Processus de branchement et populations structurées

Léo Gayral

Ces notes sont basées sur le cours de Vincent Bansaye.

Table des matières

1 Arbre de Galton-Watson

1.1 Processus de Galton-Watson

Définition 1 (Processus de Galton-Watson) **:**
Soit L une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$. Considérons $(L_{i,n})_{i,n\in\mathbb{N}} \overset{\text{iid}}{\sim} L$.

On pose alors $Z_0 = 1$, et $Z_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{Z_n} L_{i,n}$.

Lemme 2 :
Supposons $m = \mathbb{E}[L] \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors le processus $W_n = \frac{Z_n}{m^n}$ est une martingale positive, donc converge presque-sûrement vers une limite W.

Lorsque la population s'éteint en temps fini, pour $\omega \in \Omega$ fixé, on a naturellement $W(\omega) = 0$. Il est légitime de s'intéresser à la réciproque, à une condition sur L sous laquelle, sous l'évènement $\{W = 0\}$, la population s'éteint p.s. en temps fini.

Proposition 3 :
Soit $G(s) = \mathbb{E}\left[s^L\right]$, définie sur $[0, 1]$, la fonction génératrice de la loi L.

Alors la probabilité d'extinction $p_{ext} = \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N},\, Z_n = 0)$ est le premier point fixe de la fonction G sur $[0, 1]$. En particulier, $p_{ext} = 1$ ssi $m < 1$ ou bien $m = 1$ et $L \neq \delta_1$.

Démonstration. Voir mon développement d'agrégation. □

1.2 Transformation de Lamperti

Remarque 4 :
Posons $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} Z_k$ la population après n générations. En particulier, on a $A_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ la population totale. On a extinction en temps fini de la population ssi $A_\infty < \infty$.

Définition 5 :
On définit le processus S indexé sur $[\![0, A_\infty]\!] = \bigsqcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [\![A_{n-1}, A_n]\!]$, initialisé en $S_0 = 1$, puis vérifiant $S_{k+1} = S_k + L_{k-A_n+1,n} - 1$ pour tout $A_n \leq k < A_{n+1}$.

Le processus S correspond à une exploration en largeur de l'arbre de Galton-Watson, S_k étant le nombre de descendants directs du sous-arbre après k sommets visités.

Théorème 6 :

On a $S_{A_n} = Z_n$. En outre, le processus S est une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, de pas $L-1$, tuée à son premier passage en 0.

Démonstration. Naturellement, $S_0 = 1 = Z_0$. D'autre part, par récurrence :

$$S_{A_{n+1}} = S_{A_n} + \sum_{k=A_n}^{A_{n+1}-1} S_{k+1} - S_k = S_{A_n} + \sum_{k=1}^{Z_n} L_{k,n} - 1 = S_{A_n} + (Z_{n+1} - Z_n) = Z_{n+1}\,.$$

Le premier point est ainsi vérifié.

On peut vérifier que S se comporte bien comme une marche aléatoire de pas $L-1$ jusqu'au rang A_∞. En effet, à chaque étape, on choisit un indice aléatoirement, puis on ajoute une variable de loi $L-1$ indépendante de l'indice en question dans tous les cas. Quitte à prolonger ce processus, on obtient bien une marche aléatoire Y.

Le seul point à justifier est que A_∞ est le premier passage en 0 de Y. D'une part, lorsque $A_\infty < \infty$, on a un rang $N = \inf\{n \in \mathbb{N},\, A_{n+1} = A_n\} = \inf\{n \in \mathbb{N},\, Z_n = 0\}$, donc on a l'égalité $S_{A_\infty} = S_{A_N} = Z_N = 0$. On a donc bien passage en 0 au temps A_∞. Reste à justifier que c'est bien le *premier* passage en 0.

Aux instants A_n pour $n < N$, on a naturellement $S_{A_n} = Z_n > 0$. En outre, entre A_n et A_{n+1}, on part de Z_n, on effectue Z_n étapes, et S peut diminuer d'au plus un cran à chaque étape, donc on ne peut pas atteindre 0 avant l'instant A_{n+1}. $\square$

Corollaire 7 :

On a extinction de la population en temps fini ssi $A_\infty < \infty$, ssi S visite 0. Dans le cas $m = 1$, le processus S est une marche aléatoire centrée, non constante dès que $L \neq \delta_1$, donc c'est une marche récurrente, et on retrouve l'extinction p.s. de la population dans ce cas.

