Géométrie différentielle

Léo Gayral
basées sur le cours de Marco Mazzucchelli

2016/2017

14/09

1 Variétés différentiables

Définition (Variété topologique de dimension n)
$(M, \mathcal{O})$ un espace topologique, noté M^n, qui vérifie :
- Hausdorff : $\forall x \neq y \in M,\ \exists U, V \in \mathcal{O},\ x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$
- Base dénombrable d'ouverts qui engendre la topologie $\mathcal{O}$
- Localement euclidien de dimension n :
  $\forall x \in M, \exists \mathcal{V}(x) \in \mathcal{O}$ homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Définition (Variété différentielle de dimension n)
M^n une variété topologique qui vérifie :
- Recouvrement dénombrable d'ouverts $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$
- Atlas (famille de cartes) : $\{\phi_\alpha : U_\alpha \to \phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ un homéomorphisme$\}$
- Cartes compatibles :
  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme

Remarque (Unicité des structures différentiables)
Une variété différentiable M^n admet un unique Atlas maximal (pour l'inclusion), qui définit une structure différentielle sur la variété topologique $(M, \mathcal{O})$.
Une variété topologique admet toujours plusieurs structures différentielles.

Définition (Variété différentielle à bord)
M^n un espace topologique qui vérifie :
- Hausdorff
- Base dénombrable d'ouverts
- Atlas à bords : $\{\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$un homéomorphisme$\}$
  où $V_\alpha \in \mathcal{O}\, (\mathbb{H}^n = \{(x^1 ... x^n) \in \mathbb{R}^n, x^n \geq 0\})$

— Cartes compatibles

Définition ($\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme)
$F : V \subset \mathbb{R}^n \to W^m$ vérifie :
$\forall x \in V,\ \exists U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n),\ \exists \tilde{F} : U \to \mathbb{R}^m$ un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme tel que $\tilde{F}|_{U\cap V} = F|_{U\cap V}$

Définition (Bord de M^n)
$\partial M = \bigcup\limits_\alpha \{p \in U_\alpha,\ \phi_\alpha(p) \in \partial\mathbb{H}^n\}$

2 Application $\mathcal{C}^\infty$

Définition (Application $\mathcal{C}^\infty$ de la variété diff. M^m à N^n)
$F \in \mathcal{C}^0(M^m, N^n)$ vérifie :
$\forall \phi : U \to \mathbb{R}^m$ carte de M, $\forall \psi : V \to \mathbb{R}^n$ carte de N, $\psi \circ F \circ \phi^{-1}|_{\phi(U\cap F^{-1}(V))} \in \mathcal{C}^\infty$

3 Espace Tangent

Définition (Espace tangent de M^n en q)
T_qM est l'espace vectoriel des couples $[\phi, v \in \mathbb{R}^n]$ quotientés par :
$(\phi, v) \sim (\psi, w) \Leftrightarrow \mathrm{d}(\psi \circ \phi^{-1})_{\phi(q)}(v) = w$

Définition (Différentielle de $F \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ en $q \in M$)
$\mathrm{d}F_q : [\phi, v] \in T_qM \mapsto [\psi, w] \in T_{\phi(q)}N$ où $\mathrm{d}(\psi \circ F \circ \phi^{-1})_{\phi(q)}(v) = w$

21/09

Définition (Dérivation en $q \in M$)
$v : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ linéaire vérifie la règle de Leibnitz ($v(f \times g) = f(q) \times v(g) + v(f) \times g(q)$)
$\mathrm{Der}(q)$ l'espace vectoriel des dérivations en q

Remarque
Si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ est constance près de q, alors $\forall v \in \mathrm{Der}(q), v(f) = 0$.

Définition
Soit $F \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$:
$F^* : f \mapsto f \circ F$ un homéomorphisme d'algèbres $\mathcal{C}^\infty(N) \to \mathcal{C}^\infty(M)$.
$F_* : v \in \mathrm{Der}(q) \mapsto (v \circ F^*) \in \mathrm{Der}(F(q))$ s'identifie à la différentielle $dF_q : T_qM \to T_qN$.

Proposition ($T_qM = \mathrm{Der}(q)$)
Soit $x \in \mathbb{R}^n$:
$\Phi_x : (v^i) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} v^i \times (\partial_i \bullet)(x) \in \mathrm{Der}(x)$
Φ est un isomorphisme et dans le cas général on a la correspondance :
$[\phi, v] \in T_qM \mapsto (\phi^{-1})_* \circ (\Phi_{\phi(q)}(v)) \in \mathrm{Der}(q)$

Définition
$v \in T_qM, q \in U \subset M, \phi = (x^1...x^m) : U \to \mathbb{R}^m$ une carte.
Dans ces coordonnées locales, on a $v = \sum\limits_{i=1}^{n} v^i \times \frac{\partial \bullet}{\partial x^i}(q)$
Avec $\frac{\partial f}{\partial x^i}(q) := \partial_i(f \circ \phi^{-1})(\phi(q))$
Soient de plus $F : M^m \to N^n$, $F(q) \in V \subset N$ et $\psi = (y^1...y^n) : V \to \mathbb{R}^n$.
$\psi \circ F \circ \phi^{-1} = (F^1...F^n)$
$dF_q = (\partial_j F^i(\phi(q)))$ la matrice Jacobienne de F dans les coordonnées locales (x_j), (y_i).

4 Submersions, immersions, plongements

Définition (Submersion)
$F : M^m \to N^n$ telle que $\forall q \in M, dF_q : T_qM \to T_{F(q)}N$ surjective ($\Rightarrow m \geq n$)

Définition (Immersion)
$F : M^m \to N^n$ telle que $\forall q \in M, dF_q : T_qM \to T_{F(q)}N$ injective ($\Rightarrow m \leq n$)

Définition (Difféomorphisme local)
$F : M^m \to N^n$ une submersion et une immersion, $\forall q \in M, dF_q$ est bijective ($\Rightarrow m = n$)

Théorème (Inversion locale)
$dF_q : T_qM \to T_{F(q)}N$ bijective $\Rightarrow \exists U = \mathcal{V}(q) \subset M$ tel que $F : U \to F(U)$ un difféomorphisme

Définition (Plongement)
F une immersion et un homéomorphisme sur son image.
$F(M)$ est alors une sous-variété de N, de codimension $\dim(N) - \dim(M)$.

