v) = d\}$.
On note par exemple que $\mathbb{E}[X_d] = n \times \binom{n-1}{d} p^d (1-p)^{n-1-d}$.

Proposition 7
On distingue plusieurs comportements de X_0 selon les valeurs de p :

(1) Si $(np - \ln(n)) \to c \in \mathbb{R}$:
$X_0 \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(e^{-c})$

(2) Si $(np - \ln(n)) \to +\infty$:
$X_0 \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$

(3) Si $(np - \ln(n)) \to -\infty$ et $n^2 p \to +\infty$:
$\frac{X_0 - \mathbb{E}[X_0]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_0)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Démonstration.
cf. notes manuscrites. □

Proposition 8
Soit $d \geq 1$. Dans ce cas, on distingue les cas suivants :

(1) Si $p << n^{-\frac{d+1}{d}}$:
$X_d \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$

(2) Si $p \sim cn^{-\frac{d+1}{d}},\ c \in \mathbb{R}$:
— $d = 1$: $X_1 \xrightarrow{\mathcal{L}} 2 \times \mathcal{P}(\frac{c}{2})$
— $d \geq 2$: $X_d \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\frac{c^d}{d!})$

(3) Si $p >> n^{-\frac{d+1}{d}}$ et $pn - \ln(n) - d\ln[\ln n] \to -\infty$:
$\frac{X_d - \mathbb{E}[X_d]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_d)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

(4) Si $p >> n^{-\frac{d+1}{d}}$ et $pn - \ln(n) - d\ln[\ln n] \to c \in \mathbb{R}$:
$X_d \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\frac{e^{-c}}{d!})$

(5) Si $p >> n^{-\frac{d+1}{d}}$ et $pn - \ln(n) - d\ln[\ln n] \to +\infty$:
$X_d \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$

Proposition 9 (Cas p=c/n)
On a $\mathbb{E}[X_d] = n \times \frac{c^d}{d!} e^{-c} \times \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.
De plus, $\exists C,\ \forall d \in \mathbb{N},\ \forall f(n) \to \infty$, on a $\mathbb{P}(|X_d - \mathbb{E}[X_d]| \geq f(n)\sqrt{n}) \leq \frac{C}{f(n)^2}$.

Démonstration.
cf. notes manuscrites. □

Théorème 9
Soient $\Delta = \max\{d(v), v \in V(G_{n,p})\}$ et $\delta = \min\{d(v), v \in V(G_{n,p})\}$.

(1) Si $p = \frac{c}{n}$:
$$\mathbb{P}\left(\Delta \in \frac{\ln(n)}{\ln^{(2)}(n)} \times \left[1 \pm 2\frac{\ln^{(3)}(n)}{\ln^{(2)}(n)}\right]\right) \to 1 \text{ (avec } \ln^{(k+1)}(n) = \ln\left(\ln^{(k)}(n)\right)\text{)}.$$

(2) Si $p = f(n) \times \frac{\ln(n)}{n},\ f(n) \to \infty$:
$\frac{\Delta}{np} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$ et $\frac{\delta}{np} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$ convergent en probabilité.

Démonstration.
cf. notes manuscrites. □

2.3. Phase dense, 0<p<1 fixé

Lemme 7
$$\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \int_x^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy \leq \frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

17/03

Lemme 8
Si $x << \sqrt[3]{n}\ln(n)^2$ et $d = \lfloor (n-1)p + x\sqrt{(n-1)p(1-p)} \rfloor$, alors :
$\mathbb{E}[X_d] = \sqrt{\frac{n}{2\pi p(1-p)}} e^{-\frac{x^2}{2}} \times (1 + o(1))$ avec un $o(1)$ uniforme en x.

Théorème 10
Soient $0 < \epsilon < 1$ et $d_\pm = \lfloor (n-1)p + (1 \pm \epsilon)\sqrt{2(n-1)p(1-p)\ln(n)} \rfloor$.