2 Construction spinale

2.1 Définitions

Définition 8 :

Soit $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{N}^*)^n$. On peut voir T comme un arbre infini, où chaque sommet a une quantité dénombrable de descendants.

Un individu u est ancêtre d'un élément v si c'est un préfixe, ce qu'on note ici $u < v$.

La profondeur d'un sommet u dans l'arbre est sa distance à la racine, la longueur du mot notée $|u|$. On dit que $|u|$ est la génération de l'individu u.

Définition 9 (Arbre) **:**

Un arbre est une partie $t \subset T$:

— stable par préfixes : si $v \in t$ et $u < v$, alors $u \in t$,

— ordonnée à chaque génération : si $uk \in t$ pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout $1 \leq k' \leq k$, on a $uk' \in t$.

Étant donné un arbre t, on notera $g_n = t \cap \mathbb{N}^n$ sa n-ième génération. Étant donné un individu $u \in t$, on notera $k(u) = \max\{k \in \mathbb{N}^*,\, uk \in t\}$ son nombre de descendants.

Définition 10 (Arbre de Galton-Watson) **:**

On considère les variables aléatoires $(L(u))_{u \in T} \overset{\text{iid}}{\sim} L$, la descendance de l'individu u.

On pose $G_0 = \varepsilon$, et $G_{n+1} = \{uk,\, u \in G_n,\, k \leq L(u)\}$.

L'arbre de Galton-Watson associé est alors $\tau = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} G_k \subset T$.

Lemme 11 :

Par construction, $Z_n = |G_n|$ est un processus de Galton-Watson.

2.2 Construction spinale

L'idée de cette construction est d'isoler, à chaque étape du processus, un individu qui se reproduira selon une loi $\widehat{L}$ biaisée par le nombre de descendants.

Définition 12 (Loi d'un individu typique) **:**

Soit $p_k = \mathbb{P}(L = k)$. On pose $\widehat{L}$ la loi définie par $\widehat{p}_k = \frac{k}{m} p_k$.

On pose alors les variables $\left(\widehat{L}_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \overset{\text{iid}}{\sim} \widehat{L}$.

Définition 13 (Construction spinale) **:**

On construit un arbre $A \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \subset T$ par induction, en choisissant un individu $E_n \in V_n$ aléatoirement comme suit. Partons de la racine $V_0 = \{\varepsilon\}$, et naturellement $E_0 = \varepsilon$.

A la génération n, on isole l'individu $E_n \in V_n$ pour qu'il se reproduise selon la loi $\widehat{L}$, les autres individus suivant alors la loi de reproduction L. Formellement :

$$V_{n+1} = \bigcup_{v \in V_n,\, v \neq E_n} \{vk,\, 1 \leq k \leq L(v)\} \cup \left\{E_n k,\, 1 \leq k \leq \widehat{L}_n\right\}.$$

On choisit en particulier E_{n+1} uniforme parmi la descendance de E_n, autrement dit $E_{n+1} = E_n K_n$ avec $K_n \sim \mathcal{U}\left(\left[\!\left[1, \widehat{L}_n\right]\!\right]\right)$ indépendamment de tout le reste.

2.3 Résultats

Définition 14 (Arbres tronqués) **:**

Soient $\tau_n = \bigcup_{k \leq n} G_k$ et $A_n = \bigcup_{k \leq n} V_k$ les arbres tronqués à la génération n.

Lemme 15 :

Soient t un arbre de profondeur n, et $e \in g_n(t)$. Alors $\mathbb{P}(A_n = t, E_n = e) = \frac{1}{m^n}\mathbb{P}(\tau_n = t)$.

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence sur la profondeur. Naturellement, au rang $n = 0$, les deux termes sont égaux à 1.

Supposons le résultat vrai au rang n, et fixons un arbre t' de profondeur $n+1$, et $e' \in g_{n+1}(t')$. Soient $t = t' \cap \left(\bigcup_{k=0}^{n} \mathbb{N}^k\right)$ la restriction de t' aux n premières générations, et $e \in g_n(t) = g_n(t')$ le père de e'. Par construction de (A, E), on a alors :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1} = t', E_{n+1} = e') &= \mathbb{P}(A_n = t, E_n = e) \times \mathbb{P}(A_{n+1} = t', E_{n+1} = e' | A_n = t, E_n = e) \\ &= \tfrac{\mathbb{P}(\tau_n = t)}{m^n} \mathbb{P}(A_{n+1} = t', E_{n+1} = e' | A_n = t, E_n = e)\,. \end{aligned}$$