Remarque
Si F est simplement une immersion, $F(M)$ est une sous-variété "immerse".

Définition (Rang)
Rang de $F : M \to N$ en q : rang de dF_q.

Théorème (Rang constant)
F de rang constant r sur $U = \mathcal{V}(q) \subset M$.
Alors $\exists \phi : U \to \mathbb{R}^m$ et $\exists \psi : V \to \mathbb{R}^n$ deux cartes telles que $\psi \circ F \circ \phi^{-1}(x^1...x^m) = (x^1...x^r, 0...0)$.

28/09

Corollaire
$F : M^m \to N^n$ une submersion. Dans des coordonnées locales adaptées, $F(x_1...x_m) = (x_1...x_n)$.
$F : M^m \to N^n$ une immersion. Dans des coordonnées locales adaptées, $F(x_1...x_m) = (x_1...x_m, 0...0)$.

Remarque
$F : M^m \to N^n$ une immersion. $\forall q \in M, \exists U = \mathcal{V}(q) \subset M$ tel que $F : U \to N$ un plongement.

Définition (Point critique de $F \in \mathcal{C}^\infty(M^m, N^n)$)
$q \in M$ vérifie $dF_q : T_qM \to T_{F(q)}N$ non surjectif. On dit sinon que q est un point régulier.
$\mathrm{Crit}(F)$, l'ensemble des points critiques, est fermé dans M.
$y \in N$ est une valeur régulière si $F^{-1}(\{y\}) \cap \mathrm{Crit}(F) = \emptyset$.

Proposition
Soit $y \in N$ valeur régulière de F. Alors $F^{-1}(y) \subset M$ est une sous-variété de M de dimension $m - n$.
(sous-variété $\Leftrightarrow$ image d'un plongement $\Leftrightarrow$ carte plane en coordonnées locales)

Corollaire
$\forall q \in F^{-1}(y), T_q(F^{-1}(y)) = \ker(dF_q)$

5 Théorème de Sard

Définition (Ensemble négligeable dans M^m)
$X \subset M$ est dit négligeable si pour toute carte (ϕ, U), $\mu_m(\phi(X \cap U)) = 0$ où μ_m est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$.

Remarque
Soit $N \subset \mathbb{R}^m$.
Si $\forall x \in \mathbb{R}, \mu_{m-1}(N \cap \{x\} \times \mathbb{R}^{m-1}) = 0$, alors $\mu_m(N) = 0$.
Si $\mu_m(N) = 0$ et $F \in \mathcal{C}^\infty(N, \mathbb{R}^m)$ alors $\mu_m(F(N)) = 0$.

Théorème
Soit $F \in \mathcal{C}^\infty(M^m, N^n)$. $F\,(\mathrm{Crit}(F))$ est négligeable dans N.

05/10

6 Partitions de l'unité

Définition (Partition de l'unité subordonnée au recouvrement (U_α) de M^m)
$(\rho_\alpha) \subset \mathcal{C}^\infty(M, [0,1])$ vérifie :

- $\forall \alpha \in A, \mathrm{supp}(\rho_\alpha) \subset U_\alpha$
- $(\mathrm{supp}(\rho_\alpha))$ un recouvrement localement fini ($\forall x, \exists U = \mathcal{V}(x), \{\alpha \in A,\ U \cap \mathrm{supp}(\rho_\alpha) \neq \emptyset\}$ fini)
- $\forall x \in M,\ \sum\limits_{\alpha \in A} \rho_\alpha(x) = 1$

Théorème
Pour tout recouvrement (U_α) de M^m, il existe une partition de l'unité subordonnée.

12/10

7 Théorème de Whitney

Théorème (Approximmation par immersion)
Soit $F \in \mathcal{C}^\infty(M^m, \mathbb{R}^n),\ 2m \leq n : \forall \epsilon > 0,\ \exists G : M \to \mathbb{R}^n$ une immersion telle que $||G - F||_\infty < \epsilon$.
Si $2m < n$, on peut trouver unte telle fonction G injective.

Définition (Application propre)
$f : A \to B$ vérifie : $\forall K \subset B$ compact, $f^{-1}(K) \subset A$ compact.

Théorème (Whitney faible)
Toute variété M^m admet une immersion dans $\mathbb{R}^{2m}$ et un plongement propre dans $\mathbb{R}^{2m+1}$.

Addendum TD : Sous-variétés plongées et espaces tangents

Soient N une variété de dimension n : $T_pM = \{\gamma'(0), \gamma \in \mathcal{C}^\infty(]-1;1[, M), \gamma(0) = p\}$.
Soit $M \subset N$ une sous-variété de dimension m. Les caractérisations suivantes sont équivalentes :

Définition (Redressement local)
$\forall p \in M,\ \exists (U, \phi)$ une carte de N autour de p telle que $\phi(U \cap M) = \phi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m})$.
Alors $T_pM = (d\phi_p)^{-1}\left(\mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m}\right)$.

Définition (Zéros d'une submersion)
$\forall p \in M,\ \exists (U, \phi)$ une carte de N autour de p et $f : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ une submersion telles que $U \cap M = f^{-1}(0)$.
Alors $T_pM = \ker(df_p)$.

Définition (Image d'un plongement)
$\forall p \in M,\ \exists U = \mathcal{V}_N(p)$ et $h : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to N$ un plongement tels que $h(0) = p$ et $U \cap M = h(\Omega)$.
Alors $T_pM = \mathrm{im}(dh_0)$.

Définition (Graphe local)
$\forall p \in M,\ \exists (U, \phi)$ une carte de N autour de p et $F : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ telles que $\phi(U \cap M) = \mathrm{graphe}(F)$.
En particulier, $\phi(p) = (\omega, F(\omega))$. Alors $T_pM = \mathrm{graphe}(dF_\omega)$.