(1) $\mathbb{P}(d_- \leq \Delta \leq d_+) \to 1$

(2) $\mathbb{P}(\sum_{i=d_-}^{\infty} X_i \geq n^\epsilon) \to 1$

(3) $\mathbb{P}(\forall u \neq v \in V(G_{n,p}),\ d(u), d(v) \geq d_- \Rightarrow |d(u) - d(v)| > C) \to 1$ avec C un entier arbitrairement grand.

Démonstration.
cf. notes manuscrites. □

2.3.1. Application 1 : Isomorphismes de graphes. Il n'existe pas d'algorithme en temps polynômial permettant de déterminer de façon certaine si deux graphes sont isomorphes où non. Cependant, l'algorithme LABEL permet de conclure (avec certitude) dans certains cas, et a une complexité en $O(n^2)$.

Remarque 10 (Algorithme LABEL)
Soient $G \in \mathcal{G}_n$ et $L \in \mathbb{N}$ donnés.

(1) On produit une permutation $\sigma \in S_n$ sur les sommets qui rend leurs degrés décroissants : $\forall 1 \leq i < n,\ d(\sigma_{i+1}) \leq d(\sigma_i)$.
(2) Si $\exists 1 \leq i \leq L,\ d(\sigma_{i+1}) = d(\sigma_i)$, alors l'algorithme échoue.
Autrement dit, les L premiers sommets sont de degrés distincts.
(3) $\forall L < i \leq n,\ f(\sigma_i) := \sum\limits_{j=1}^{L} 2^j \times \mathbb{1}_{\{\sigma_i, \sigma_j\} \in E(G)}$
(4) On réordonne la permutation σ à partir du rang $L+1$ pour rendre f décroissante : $\forall L < i < n,\ f(\sigma_{i+1}) \leq f(\sigma_i)$.
Sur la plage $L < i \leq n$, on n'a donc plus monotonie de d.
(5) Si $\exists L < i < n,\ f(\sigma_{i+1}) = f(\sigma_i)$, alors l'algorithme échoue.
Autrement dit, les sommets suivants ne doivent pas avoir le même voisinage dans les L premiers.

Si l'algorithme n'échoue pas, alors il renvoie la permutation σ obtenue.

Remarque 11
Soient $G \in \mathcal{G}_n$ et L tels que $\sigma = LABEL(G, L)$ aboutit. $\forall H \in \mathcal{G}_n$, on a :
$G \equiv H \ \Leftrightarrow\ \tau = LABEL(H, L)$ aboutit et $\sigma_i \mapsto \tau_i$ un isomorphisme.

Théorème 11
Soient $0 < p < 1,\ \rho = \max\{p, 1-p\}$ et $L = \lfloor -3\frac{\ln(n)}{ln(\rho)} \rfloor \in \mathbb{N}$.
On a la convergence $\mathbb{P}(LABEL(G_{n,p}, L)$ aboutit$) \to 1$.
Cela signifie que dans ce modèle, l'algorithme LABEL est pertinent puisqu'il permet de conclure avec certitude dans la plupart des cas (pour un coût $O(n^2)$ qui reste négligeable face à l'alternative non polynomiale à envisager si LABEL échoue).

Démonstration.
cf. notes manuscrites. □

2.3.2. Application 2 : Coloration d'un graphe.

Remarque 12 (Théorème de Vinzig)
On s'intéresse ici au nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorier les arrêtes d'un graphe G (sans jamais observer deux fois la même couleur sur un sommet), noté $\chi(G)$ par la suite.

Le théorème de Vinzig dit que, pour un graphe $G \in \mathcal{G}$ quelconque :

(1) $\Delta(G) \le \chi(G) \le \Delta(G) + 1$

(2) Si $\exists! v \in V(G), d(v) = \Delta(G)$, alors $\Delta(G) = \chi(G)$.

Si on combine ce résultat au théorème précédent, on trouve que pour p constant, $\mathbb{P}(\Delta(G_{n,p}) = \chi(G_{n,p})) \to 1$.

24/03

2.4. Connexité et k-connexité du graphe

Définition 8 (Graphe k-connexe)
Soit $k > 0$. G est k-connexe lorsque :

(1) $\forall P \subset E(G),\ |P| \le k-1,\ G \backslash P$ est connexe.

(2) $\exists P \subset E(G),\ |P| = k,\ G \backslash P$ n'est pas connexe.