Reste à étudier le terme de droite. Comme A_n et E_n sont fixés, on a juste à étudier ici la probabilité que chaque élément $u \in g_n(t')$ ait le nombre $k(u)$ d'enfants souhaités :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{n+1} = t', E_{n+1} = e' | A_n = t, E_n = e) &= \mathbb{P}(A_{n+1} = t' | A_n = t, E_n = e) \\ &\times\ \mathbb{P}(E_{n+1} = e | A_{n+1} = t', E_n = e) \\ &= \prod_{u \in g_n,\, u \neq e} p_{k(u)} \times \widehat{p}_{k(e)} \times \tfrac{1}{k(e)} \\ &= \tfrac{1}{m} \prod_{u \in g_n} p_{k(u)} \\ &= \tfrac{1}{m} \mathbb{P}(\tau_{n+1} = t' | \tau = t)\,, \end{aligned}$$

d'où le résultat souhaité au rang $n + 1$. □

Théorème 16 :

Soit $U_n \sim \mathcal{U}(G_n)$ indépendante du reste. Alors pour toute fonction $F : \mathcal{P}(T) \times T \to \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}[F(\tau_n, U_n) W_n] = \mathbb{E}[F(A_n, E_n)]\,,$$

où $W_n = \frac{Z_n}{m^n}$ est la martingale introduite précédemment.

Démonstration. Notons T_n l'ensemble des arbres finis de profondeur n. Naturellement, par le lemme, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F(\tau_n, U_n)W_n] &= \sum_{t\in T_n}\sum_{e\in g_n(t)} \mathbb{P}(\tau_n = t, U_n = e) \times F(t,e)\frac{|g_n(t)|}{m^n} \\
&= \sum_{t\in T_n}\sum_{e\in g_n(t)} \mathbb{P}(\tau_n = t) \times \frac{1}{|g_n(t)|} \times F(t,e)\frac{|g_n(t)|}{m^n} \\
&= \sum_{t\in T_n}\sum_{e\in g_n(t)} \frac{1}{m^n}\mathbb{P}(\tau_n = t) \times F(t,e) \\
&= \sum_{t\in T_n}\sum_{e\in g_n(t)} \mathbb{P}(A_n = t, E_n = e)F(t,e) \\
&= \mathbb{E}[F(A_n, E_n)]\,.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 17 (Application du théorème) **:**

Supposons ici que la limite de la martingale, W, est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. Ceci implique en particulier que la population ne s'éteint *jamais*, que $p_0 = 0$.

Soit $F_k^n = \frac{1}{n}\#\{u < U_n,\, L(u) = k\}$. la proportion d'ancêtres de U_n qui ont eu k enfants. Alors on a la convergence en probabilités $F_k^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \widehat{p}_k$.

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$, et la fonction $F_{k,\varepsilon}(t,e) = \mathbb{1}_{\left|\frac{1}{n}\#\{u\in t,\, u<e,\, k(u)=k\}-\widehat{p}_k\right|\geq\varepsilon}$. Pour montrer la convergence annoncée, il suffit de montrer que pour tout ε, $F_k(G_n, U_n)$ converge vers 0.

Si on considère $F_{k,\varepsilon}(A_n, E_n)$, on s'intéresse juste à l'écart entre une moyenne empirique sur n échantillons sous $\widehat{L}$ et la vraie moyenne, donc par la loi des grands nombres, $F_{k,\varepsilon}(A_n, E_n)$ converge p.s. vers 0, donc dans L^1 par convergence dominée.

On a $F_{k,\varepsilon}(\tau_n, U_n)W_n \xrightarrow{L^1} 0$, donc une convergence en probabilités. Comme par hypothèse $W_n \to W$ ne s'annule pas à la limite, on a finalement la convergence en probabilités de $F_{k,\varepsilon}(\tau_n, U_n)$ vers 0. En particulier en fixant un rang $\delta = \frac{1}{2}$ pour cette convergence en probabilité-ci :

$$\mathbb{P}\left(F_{k,\varepsilon}(\tau_n, U_n) > \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\#\{u \in \tau_n,\, u < U_n,\, L(u) = k\} - \widehat{p}_k\right| \geq \varepsilon\right) \longrightarrow 0\,,$$

d'où la convergence annoncée. □

3 Critère $L\ln(L)$

Définition 18 (Processus de Galton-Watson avec immigration) **:**
Soient (I_n) iid, à valeurs entières, indépendantes des $(L_{i,n})$.