19/10

8 Transversalité

Définition
$F : M^m \to N^n$ est transverse à la sous-variété plongée $S^s \subset N^n$ ($F \pitchfork S$) :
$\forall x \in F^{-1}(S),\ T_{F(x)}S + dF_x(T_xM) = T_{F(x)}N.$

Théorème
Si $F \pitchfork S$, alors $F^{-1}(S)$ est une sous-variété plongée de M et $\mathrm{codim}(F^{-1}(S), M) = \mathrm{codim}(S, N)$.

Définition
Q^q et S^s deux sous-variétés de N^n se coupent transversalement ($Q \pitchfork S$) :
$\forall x \in Q \cap S,\ T_xQ + T_xS = T_xN.$
Si on note i l'injection canonique de Q dans N, alors $Q \pitchfork S \Leftrightarrow i \pitchfork S$.

Corollaire
Si $Q \pitchfork S$, alors $Q \cap S$ est une sous-variété de N et $\mathrm{codim}(Q \cap S, N) = \mathrm{codim}(Q, N) + \mathrm{codim}(S, N)$.

9 Rappels d'algèbre multilinéaire

Soit $V = \mathbb{R}^n$:
Une base (e_i) de V induit une base duale (e^i) de $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$. Réciproquement, (e^i) base de V^* induit une base préduale (e_i) de V. Cet isomorphisme n'est pas canonique.
$V \cong V^{**}$ de façon canonique via $x \mapsto (\phi \in V^* \mapsto \phi(x))$.
$\mathcal{L}(V, W) \cong \mathcal{L}(W^*, V^*)$ de façon canonique via $F \mapsto (F^* : \phi \mapsto (\phi \circ F))$.

Définition
$\omega_i \in V_i^*$ des formes linéaires : $\omega_1 \otimes ... \otimes \omega_n(v_1, ..., v_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} \omega_i(v_i)$ définit une forme multilinéaire.

Proposition
Pour $i \leq n$, $(e_i^j)_{j \leq d_i}$ une base de V_i^*.
Alors $(\bigotimes\limits_{i=1}^{n} e_i^{j_i})_{(j_i) \leq (d_i)}$ est une base de $\mathrm{Mult}(V_1, ..., V_n, \mathbb{R})$.

Définition
$V_1 \bigotimes ... \bigotimes V_n = \mathrm{Mult}(V_1^*, ..., V_n^*, \mathbb{R})$

Proposition
$\bigotimes\limits_{i=1}^{n} (V_i^*) \cong \mathrm{Mult}(V_1, ..., V_n, \mathbb{R}) \cong \mathcal{L}(\bigotimes\limits_{i=1}^{n} V_i, \mathbb{R}) = (\bigotimes\limits_{i=1}^{n} V_i)^*$

Définition
$\mathcal{T}^{p,q}(V) = \bigotimes\limits_{i=1}^{p} V \bigotimes\limits_{j=1}^{q} V^*$.
$\mathcal{T}(V) = \bigoplus\limits_{p,q \in \mathbb{N}} \mathcal{T}^{p,q}(V)$.
$(\mathcal{T}(V), \bigotimes)$ est une algèbre dite tensorielle.

10 Algèbre extérieure

Soit S_n l'espace des transposition : $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^n$ avec n la parité du nombre de transpositions qui engendre σ.

Définition (Formes n-linéaires alternées)
$\Lambda^n V^* \subset \bigotimes\limits_{i=1}^{q} (V^*)$ l'ensemble des applications ω telles que :
$\forall \sigma \in S_n,\ \forall v_1 ... v_n \in V,\ \omega(v_1, ..., v_n) = \mathrm{sgn}(\sigma) \times \omega(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(n)})$.

Proposition
$\omega \in \Lambda^n V^* \Leftrightarrow \forall (v_i) \in V^n$ liée, $\omega(v_i) = 0$.

Remarque
$\Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$ et si $q > \dim V$, alors $\Lambda^q V^* = \{0\}$.

Proposition
Soit $I = \{(i_j)_{j\leq q}, 1 \leq i_1 < ... < i_q \leq n\}$ où $\dim V = n$: $\#I = \binom{n}{q}$.
Alors $\psi : \omega \mapsto \Big(\omega((e_{i_j})_{j\leq n})\Big)_{i\in I}$ une bijection de $\Lambda^n V^* \to \mathbb{R}^{\#I}$.

26/10

Remarque
$F \in \mathcal{L}(V, W)$ permet de définir $F^* : \omega \in \Lambda^k(W^*) \mapsto (v_1...v_k \mapsto \omega(F(v_1)...F(v_k))) \in \Lambda^k(V^*)$.

Proposition
Si $n = \dim(V)$, $\omega \in \Lambda^n(V)$ et $F \in \mathcal{L}(V)$, alors $F^*(\omega) = \det(F) \times \omega$.

Définition
Soit $\mathrm{Alt} \in \mathcal{L}(\bigotimes^q V^*, \Lambda^q(V^*))$ définie par :
$\mathrm{Alt}(\alpha) = (v_1...v_q \mapsto \frac{1}{q!} \times \sum_{\sigma\in S_q} \epsilon(\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}...v_{\sigma(q)})$.
Alors $\alpha \in \bigotimes^q V^*$ est alternée $\Leftrightarrow \alpha = \mathrm{Alt}(\alpha)$.

Définition (Produit extérieur)
Soient $\alpha \in \Lambda^p V^*$ et $\beta \in \Lambda^q V^*$:
Produit extérieur de α et β : $\alpha \wedge \beta := \frac{(p+q)!}{p!q!}\mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta) \in \Lambda^{p+q} V^*$.

Proposition
On a les résultats suivants :
- $\forall \alpha, \beta \in V^*, \alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha$
- $\alpha \in \Lambda^p V^*$ et $\beta \in \Lambda^q V^*$: $\beta \wedge \alpha = (-1)^{pq} \alpha \wedge \beta$
- Soit (e^i) une base de V^* : $(e^{i_1} \wedge ... \wedge e^{i_q})_{i\in I}$ une base de $\Lambda^q V^*$.
- $v_1...v_q \in V,\ \omega_1...\omega_q \in V^*$: $(\wedge \omega_i)(v_1...v_q) = \det(\omega_i(v_j))_{1\leq i,j\leq q}$.