Remarque 13
Si $G \in \mathcal{G}_n$ connexe, alors $\exists! 1 \le k < n,\ G$ est k-connexe.

Théorème 12
Soient $c \in \mathbb{R}$ et $p(n) = \frac{\ln(n)+c+o(1)}{n}$: on a $\mathbb{P}(G_{n,p}$ est connexe$) \sim \mathbb{P}(X_0 = 0)$.

Démonstration.
cf. notes manuscrites. □

Corollaire 1
Soit $p(n) = \frac{\ln(n)+c_n}{n}$. Par monotonie de la propriété de connexité :

$$\mathbb{P}(G_{n,p} \text{ est connexe}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } c_n \to -\infty \\ \exp(-e^{-c}) & \text{si } c_n \to c \in \mathbb{R} \\ 1 & \text{si } c_n \to +\infty \end{cases}$$

Remarque 14
Il découle de ce résultat que $p^*(n) = \frac{ln(n)}{n}$ est un seuil pour la propriété $\mathcal{P} = \{G \in \mathcal{G},\ G \text{ connexe}\}$.

Théorème 13
Soient $k > 0$, $c \in \mathbb{R}$ et $p(n) = \frac{\ln(n)+(k-1)\ln(\ln n)+c+o(1)}{n}$:
On a $\mathbb{P}(G_{n,p}$ est k-connexe$) \sim \mathbb{P}(X_{k-1} = 0)$.

Démonstration.
cf. notes manuscrites. □

Corollaire 2
Soit $p(n) = \frac{\ln(n)+(k-1)\ln(\ln n)+c_n}{n}$. Par monotonie de la propriété de k-connexité :

$$\mathbb{P}(G_{n,p} \text{ est } k\text{-connexe}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } c_n \to -\infty \\ \exp(-\frac{e^{-c}}{(k-1)!}) & \text{si } c_n \to c \in \mathbb{R} \\ 1 & \text{si } c_n \to +\infty \end{cases}$$

Chapitre 3

Convergence de variables aléatoires

On s'est déjà intéressé à plusieurs reprises à des notions de convergence en loi de variables aléatoires en utilisant des arguments moments des lois. Ces résultats s'avèrent en pratique assez difficiles à exploiter car fastidieux à calculer. Nous verrons plus tard en quoi la méthode de Stein-Chen mais commençons par quelques rappels sur les moments.

3.1. Méthode des moments

Définition 9
Soit $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$.

On suppose ici que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}$ a un moment d'ordre k et $\int_{\mathbb{R}} x^k d\mathbb{P}(x) = m_k$.

On dit que $\mathbb{P}$ est entièrement déterminée par ses moments lorsque c'est l'unique probabilité μ telle que $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}_\mu[x^k] = m_k$.

Ceci est par exemple vérifié lorsque $\mathbb{P}$ est à support fini.

Proposition 10
Soient $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des probabilités réelles et $\mathbb{P}$ déterminée par ses moments.

Si $\forall k \in \mathbb{N},\ \int x^k d\mathbb{P}_n(x) \to \int x^k d\mathbb{P}(x)$, alors la suite de lois $(\mathbb{P}_n)$ converge étroitement vers $\mathbb{P}$. Autrement dit, $\forall f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \int f d\mathbb{P}_n \to \int f d\mathbb{P}$.

31/03

Démonstration.
cf. notes manuscrites. □

Remarque 15
Il découle des hypothèses de la proposition et de l'inégalité de Jensen que $\forall k \in \mathbb{N},\ \int |x|^k d\mathbb{P}(x) \leq \int x^{2k} d\mathbb{P}(x) \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ est donc fini, intégrable à partir d'un rang $n(k)$.

Remarque 16
Ce résultat est assez exigeant en pratique, car il impose l'existence de moments de tout ordre et le calcul explicite de ces moments.