On définit un processus de Galton-Watson avec immigration (GWI) via $Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} L_{i,n} + I_{n+1}$.

Proposition 19 :
Considérons une famille de processus de Galton-Watson $\left(Z_{j,n}^{(x)}\right)_{j \leq n,\, x \in \mathbb{N}}$ indépendants, où $Z_{j,n}^{(x)}$ est un processus partant de x individus au temps j, observé au temps n. On peut alors réécrire un GWI sous la forme $Z_n = \sum_{j=1}^{n} Z_{j,n}^{(I_j)}$.

Proposition 20 :
Considérons $I_n = \widehat{L}_{n-1} - 1$, et $Y_n = X_n - 1$, où X est la population pour la construction spinale. Dans ce cas, Y est un processus de Galton-Watson avec immigration I.

3.1 Comportement de Y

Proposition 21 :
Conditionnellement à la valeur de I, le processus $\left(\frac{Y_n}{m^n}\right)$ est une sous-martingale, et on a $\mathbb{E}\left[\frac{Y_n}{m^n} | I\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{I_k}{m^k}$. En particulier, ce résultat est vrai même si les termes de I (et donc de Y) ne sont pas intégrables.

Démonstration. Soit $(\mathcal{F}_n)$ la filtration canonique associée au processus Z. On a :

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n, I] = I_{n+1} + \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n} Z_{j,n+1}^{(I_j)} \middle| \mathcal{F}_n, I\right] = I_{n+1} + m \sum_{j=1}^{n} Z_{n,j}^{(I_j)} = I_{n+1} + mY_n\,,$$

ce qui conclut la preuve. □

Lemme 22 :
Soient (A_n) des variables positives iid.

1. Si $A \in L^1$, alors $\overline{\lim}\, \frac{A_n}{n} = 0$ p.s. donc pour $0 < c < 1$, on a $\sum_{n \in \mathbb{N}} c^n e^{A_n} < \infty$ p.s.
2. Si $\mathbb{E}[A] = \infty$, alors $\overline{\lim}\, \frac{A_n}{n} = \infty$ p.s., donc tout $c > 0$, on a $\sum_{n \in \mathbb{N}} c^n e^{A_n} = \infty$ p.s.

Démonstration. Pour le premier point, remarquons que $\mathbb{E}\left[\frac{A}{\varepsilon}\right] < \infty$, donc en discrétisant cette intégrale, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\frac{A_n}{\varepsilon} \geq n\right) < \infty$. Par Borel-Cantelli, on en déduit que $\overline{\lim} \frac{A_n}{n} \leq \varepsilon$. En particulier, avec ε assez faible, on a ce^ε et $e^{A_n} \leq (e^\varepsilon)^n$ à partir d'un rang. On montre le deuxième point de façon analogue. $\square$

On rappelle qu'on travaille ici dans le cas $m > 1$, sans quoi il y a extinction de la population à coup sûr.

Proposition 23 :

Supposons $\mathbb{E}\left[\ln\left(\widehat{L}\right)\right] < \infty$. Alors $\left(\frac{Y_n}{m^n}\right)$ converge p.s. vers une variable réelle.

Sinon, si $\mathbb{E}\left[\ln\left(\widehat{L}\right)\right] = \infty$, alors le processus converge p.s. vers $+\infty$.

Démonstration. Dans le premier cas, par le lemme précédent, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{L_k}}{m^k} < \infty$. Comme $m > 1$, $\left(\frac{1}{m^k}\right)$ est sommable, et $I = \widehat{L} - 1$, donc la famille $\sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{I_j}{m^j} < \infty$ p.s.

Conditionnellement à I, sous l'évènement précédent, le processus $\left(\frac{Y_k}{m^k}\right)$ est donc une sous-martingale bornée dans L^1, d'où la convergence p.s. vers une variable réelle positive.

On peut montrer l'autre cas de figure par un raisonnement analogue. $\square$

3.2 Théorème de Kesten-Stigum

Lemme 24 :

Soit W la limite du processus de Galton-Watson normalisé $\left(\frac{Z_n}{m^n}\right)$.

Alors $\mathbb{E}[W] = \mathbb{P}\left(\overline{\lim} \frac{Y_n}{m^n} < \infty\right) = \mathbb{P}\left(\overline{\lim} \frac{X_n}{m^n} < \infty\right)$.