Définition (Algèbre extérieure)
Soit $\Lambda(V^*) = \bigoplus_{q=0}^{n} \Lambda^q(V^*)$.
$(\Lambda(V^*), +, \wedge)$ est un anneau, une algèbre.

11 Fibré vectoriel

Définition
Soient deux variétés M^m (base du fibré) et E^{m+r} (espace total).
$\pi : E \to M$ la projection, le fibré, vérifie :

— π lisse, surjective
— π est localement triviale :
$\forall q \in M,\ \exists U = \mathcal{V}(q),\ \exists \chi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme
— De plus, $\forall p \in U,\ \chi : \pi^{-1}(p) \to \{p\} \times \mathbb{R}^r$ est un isomorphisme linéaire
— Soit $\tilde{\pi} : (u, v) \in U \times \mathbb{R}^r \mapsto u \in U$ la projection naturelle :
$\pi = \tilde{\pi} \circ \chi$ (diagramme commutatif).

Remarque
On dit que χ est une trivialisation locale en q.

Définition (Fibré tangent)
Soit M^m une variété différentielle : $TM = \bigsqcup_{q \in M} T_qM$
On le munit de $\pi : TM \to M$ tel que $\pi^{-1}(p) = T_pM$.
Dans une carte (ϕ, U), on a $\chi : [v, \phi] \in T_pM \mapsto (p, v)$ une trivialisation locale sur $\pi^{-1}(U)$.

Définition (Morphisme de fibrés)
Soient $\pi_1 : E_1 \to M_1$ et $\pi_2 : E_2 \to M_2$ deux fibrés :
$(F, f) \in \mathcal{C}^\infty(E_1, E_2) \times \mathcal{C}^\infty(M_1, M_2)$ est un morphisme de fibrés si :

— $\pi_2 \circ F = f \circ \pi_1$ (diagramme commutatif)
— $\forall q \in M_1,\ F|_{\pi_1^{-1}(q)} : \pi_1^{-1}(q) \to \pi_2^{-1}(f(q))$ un morphisme linéaire

Définition (Isomorphisme de fibrés)
(F, f) ci-dessus vérifie de plus :

— f bijective
— $F|_{\pi_1^{-1}(q)}$ un isomorphisme linéaire

Définition (Fibré trivial)
$\pi : E \to M$ est trivial $\Leftrightarrow$ isomorphe à $\tilde{\pi} : M \times \mathbb{R}^r \to M$
De façon équivalente, $\pi : E \to M$ admet une trivialisation globale.

Proposition
Soit (U_α) un recouvrement de M associé à une famille de trivialisations (χ_α).
Alors $\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}$ un isomorphisme linéaire sur $U_{\alpha,\beta} \times \mathbb{R}^r$ (avec $U_{\alpha,\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$).
Autrement dit, $\exists g_{\alpha,\beta} : U_{\alpha,\beta} \to GL_r(\mathbb{R})$ telle que $\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}(q, v) = (q, (g_{\alpha,\beta}(q))(v))$.
$g_{\alpha,\beta}$ est appelée fonction de transition.
$g_{\alpha,\beta} \times g_{\beta,\alpha} = Id$ et plus généralement, sur $U_{\alpha,\beta,\gamma}$, on a $g_{\alpha,\beta} \times g_{\beta,\gamma} = g_{\alpha,\gamma}$.

La donnée d'une famille de fonctions de transitions $(g_{\alpha,\beta})$ équivaut à celle d'une famille de trivialisations (χ_α),
et détermine entièrement le fibré vectoriel (à isomorphisme près).

12 Opérations linéaires sur les fibrés vectoriels

Soit le fibré $E^{m+r} \to M$ déterminé par les fonctions de transitions $(g_{\alpha,\beta})$ sur un recouvrement (U_α) de M.
$(E')^{l+r} \to M$ déterminé par $(g'_{\alpha,\beta})$ sur le même recouvrement.
On peut définir les fibrés suivants :

- $(E \bigoplus E')^{l+r+m} \to M$ déterminé par $(g_{\alpha,\beta} \oplus g'_{\alpha,\beta})$.
- $(E \bigotimes E')^{lr+m} \to M$ déterminé par $(g_{\alpha,\beta} \otimes g'_{\alpha,\beta})$.
- $E^* \to M$ déterminé par $(({}^t g_{\alpha,\beta})^{-1})$.
- Tiré en arrière du fibré $E \xrightarrow{\pi} M$ par $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$:
  Soient $f^*E := \{(q, e) \in M \times E, e \in \pi^{-1}(f(q))\}$, $F : (q, e) \in f^*E \mapsto e$ et $\tilde{\pi} : (q, e) \in f^*E \mapsto q$.
  Alors $f^*E \xrightarrow{\tilde{\pi}} M$ un fibré vectoriel et (F, f) un morphisme de fibrés.
  Le tiré en arrière est déterminé par les transitions $(g_{\alpha,\beta} \circ f : f^{-1}(U_{\alpha,\beta}) \to GL_r(\mathbb{R}))$.

16/11

Remarque
Si E trivial, alors f^*E trivial.

Proposition
Soit $E \to [0, 1] \times M$ un fibré vectoriel. Alors $E|_{\{0\}\times M} \cong E|_{\{1\}\times M}$ isomorphes.

Lemme
Si $E|_{[0,\frac{1}{2}]\times M}$ et $E|_{[\frac{1}{2},1]\times M}$ triviaux, alors E est trivial.

Lemme
Il existe un recouvrement $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ de M tel que $\forall \alpha \in A$, le fibré $E|_{[0,1]\times U_\alpha}$ est trivial.

Corollaire
Soient $E \xrightarrow{\pi} N$ un fibré vectoriel et $f_0, f_1 : M \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} N$ homotopes ($H \in \mathcal{C}^0([0, 1] \times M, N)$, $f_x = H(x, \bullet)$).
Alors les tirés en arrière $f_0^*E \cong f_1^*E$ sont isomorphes.

Corollaire
Si M contractile (Id_M homotope à une constante), alors tout fibré $E \to M$ est trivial.