3.2. Distance en variation totale

Définition 10 (Distance en variation totale)
Soient P, Q deux mesure de probabilité sur un espace $(E, \mathcal{E})$.
$d_{VT}(P,Q) = \sup\limits_{A\in\mathcal{E}} [P(A) - Q(A)| = \sup\limits_{A\in\mathcal{E}} (P(A) - Q(A))$.
Si l'espace E est discret, $d_{VT}(P,Q) = \frac{1}{2} \sum\limits_{x\in E} |P(x) - Q(x)|$.
Plus généralement, si $dP = f d\lambda$ et $dQ = g d\lambda$ absolument continues pour une même mesure λ convenable, $d_{VT}(P,Q) = \frac{1}{2} \int\limits_E |f - g| d\lambda$.

Définition 11 (Couplage de mesures)
Soient P, Q des probabilités sur $(E, \mathcal{E})$. Soit $(X, Y) \in E^2$ une variable aléatoire (mesurable pour la tribu produit $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$) sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
On dit que (X, Y) est un couplage de P et Q si $X \sim P$ et $Y \sim Q$.
Autrement dit, $\forall A \in \mathcal{E},\ \mathbb{P}(X \in A) := \mathbb{P}\left((X,Y) \in A \times E\right) = P(A)$ et $\mathbb{P}(Y \in A) = Q(A)$.

Lemme 9
Soit (X, Y) un couplage de P et Q. On a $d_{VT}(P,Q) \leq \mathbb{P}(X \neq Y)$.

Démonstration.
Soit $A \in \mathcal{E}$. $P(A) - Q(A) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X\in A} - \mathbb{1}_{Y\in A}\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X\neq Y}\right]$. □

Proposition 11 (Couplage maximal)
Il existe un couplage (X, Y) tel que $d_{VT}(P,Q) = \mathbb{P}(X \neq Y)$.

Démonstration.
cf. notes manuscrites. □

3.3. Méthode de Stein (loi $\mathcal{N}$)

Définition 12 (Méthode générale)
Soit $\mathcal{H}$ une classe de fonctions mesurables de $E \to \mathbb{R}$. On cherche à borner la distance $d(P,Q) = \sup\limits_{h\in\mathcal{H}} \left| \int\limits_E f dP - \int\limits_E f dQ \right|$.

- Avec $\mathcal{H} = \{\chi_A,\ A \in \mathcal{E}\}$, on obtient la distance d_{VT} précédente.
- Généralement, P sera la loi compliquée qu'on veut étudier et Q une loi simple fixée.
- Par convention, on considère les variables aléatoires $W \sim P$ et $Z \sim Q$.

On va alors procéder comme suit :

(1) On cherche $A : D(A) \to \mathbb{R}^E$ un opérateur et $\mathcal{F}_A \subset D(A)$ un ensemble tels que pour toute variable aléatoire réelle Z, on ait :
$Z \sim Q \ \Leftrightarrow\ \forall f \in \mathbb{F}_A,\ \mathbb{E}[(Af)(Z)] = 0$
On dit alors que le couple $(A, \mathcal{F}_A)$ caractérise la loi Q.

(2) Pour tout $h \in \mathcal{H}$, on cherche une solution $f \in \mathcal{F}_A$ au système :
$Af(x) = h(x) - \mathbb{E}[h(Z)],\ x \in \mathbb{R}$
On a alors $\mathbb{E}[Af(W)] = \mathbb{E}[h(W) - h(Z)]$.

(3) On borne $\mathbb{E}[Af(W)]$ pour $f \in \mathcal{F}_A$, ce qui nous donne alors une majoration de $d(P,Q)$.

Remarque 17 (Cas $Q = \mathcal{N}(0,1)$)
Pour étudier la méthode de Stein, on s'intéresse à $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
Soit l'espace vectoriel $\mathcal{C}_{bd} := \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux},\ \mathbb{E}[|f'(Z)|] < \infty \right\}$.
On pose $\phi(z) = \int\limits_{-\infty}^{y} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$ la fonction de répartition de Z.