Démonstration. Soit $F(t)$ qui vaut 1 ssi $\sup_{n\leq k\leq n+p} \frac{\#\left(t\cap N^k\right)}{m^k} \leq K$. En utilisant la construction spinale, on a $\mathbb{E}[F(T_{n+p})W_{n+p}] = \mathbb{E}[F(A_{n+p})]$. On peut le réécrire :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\left\{\sup\limits_{n\leq k\leq n+p} W_k \leq K\right\}} \times W_{n+p}\right] = \mathbb{P}\left(\sup_{n\leq k\leq n+p} \frac{X_k}{m^k} \leq K\right).$$

Le terme dans l'espérance de gauche est dominé par K par construction. Le terme de droite est une intersection décroissante d'évènements. En passant à la limite $p \to \infty$, on a donc :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\left\{\sup\limits_{n\leq k} W_k \leq K\right\}} W\right] = \mathbb{P}\left(\sup_{n\leq k} \frac{X_k}{m^k} \leq K\right).$$

Par convergence monotone croissante, quitte à approcher K par en dessous, on peut se ramener à une inégalité stricte. On peut alors faire tendre $n \to \infty$ à K fixé, ce qui par convergence monotone décroissante, nous donne :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\overline{\lim} W_k < K\}} W\right] = \mathbb{P}\left(\overline{\lim} \frac{X_k}{m^k} < K\right).$$

On fait finalement tendre $K \to \infty$ par convergence monotone croissante, ce qui nous donne le résultat voulu car $W = \lim W_k$ est fini p.s. $\square$

Corollaire 25 :
Si $\mathbb{E}\left[\ln\left(\widehat{L}\right)\right] < \infty$, alors $\mathbb{E}[W] = 1$.

Sinon, $\mathbb{E}[W] = 0$, donc $W = 0$ p.s.

Remarque 26 :
Notons que $\mathbb{E}\left[\ln\left(\widehat{L}\right)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{p_k} \ln(k) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} k \ln(k) p_k = \frac{1}{m} \mathbb{E}[L \ln(L)]$.

Lemme 27 :
On a $\mathbb{P}(W = 0) \in \{p_{ext}, 1\}$.

Démonstration. On va montrer que c'est un point fixe de la fonction génératrice, qui est une fonction strictement convexe, ce qui conclura la preuve.

Notons que $W = 0$ ssi $\lim \frac{Z_{n+1}}{m^{n+1}} = 0$ ssi $\lim \frac{1}{m^{n+1}} \sum_{i=1}^{Z_1} Z_n^{(i)} = 0$. Chaque $Z_n^{(i)}$ est un arbre de Galton-Watson indépendant des autres, enraciné en un des Z_1 enfants de l'origine. On a donc $W = 0$ ssi, pour chaque tel arbre, $\frac{Z_n^{(i)}}{m^n} \longrightarrow 0$. Par indépendance des Z_1 arbres :

$$\mathbb{P}(W = 0, Z_1 = k) = \mathbb{P}(Z_1 = k)\mathbb{P}(W = 0)^k,$$

et donc en passant à la somme, $\mathbb{P}(W = 0) = G(\mathbb{P}(W = 0))$. $\square$

Théorème 28 (Kesten-Stigum, 1966) **:**
Si on synthétise les résultats précédents, on a équivalence entre les propriétés :

1. $\{W = 0\} = \{\exists n \in \mathbb{N},\ Z_n = 0\}$ p.s.,
2. $\mathbb{P}(W = 0) = p_{ext}$,
3. $\mathbb{E}[W] = 1$,
4. $\mathbb{E}[L \ln(L)] < \infty$.

3.3 Cas sous-critique

On considère ici le cas $m < 1$, où $p_{ext} = 1$.

Remarque 29 :

On s'intéresse dans ce cas à l'évolution de la suite $(\mathbb{P}(Z_n = 0))_{n\in\mathbb{N}}$.

Notons que la suite $\left(\frac{\mathbb{P}(Z_n>0)}{m^n}\right)$ est décroissante. La décroissance se réécrit sous la forme :

$$1 - G^{n+1}(0) \leq m(1 - G^n(0))$$

autrement dit $\frac{G(1)-G(G^n(0))}{1-G^n(0)} \leq m$, ce qui est vrai car la pente de cette corde est inférieure à la dérivée de G en 1 par convexité, égale à m.

En conséquence, $\frac{\mathbb{P}(Z_n>0)}{m^n} \longrightarrow c \geq 0$.

Théorème 30 :

On a $c > 0$ ssi $\mathbb{E}[L\ln(L)] < \infty$ dans ce cas.