13 Réduction du groupe de structure

Définition (Groupe de structure)
Soient des fonctions de transitions $g_{\alpha,\beta} \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha \cap U_\beta, GL_n(\mathbb{R}))$ sur le fibré $E \xrightarrow{\pi} M$.
On dit que $GL_n(\mathbb{R})$ est le groupe de structure du fibré.

Définition (Métrique Riemannienne)
On fixe une partition de l'unité (ρ_α). Sur la trivialisation locale (U_α, χ_α) :
On note $\pi_2 : (x, y) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to y$ la projection sur la seconde coordonnée.
Pour $v, w \in \pi^{-1}(U_\alpha)$, on définit $< u, v >_\alpha := < \pi_2 \circ \chi_\alpha(u), \pi_2 \circ \chi_\alpha(v) >_{\mathbb{R}^n}$.
Pour $q \in M$ fixé et $v, w \in \pi^{-1}(q)$, on définit $g_q(v, w) = \sum\limits_{\alpha \in A} \rho_\alpha(q) < v, w >_\alpha$.
g définit une métrique riemannienne lorsque $E = TM$ est le fibré tangent.

Remarque
Soit (e_i) la bon canonique de $\mathbb{R}^n$. Sur U_α fixé :
On pose $v_i(q) := \chi_\alpha^{-1}(q, e_i)$ une section de χ_α. Pour tout $q \in U_\alpha$, $(v_i(q))$ une base de $\mathbb{R}^n$.
La donnée des sections (v_i) de χ_α équivaut à la donnée de χ_α.
En appliquant Gram-Schmidt aux applications $(v_i(q))$, on peut en déduire un repère $(w_i(q))$ orthonormal.

Proposition
Tout fibré vectoriel $E \to M$ admet une famille de fonctions de transition $g_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} O_n(\mathbb{R})$.
On peut donc ramener le groupe de structure dans $O_n(\mathbb{R})$.

14 Champ de vecteurs, formes différentielles

Par la suite, on considère TM le fibré tangent et $T^*M = (TM)^*$ le fibré cotangent.

Proposition
Avec la métrique riemannienne précédente, on a l'isomorphisme : $e \in TM \simeq g(e, \bullet) \in T^*M$.

Définition (Fibré de tenseur du type (p,q))
$T^{(p,q)}M := \bigotimes^{p} TM \bigotimes^{q} T^*M$

Définition (Fibré des k-formes alternées)
On le note $\Lambda^k(T^*M)$.
Ainsi, $\Lambda^0(T^*M) = M \times \mathbb{R}$ et $\Lambda^1(T^*M) = T^*M$.

Définition (Sections sur un fibré vectoriel $E \to M$)
$\Gamma(E) = \{s \in \mathcal{C}^\infty(M, E), \pi \circ s = Id_M\}$ l'ensemble des sections.
Si $s, t \in \Gamma(E)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, alors $fs + t \in \Gamma(E)$.

Définition
Champ de vecteurs : $X \in \Gamma(TM)$.
Champ de tenseurs de type (p,q) : $\tau \in \Gamma(T^{(p,q)}M)$.
k-forme différentielle : $\omega \in \Gamma(\Lambda^k M)$.

Définition (Champ de vecteur en coordonnées locales)
Dans des coordonnées locales, on a la carte $\phi = (x^1...x^m)$ sur $U \subset M$.
On pose $\frac{\partial}{\partial x^i}|_q = d\phi_q^{-1}(e_i)$.
$(\frac{\partial}{\partial x^i}|_q)$ définit une base de T_qM.
Un champ de vecteurs se décompose localement en $X(q) = \sum\limits_{i=1}^{m} X^i(q) \times \frac{\partial}{\partial x^i}|_q$ avec $X^i : U \overset{\mathcal{C}^\infty}{\to} \mathbb{R}$.
On pose de même $dx^i|_q$ la base duale de T_qM^* $(\forall q \in U, dx^i|_q \times \frac{\partial}{\partial x^j}|_q = \delta_{i,j})$.
Une k-forme différentielle se décompose localement en $\omega = \sum\limits_{i \in I_k} \omega_i \times dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$ avec $\omega_i : U \overset{\mathcal{C}^\infty}{\to} \mathbb{R}$

Remarque (Compatibilité avec les changements de carte)
Soient $\phi = (x^i)$ et $\psi = (y^i)$ deux cartes sur U.
$\frac{\partial}{\partial x^i}|_q = \sum\limits_{j=1}^{m} \partial_i(y^j \circ \phi^{-1})(q) \times \frac{\partial}{\partial y^j}|_q$ (autrement dit, $(\frac{\partial}{\partial x^i})|_q = Jac(\psi \circ \phi^{-1})(q) \times (\frac{\partial}{\partial y^i})|_q$).
En identifiant U à $\phi(U)$, on a : $\frac{\partial}{\partial x^i}|_q = \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}|_q \times \frac{\partial}{\partial y^j}|_q$

15 23/11

16 EDO sur une variété

On considère par la suite un chemin $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, M)$.

Remarque
Soit $t \in \mathbb{R}$: on note $\frac{\partial}{\partial t} \in T_t\mathbb{R}$ l'élément associé à 1 via $T_t\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$.
Pour une variété M et une carte (U, ϕ) avec $\phi = (x^1 ... x^m)$, on a $\frac{\partial}{\partial x^j} := \phi^{-1}(e^j)$ où (e^j) est la base canonique de $\mathbb{R}^m$.

Définition (Vecteur vitesse)
On a $t \overset{\mathcal{C}^\infty}{\mapsto} d\gamma_t \in \mathcal{L}(T_t\mathbb{R}, T_{\gamma(t)}M)$. On définit la dérivée, le vecteur vitesse de γ en t :
$\dot{\gamma}(t) = d\gamma_t(\frac{\partial}{\partial t}) \in T_{\gamma(t)}M$
Dans la carte $\phi = (x^1 ... x^n)$ autour de $\gamma(t)$, on a $\phi \circ \gamma = (\gamma^1 ... \gamma^n)$. Alors on peut écrire :
$\dot{\gamma}(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} \left(t \mapsto \gamma^j(t)\right)'(t) \times \frac{\partial}{\partial x^j}|_{\gamma(t)}$

Remarque
On a $t \overset{\mathcal{C}^\infty}{\to} \dot{\gamma}(t)$, ou autrement dit $\dot{\gamma} \in \Gamma(\gamma^* TM)$.