Proposition 12 (Lemme de Stein)
Soient $\mathcal{F}_A = \mathcal{C}_{bd}$ et $A(f) : x \mapsto f'(x) - x \times f(x)$. Alors $(A, \mathcal{F}_A)$ caractérise la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Démonstration.
cf. notes manuscrites. □

Remarque 18
La preuve de cette proposition implique également que lorsque $h \in \mathcal{C}^0_{pm}$ et $\mathbb{E}[|h(Z)|] < \infty$, le système $Af = h - \mathbb{E}[h(Z)]$ admet pour solution l'application $f : w \mapsto \exp(\frac{w^2}{2}) \int\limits_{-\infty}^{w} (h(x) - \mathbb{E}[h(Z)]) \exp(-\frac{x^2}{2}) dx \in \mathcal{C}_{bd}$.

On a donc résolu les deux premiers points de la méthode générale, le troisième étant dépendant de la loi de P.

07/04

Exemple 3

Soient X_i iid, centrées-réduites, telles que $\mathbb{E}[|X|^3] < \infty$. Soit $W = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Pour $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ on a la majoration :

$\mathbb{E}[f(W) - f(Z)]| = |\mathbb{E}[f'(W) - Wf(W)]| \leq \frac{||f''||_\infty}{\sqrt{n}} \left(\frac{\mathbb{E}[|X|^3]}{2} + \mathbb{E}[|X|] \right)$.

Si $C(\mathcal{H}) = \sup_{h \in \mathcal{H}} ||f''_h||_\infty < \infty$, alors on a $d_{\mathcal{H}}(W, \mathcal{N}(0,1)) \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$.

Si $\mathcal{H} = \{h \in \Delta^1,\ ||h'||_\infty \leq 1\}$, alors $C(\mathcal{H}) \leq 2$ et donc on a la convergence au sens de la distance de Wasserstein $d_W(W, \mathcal{N}) \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \to 0$ et donc en loi.

3.4. Méthode de Steins-Chen (loi $\mathcal{P}$)

Définition 13

Soit $\lambda > 0$. On pose $\mathcal{F} = l^\infty(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites bornées sur $\mathbb{N}$ et on définit l'opérateur $Af(n) = \lambda f(n+1) - nf(n)$. Si $f \in \mathcal{F}$, alors Af est intégrable contre la loi de poisson $\mathcal{P}(\lambda) = \left(\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}\right)$. On pose $\mathcal{H} = \{\chi_A,\ A \subset \mathbb{N}\}$.

De même que Z désignait une loi normale, on considère par la suite $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Lemme 10

$(\mathcal{F}, A)$ caractérise $\mathcal{P}(\lambda)$ parmi les lois discrètes.

Autrement dit, pour toute loi Q sur $\mathbb{N}$, on a l'équivalence :

$Q \sim \mathcal{P}(\lambda) \;\Leftrightarrow\; \forall f \in \mathcal{F},\ \lambda \times \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)Q(n) = \sum_{i=1}^{\infty} nf(n)Q(n).$

Démonstration.

cf. notes manuscrites. □

Lemme 11

Soit $h \in \mathcal{F}$:

Il existe une unique application $f \in \mathcal{F}$ telle que $f(0) = 0$ et $Af = h - \mathbb{E}[h(Y)]$.
f vérifie la relation :

$f(n+1) = \frac{n!}{\lambda^{n+1}} \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^i}{i!} (h(i) - \mathbb{E}[h(Y)]) = -\frac{n!}{\lambda^{n+1}} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} (h(i) - \mathbb{E}[h(Y)])$

Pour $h = \chi_A \in \mathcal{H}$, on a $f_A(n) = \frac{\mathbb{P}(Y \in A \cap [\![0, n-1]\!]) - \mathbb{P}(Y \in A)\mathbb{P}(Y \in [\![0, n-1]\!])}{\lambda \mathbb{P}(Y = n-1)}$.

Démonstration.

cf. notes manuscrites. □

Remarque 19 (Distance en variation totale)
$d_{VT}(X,Y) = \sup\limits_{A\subset\mathbb{N}} |\mathbb{P}(X\in A) - \mathbb{P}(Y\in A)| = \sup\limits_{A\subset\mathbb{N}} |\mathbb{E}[\lambda f_A(X+1) - Xf_A(X)]|$

Lemme 12
Soit $A \subset \mathbb{N}$:

(1) $||f_A||_\infty \leq \min\left(1, \sqrt{\frac{2}{e^\lambda}}\right)$

(2) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |f_A(n+1) - f_A(n)| \leq \frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda}) \leq 1$

Exemple 4
Soient $Y_i \sim \mathcal{B}(p_i)$ indépendants, $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i$, $X = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ et $X_i = X - Y_i$.