Définition (Équation différentielle Ordinaire)
Une EDO est la donnée de l'équation $\dot{\gamma} = X(\gamma)$ (autrement dit $\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}$) associée au champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$.

Proposition (Flot de X)
$\forall q \in M,\ \exists a_q < 0 < b_q,\ U := \bigcup\limits_{q \in M}]a_q, b_q[\times \{q\} \subset \mathbb{R} \times M$ et $\exists \phi : (t, q) \in U \mapsto \phi_t(q) \in M$ tels que :

- $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(]t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2[, M)$ solution de l'EDO $\Leftrightarrow\ ] - \delta_1, \delta_2[\times \{\gamma(t_0)\} \subset U$ et $\gamma(t) = \phi_{t-t_0}(\gamma(t_0))$
- $\phi_0 = Id_M$ et lorsque ce qu'on écrit est défini, $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$
- $\forall t \in \mathbb{R}$, si on note U_t la tranche de U telle que $\{t\} \times U_t = U \cap (\{t\} \times M)$, alors $U_t \subset M$ ouvert.
- $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi_t : U_t \to U_{-t}$ est un difféomorphisme d'inverse $\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$.

Corollaire (Explosion en temps fini)
Si $\operatorname{supp}(X) := \overline{\{q \in M, X_q \neq 0 \in T_qM\}}$ est compact, alors $U = \mathbb{R} \times M$.
La condition sur $\operatorname{supp}(X)$ est en particulier vérifiée lorsque M est fermée.

17 Dérivée de Lie

Définition (Tiré en arrière d'un champ de tenseurs de $T^{(0,q)}M$)
Soit $\tau \in \Gamma(T^{(0,q)}M)$: $\forall x \in M,\ \tau_x$ définit une forme q-linéaire sur T_xM.
Soit $F \in \mathcal{C}^\infty(M,N)$. On définit le tiré en arrière $F^*\tau \in \Gamma(T^{(0,q)}N)$ par :
$\forall x \in N,\ \forall v_1 ... v_q \in T_xN,\ (F^*\tau)_x(v_1...v_q) := \tau_{F(x)}(dF_x(v_1)...dF_x(v_q))$.

Définition (Tiré en arrière d'un champ de vecteurs de TM)
Soient $X \in \Gamma(TM)$ et $F \in \mathcal{C}^\infty(N,M)$ un difféomorphisme sur son image. On définit $F^*X \in \Gamma(TN)$ par :
$\forall x \in N,\ F^*X_x := d(F^{-1})_{F(x)}(X_{F(x)}) = (dF_x)^{-1}(X_{F(x)})$

Définition (Dérivée de Lie)
Soient $\tau \in \Gamma(T^{(p,q)}M)$ et $V \in \Gamma(TM)$ de flot ϕ. On définit $\mathcal{L}_V\tau \in \Gamma(T^{(p,q)}M)$ par :
$\forall x \in M,\ (\mathcal{L}_V\tau)_x := \frac{d}{dt}\left[t \mapsto (\phi_t^*\tau)_x\right]|_{t=0}$

18 Crochet de Lie

Remarque
On a établi la bijection $T_xM \cong \mathrm{der}(x)$ via $v \mapsto (f \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) \mapsto df_x(v) \in \mathbb{R})$.
On peut de même identifier $V \in \Gamma(TM)$ à l'application $\mathbb{R}$-linéaire, qui vérifie la règle de Leibnitz :
$V : f \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) \mapsto (x \mapsto df_x(V_x)) \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$.

Définition (Crochet de Lie)
Soient V et $W \in \Gamma(TM)$ (en tant que dérivations) :
$[V,W] := V \circ W - W \circ V \in \Gamma(TM)$
Dans une carte (U,ϕ), on note $V^i \in \mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R})$ les coordonnées de V dans la base $(\frac{\partial}{\partial x^j}|_x)$ (fonction de $x \in U$).
Dans cette carte, $[V,W]_x = \sum\limits_i (d_xW^i(V_x) - d_xV^i(W_x)) \times \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$

Proposition
$[\bullet,\bullet]$ est bilinéaire
Antisymétrique : $[V,W] + [W,V] = 0$
Identité de Jacobi : $[V,[W,Z]] + [W,[Z,V]] + [Z,[V,W]] = 0$

Proposition
Soient $V, W \in \Gamma(TM)$: $[V,W] = \mathcal{L}_V W$

Remarque
$V = W \Leftrightarrow \forall U \subset M,\ \forall x \in U,\ \forall f \in \mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R}),\ df_x(V_x) = df_x(W_x)$

Corollaire
Soient ν_t le flot de V et ω_t le flot de W :
$[V, W] = 0 \Leftrightarrow \nu_t \circ \omega_s = \omega_s \circ \nu_t$ dès que cela a un sens.

30/11

19 Formes différentielles

Remarque
Dans une carte $\phi = (x^1...x^m)$ sur $U \subset M^m$, la p-forme différentielle $\sigma \in \Omega^p = \Gamma(\Lambda^p(T^*M))$ se décompose en :
$\sigma = \sum\limits_{i \in I_p} \sigma_i \times dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_p}$ avec $\sigma_i \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ et dx^j le dual de $\frac{\partial}{\partial x^j}$.
On étend la définition des σ_i à $i_1...i_p$ quelconques, non ordonnés, par $\sigma_i = 0$ si i non injective.
Pour i injective désordonnée, $\sigma_i = \epsilon(s) \times \sigma_{s(i)}$ avec $s \in S_p$ la permutation qui réordonne i.
Soit une famille $v_i = \sum\limits_{j=1}^{m} v_i^j \times \frac{\partial}{\partial x^j}|_x \in T_xM$. Alors $\sigma(v_1...v_m) = \sum\limits_{i_1,...,i_p=0}^{m} \sigma_i(x) \times v_1^{i_1} \times ... \times v_p^{i_p}$.

Définition
Soit $F : N \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} M$. On définit $F^* : \Omega^p(M) \to \Omega^p(N)$ par :
$\forall x \in N, \forall v_1, ..., v_p \in T_xN,\ (F^*\sigma)_x(v_1...v_p) := \sigma_{F(x)}(dF_x(v_1)...dF_x(v_p))$

Proposition
On a les résultats :
- Soient $\alpha \in \Omega^p(M)$ et $\beta \in \Omega^q$. Alors $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{p+q}$ et $F^*(\alpha \wedge \beta) = (F^*\alpha) \wedge (F^*\beta)$.
- $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$
- Soient $\sigma = \sum\limits_{i \in I_p} \sigma_i \times dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_p} \in \Omega^p(M)$ et $F = (F^1...F^m) : N \to M$,
  dans les coordonnées locales $(y^1...y^n)$ sur l'ouvert $V \subset N^n$.
  Alors $F^*\sigma = \sum\limits_{i \in I_p} \sum\limits_{j_1...j_p=0}^{n} (\sigma_i \circ F) \times \frac{\partial F^{i_1}}{\partial y^{j_1}} ... \frac{\partial F^{i_p}}{\partial y^{j_p}} \times (dy^{i_1} \wedge ... \wedge dy^{i_p})$.

20 Orientation

Définition (Orientation de $\mathbb{R}^n$)
Deux bases (v_i) et (w_i) de $\mathbb{R}^n$ définissent la même orientation $\Leftrightarrow \exists A \in GL_n(\mathbb{R}),\ \det(A) > 0,\ \forall 1 \leq i \leq n,\ A \times v_i = w_i$

Remarque
Soit (v_i) base de $\mathbb{R}^n$. On pose (v^i) sa base duale. Alors $\nu = v^1 \wedge ... \wedge v^n \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n)^*$.
En particulier, $\nu(w_1...w_n) = \nu(Av_1...Av_n) = \det(A) \times \nu(v_1...v_n) = \det(A)$.

Proposition
De façon équivalente, ω et $\nu \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ définissent la même orientation $\Leftrightarrow \exists \lambda > 0,\ \omega = \lambda \times \nu$.
ω et la base (v_i) définissent la même orientation lorsque $\omega(v_1...v_n) > 0$.

Définition (Orientation de cartes sur M^m)
Soient deux cartes (U, ϕ) et (V, ψ) telles que $U \cap V \neq \emptyset$.
Soit γ : $\begin{array}{ccc} \psi(U \cap V) & \to & \{\pm 1\} \\ x & \mapsto & \operatorname{sign}\left(\det\left[d(\phi \circ \psi^{-1})_{\phi(x)}\right]\right) \end{array}$
γ est constante sur chaque composante connexe de $\psi(U \cap V)$.
Si $\gamma = 1$ globalement constante, ϕ et ψ définissent la même orientation.

Définition (Orientabilité de M^m)
M est orientable $\Leftrightarrow \exists A$ un atlas tel que $\forall \phi, \psi \in A$, ϕ et ψ définissent la même orientation.
Une orientation de M est le choix d'un tel atlas.

Proposition
M^m orientable $\Leftrightarrow \exists \omega \in \Omega^m(M) = \Gamma(\Lambda^m M)$ qui ne s'annule pas.
On dit que ω est une forme de volume.

Définition (Base orientée)
Soit M orientée par A. Une base $(v^i) \in T_xM$ est orientée si son déterminant dans une carte de A est positif.
Autrement dit, $\forall (U, \phi) \in A$ telle que $x \in U$, on a $v_i = \sum\limits_{j=1}^{m} v_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}|_x$ et alors $\det(v_i^j) > 0$.

Définition (Isomorphismes et orientation)
Soient M et N orientées. $F \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ un difféomorphisme qui préserve l'orientation :
$\forall x \in M$, $\forall (v_i)$ base orientée de T_xM, la base $(dF_x(v_i))$ est une base orientée de $T_{F(x)}N$.

Dans le cas contraire, F renverse l'orientation :
elle envoie toujours une base orientée (dans le sens "direct") vers une base "indirecte".

Proposition
Toute variété connexe M non orientable admet un double revêtement (à deux feuillets) M' orientable :
$M' \xrightarrow{\pi} M$, $\forall x \in M,\ \pi^{-1}(x)$ a deux éléments, et $Aut_M(M') \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

21 Intégration

Soit $\omega \in \Omega^m(M^m)$ sur une variété M orientée.
Dans une carte (U,ϕ) avec des coordonnées locales $x^1 ... x^m$ orientées : $\exists F \in \mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R}),\ \omega|_U = F \times dx^1 \wedge ... \wedge dx^m$.
On a alors $\int\limits_U \omega := \int\limits_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* \omega = \int\limits_{\phi(U)} (F \circ \phi^{-1})(x) \times \frac{dx}{\det\left(d\phi_{\phi^{-1}(x)}\right)}$.
Plus généralement, si un difféomorphisme $\phi : V \to U$ (U et V inclus dans des variétés) préserve l'orientation :
$\forall \omega \in \Omega^m(U^m),\ \int\limits_U \omega = \int\limits_V \phi^* \omega$ avec $\phi^*\omega = (\omega \circ \phi) \times \det(d\phi)$.

Proposition (Intégrale sur une variété)
Soit $(U_\alpha, \phi_\alpha, \rho_\alpha)$ une famille de cartes et de partitions de l'unité de M^m.
Pour $\omega \in \Omega^m(M)$, on pose $\int\limits_M \omega = \sum\limits_\alpha \int\limits_{\phi_\alpha(U_\alpha)} \rho_\alpha \times (\phi_\alpha^{-1})^* \omega$.
Cette définition ne dépend ni du choix de cartes ni de la partition de l'unité.

06/12

22 Différentielle extérieure

Définition (Différentielle extérieure)
On définit $d : \Omega^p(M^m) \to \Omega^{p+1}(M^m)$ par :
Localement, $\omega = \sum\limits_{i \in I_p} \omega_i \times dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_p}$, et alors $d\omega := \sum\limits_{i \in I_p} \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \times dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_p}$.