On a $|\mathbb{E}[\lambda f(X+1) - Xf(X)]| = |\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}[f(X+1) - f(X_i+1)]| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} p_i^2 \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$

D'où $d_{VT}(X,Y) \leq \max(p_i)$. En particulier, pour $p_i = \frac{\lambda}{n}$, $d_{VT}(X,Y) \leq \frac{\lambda}{n}$.

3.5. Cycles de taille k dans $G_{n,p}$, $p = \frac{\lambda}{n}$

Proposition 13
Soit $H \in \mathcal{G}$ un graphe à e_H arrêtes et v_H sommets. On définit $aut(H)$ son nombre d'automorphismes et $exc(H) = e_H - v_H \in \mathbb{Z}$ l'excès de H.

Soit X_H le nombre de copies de copies de H dans $G_{n,p}$:
$\mathbb{E}[X_H] = \binom{n}{v_H} \frac{v_H!}{aut(H)} p^{e_H} \sim \frac{1}{aut(H)} \lambda^{e_H} n^{-exc(H)}$

Démonstration.
cf. notes manuscrites. □

Corollaire 3
Soit H à $k \geq 4$ sommets et $exc(H) > 0$. On a $X_H \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$.

Corollaire 4
Soit H un k-cycle. On a $exc(H) = 0$ et $aut(H) = 2k$ d'où $\mathbb{E}[X_H] \sim \frac{\lambda^k}{2k}$.

14/04

Théorème 14
Soient $p = \frac{r}{\lambda}$, $r > 0$, H un cycle de taille $k \geq 3$, et X_H le nombre de k-cycles dans $G_{n,p}$. On a vu $\mathbb{E}[X_H] \to \lambda := \frac{\lambda^k}{2k}$. On a en fait $X_H \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$.

Démonstration.
cf. notes manuscrites. □

3.6. Existence d'un petit sous-graphe

Définition 14 (Densité d'un graphe)
Soit H un graphe quelconque. On définit $d_H = \frac{e_H}{v_H}$ sa densité.

Corollaire 5
L'évènement "H est un sous-graphe de $G_{n,p}$" est équivalent à "$X_H > 0$".

Si $p << n^{-\frac{1}{d_H}}$, alors $\mathbb{P}(X_H > 0) \to 0$.

Démonstration.
cf. notes manuscrites. □

Remarque 20
Le résultat précédent découle du premier moment $\mathbb{E}[X_H] \to 0$. Si $p >> n^{-\frac{1}{d_H}}$, alors $\mathbb{E}[X_H] \to \infty$ mais c'est insuffisant pour trouver une copie de H.

Définition 15
Soit $m_H = \max\{d_K,\ K \subset H\}$.
- H est équilibré : $m_H = d_H$
- H est strictement équilibré : $\forall K \subsetneq H,\ d_K < d_H$

Théorème 15
Soit H fixé avec $e_H \geq 1$. $n^{-\frac{1}{m_H}}$ est un seuil pour la propriété précédente :
- Si $p << n^{-\frac{1}{m_H}}$, alors $\mathbb{P}(X_H > 0) \to 0$
- Si $p >> n^{-\frac{1}{m_H}}$, alors $\mathbb{P}(X_H > 0) \to 1$

Démonstration.
cf. notes manuscrites. □

28/04

Théorème 16
Soit H un graphe strictement équilibré.

Si $n \times p^{m_H} \to c > 0$, alors $X_H \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}\left(\frac{c^{v_H}}{\mathrm{Aut}(H)}\right)$.

Démonstration.
cf. notes manuscrites. □

Théorème 17
Soit H un graphe fixé quelconque.

Si $n \times p^{m_H} \to +\infty$ et $n^2 \times (1-p) \to +\infty$ alors $\frac{X_H - \mathbb{E}[X_H]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_H)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.