Proposition
$d : \Omega^*(M) \to \Omega^{*+1}(M)$ précédemment définie est l'unique application qui vérifie :

- $d|_{\Omega^0}$ est la différentielle usuelle.
- $\forall \alpha \in \Omega^p,\ \forall \beta \in \Omega^q,\ d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \times \alpha \wedge (d\beta)$
- $\forall \alpha \in \Omega^*,\ d(d\alpha) = 0$

Proposition
Soient $F \in \mathcal{C}^\infty(N, M)$ et $\omega \in \Omega^p(M)$.
On a $F^*\omega \in \Omega^p(N)$ et $d\left(F^*\omega\right) = F^*\left(d\omega\right)$.

Proposition
Soient $X, Y \in \Gamma(TM)$ des champs de vecteurs et $\alpha \in \Omega^1(M)$ une forme linéaire.
Alors $(d\alpha)_\bullet(X_\bullet, Y_\bullet) = d\left[\alpha_\bullet(Y_\bullet)\right](X_\bullet) - d\left[\alpha_\bullet(X_\bullet)\right](Y_\bullet) - \alpha_\bullet([X, Y]_\bullet)$.

Définition (Forme fermée et exacte)
Soit $\omega \in \Omega^*$:

- Forme fermée : $d\omega = 0$
- Forme exacte : $\omega = d\alpha$

ω exacte $\Rightarrow$ ω fermée (réciproque est fausse).

23 Formule de Cartan

Soient $\omega \in \Omega^p(M^m)$ et $V \in \Gamma(TM)$ un champ de vecteurs.
$\mathcal{L}_V \omega = d\left[\omega(V, ...) \in \Omega^{p-1}\right] + \left[d\omega\right](V, ...)$

24 Théorème de Stokes

Remarque
Soit $F \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ un difféomorphisme de variétés orientées à bord (F préserve le bord).

Si F préserve l'orientation entre M et N, alors $F|_{\partial M}$ préserve l'orientation induite sur les bords ∂M et ∂N.

Théorème
Soient M^m une variété à bord et $i : \partial M \overset{\mathcal{C}^\infty}{\hookrightarrow} M$ l'injection canonique.
Pour $\omega \in \Omega^{m-1}(M)$ à support compact, on a l'égalité $\int\limits_{\partial M} i^*\omega = \int\limits_M d\omega$.

25 Distributions et feuilletages

Proposition
Soit M^m sans bords, $V_1...V_m \in \Gamma(TM)$ et $q \in M$ tels que $(V_i(q))$ une base de T_qM.
Alors $\exists(U,\phi)$ une carte autour de q ($\phi = (x^1...x^m)$) telle que $\forall 1 \leq i \leq m,\ \frac{\partial}{\partial x^i}|_q = V_i(q)$.

Remarque
En général, on ne peut pas vérifier $x^i = V_i$ sur un voisinage de q.

07/12

Proposition
Avec les hypothèses précédentes :
$\exists(U,\phi)$ une carte telle que $\forall q' \in U,\ \frac{\partial}{\partial x^i}|_{q'} = V_i(q') \Leftrightarrow \forall 1 \leq i,j \leq m,\ \forall q' \in U,\ [V_i, V_j]_{q'} = 0$

Définition (Distribution de rang k)
$D \subset TM$ vérifie :
- $\forall q \in M,\ D_q := D \cap T_qM$ un sous-espace vectoriel de T_qM (de dimension k).
- $\forall q \in M,\ \exists U$ voisinage de q, $\exists V_1...V_k \in \Gamma(TU),\ \forall x \in U,\ (V_i(x))$ base de D_x.

Définition (Sous-variété intégrale de D)
S une variété telle que :
- $S \looparrowright M$ une immersion injective ($S \subset M$ donc $TS \subset TM$).
- $\forall q \in S,\ T_qS = D_q$ (donc S de dimension k).

Remarque
A priori, pour certains $q \in M,\ \nexists S$ sous-variété intégrale de D telle que $q \in S$.

Définition (Distribution involutive)
$\forall V, W \in \Gamma(D),\ [V,W] \in \Gamma(D)$

Définition (Distribution intégrable)
$\forall q \in S,\ \exists S$ une sous-variété intégrale de D telle que $q \in S$.

Définition (Distribution complètement intégrable)
$\forall q \in M,\ \exists(U,\phi)$ une carte autour de U telle que :
- $\exists W_1 \subset \mathbb{R}^k,\ \exists W_2 \subset \mathbb{R}^{m-k},\ \phi(U) \subset W_1 \times W_2 \subset \mathbb{R}^m$
- $\forall y \in W_2,\ \phi^{-1}(W_1 \times \{y\})$ une sous-variété intégrable de D.

Remarque
Sans efforts, on a :
D complètement intégrable $\Rightarrow$ D intégrable $\Rightarrow$ D involutive.

Théorème (Théorème de Frobenius local)
D involutive $\Rightarrow$ D complètement intégrable.
On a donc des équivalences dans la remarque précédente.

Lemme
Soient $F \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$, $V, W \in \Gamma(TM)$ et $\tilde{V}, \tilde{W} \in \Gamma(TN)$.
Si $\forall x \in M,\ dF_x(V_x) = \tilde{V}_{F(x)}$ et $dF_x(W_x) = \tilde{W}_{F(x)}$, alors $dF_x([V, W]_x) = [\tilde{V}, \tilde{W}]_{F(x)}$.

Définition (Feuilletage de M^m de dimension k)
(F_β) une famille de sous-variétés de M de dimension k qui vérifie :
- $M = \bigsqcup_\beta F_\beta$
- $\forall \beta,\ F_\beta \looparrowright M$ une immersion injective.
- $\forall q \in M,\ \exists \phi : U \to W_1 \times W_2$ une carte autour de q telle que $\forall \beta,\ \exists (y_i)_{i \in I} \in {W_2}^I$ dénombrable, $F_\beta \cap U = \bigsqcup_{i \in I} \phi^{-1}(W_1 \times \{y_i\})$.
- $D = \bigsqcup_\beta TF_\beta$ une distribution de rang k.

Théorème (Théorème de Frobenius global)
Soit D une distribution involutive. La famille de sous-variétés intégrales de D maximales est un feuilletage de M.