3.7. Existence d'un grand sous-graphe

Définition 16 (Couplage sur un graphe)
Soit G un graphe (non orienté). On rappelle que les arrêtes $E(G) \subset V(G)^2$ sont des paires de sommets.

- $M \subset E(G)$ un couplage : $\forall e \neq f \in M,\ e \cap f = \emptyset$.
- M un couplage couvrant $S \subset V(G)$:
  M un couplage tel que $\forall v \in S,\ \exists e \in M,\ v \in e$.
- M un couplage parfait : un couplage couvrant $V(G)$.

Remarque 21
On rappelle qu'un graphe G est biparti s'il existe une partition $V(G) = A \sqcup B$ telle que $E(G) \subset A \times B$. On note alors $G = (A \sqcup B, V(G))$.

Définition 17 (Graphe aléatoire biparti)
On définit le graphe $G_{n,m,p}$ comme suit :

$A = [\![1, n]\!]$ et $B = [\![n+1, n+m]\!]$. $\forall i \in A,\ j \in B$, on définit $E_{i,j}$ qui vaut $\{i, j\}$ avec probabilité p et $\emptyset$ avec probabilité $1 - p$. Comme pour $G_{n,p}$, ces arrêtes aléatoires sont indépendantes entre elles.

Alors $G_{n,m,p} = (A \sqcup B, \{E_{i,j},\ (i,j) \in A \times B\})$.

Proposition 14 (Condition de Hall)
Soit $G = (A \sqcup B, E)$ biparti. Si $S \subset A$, on pose $N(S) \subset B$ les voisins de S.

Alors G admet un couplage couvrant $A \Leftrightarrow \forall S \subset A,\ \#N(S) \geq \#S$

Démonstration.
cf. notes manuscrites. □

05/05

Corollaire 6
Soit $G = (A \sqcup B, E)$ tel que $\#A = \#B$:

G possède un couplage parfait $\Leftrightarrow \forall S \subset A,\ \#N(S) \geq \#S$.

Démonstration.
Dans ce cas, un couplage parfait est exactement un couplage couvrant A. □

Théorème 18 (Seuil pour un couplage parfait dans le graphe biparti)
Supposons $p = \frac{\ln(n)+f(n)}{n}$ et $f(n) \to c \in \mathbb{R}$:

$\mathbb{P}(G_{n,n,p}$ a un couplage parfait$) \to \exp(-2e^{-c})$.

Par monotonie, si $f \to +\infty$ alors $\mathbb{P} \to 1$, et si $f \to -\infty$ alors $\mathbb{P} \to 0$.

En particulier, $p^* = \frac{\ln(n)}{n}$ est un seuil pour l'existence d'un couplage parfait dans le graphe aléatoire biparti.

Démonstration.
cf. notes manuscrites. □

Théorème 19 (Seuil pour un couplage parfait dans le graphe $G_{n,p}$)
Soit $p = \frac{\ln(n)+f(n)}{n}$, $f(n) \to c \in \mathbb{R}$:

$\mathbb{P}(G_{n,p}$ a un couplage parfait$) \to \exp(-e^{-c})$.

Par monotonie, si $f \to +\infty$ alors $\mathbb{P} \to 1$, et si $f \to -\infty$ alors $\mathbb{P} \to 0$.

En particulier, $p^* = \frac{\ln(n)}{n}$ est un seuil pour l'existence d'un couplage parfait dans le graphe aléatoire $G_{n,p}$.

Proposition 15 (Condition de Tutte)
Soit $G = (V, E)$ un graphe quelconque. Pour $S \subset V$, on pose $q(G \backslash S)$ le nombre de composantes connexes avec un nombre impair de sommets dans le graphe G privé des sommets de S et des arrêtes associées. On a alors :

G admet un couplage parfait $\Leftrightarrow \forall S \subset V,\ q(G\backslash S) \leq \#S$.

Théorème 20 (Paterson)
Soit G un graphe cubique (tous les sommets sont de degré 3) sans isthme (retirer une arrête au graphe ne change pas son nombre de composantes connexes). Alors G possède un couplage parfait.

Démonstration.
cf. notes manuscrites. □