3.4 Environnement aléatoire

Remarque 31 :

Soit $(L^e)_{e\in E}$ une famille de lois de reproduction. Conditionnellement à des environnements (e_n), on a naturellement $\mathbb{E}[Z_n] = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[L^{e_k}]$. On préserve en outre la propriété de branchement, avec des sous-arbres indépendants de même loi. En revanche, si l'environnement est aléatoire et inconnu, ces arbres ne sont plus indépendants, puisqu'ils sont positivement corrélés par cet environnement.

Lemme 32 :

Soit $\mathcal{E}$ une loi sur E. Si on tire chaque environnement $e_n \sim \mathcal{E}$ de façon iid, alors $\mathbb{E}[Z_n] = m^n$ avec $m = \mathbb{E}\left[L^{\mathcal{E}}\right]$.

Remarque 33 :

Il ne suffit pas de garantir $m > 1$ pour assurer la survie de la population. En effet, pour prendre un exemple dégénéré, lorsque $\delta_0 \in E$ est un cas d'extinction, même en étant fortement compensé dans la moyenne, un seul tel évènement suffit à la population Z.

Théorème 34 :

Notons $m(e) = \mathbb{E}[L^e]$. Supposons que $L^{\mathcal{E}} \neq \delta_1$, et que $\mathbb{E}[|\ln(m(\mathcal{E}))|] < \infty$. Le processus $W_n = \frac{Z_n}{\prod_{j=1}^{n} m(e_j)}$ est une martingale positive, de limite W. Alors $\mathbb{E}[ln(m(\mathcal{E}))] \leq 0$ ssi $p_{ext} = 1$.

Lorsque $p_{ext} < 1$, sous l'évènement de survie, la populaption tend vers l'infini. Si de plus $\mathbb{E}\left[\ln\left(\widehat{L^{\mathcal{E}}}\right)\right] < \infty$, alors $W = 0$ ssi la population survit.

Démonstration. Traitons ici le cas $\mathbb{E}[\ln(m(\mathcal{E}))] < 0$. Conditionnellement à un environnement

$e = (e_n)$, Par décroissance des évènements :

$$\mathbb{P}(Z_n > 0|e) = \min_{0\leq k\leq n} \mathbb{P}(Z_k > 0|e) \leq \min_{0\leq k\leq n} \mathbb{E}[Z_k|e] = \exp\left(\min_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{k-1} \ln(m(e_i))\right).$$

On considère ici une marche aléatoire de pas $\ln((\mathcal{E}))$, qui a un drift négatif, donc qui est transiente vers $-\infty$. En conséquence, $\mathbb{P}(Z_n > 0|e) \longrightarrow 0$ p.s., d'où $\mathbb{P}(Z_n > 0) \longrightarrow 0$ par convergence dominée. □

Remarque 35 :

Dans le cas sous-critique, où $\mathbb{E}[\ln(m(\mathcal{E}))] \leq 0$, la vitesse d'extinction dépend de l'entropie du système. Plus précisément, si $\mathbb{E}[m(\mathcal{E})\ln(m(\mathcal{E}))] < 0$, alors $\mathbb{P}(Z_n = 0) \sim c_1\mathbb{E}[m(\mathcal{E})]^n$. Sinon, cette probabilité évolue à vitesse $c_2\gamma^n$, avec $\gamma := \inf_{0\leq s\leq 1} \mathbb{E}[m(\mathcal{E})^s] < \mathbb{E}[m(\mathcal{E})]$ non explicite.

4 Populations structurées neutres

4.1 Définition

Définition 36 :

Dans le cas neutre, une population structurée est une chaîne de Markov branchante, indexée par un arbre de Galton-Watson lui-même aléatoire. Chaque individu de la population est ainsi décoré d'un *trait* dans un espace χ mesurable, et on note $\mathcal{B}_\chi$ sa tribu.

On peut décrire cet arbre grâce aux lois $(\theta_x)_{x\in\chi}$, à valeurs dans $\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} X^k$. On écrit alors $\theta_x = (X_1^x, \dots, X_L^x)$, la variable L ne dépendant pas de x pour l'instant. Considérons ainsi la famille de variables indépendantes $(\theta_x(u))_{u\in T, x\in\chi}$. On peut alors définir notre processus via $X = \{(u, X(u)),\, u \in \tau\}$, avec $X(ua) = \theta_{X(u)}(u)^a$ la a-ième coordonnée du vecteur aléatoire $\theta_{X(u)}(u)$.

Remarque 37 (Cas d'un graphe fini irréductible) **:**

Dans ce cas de figure, χ est fini, et on considère un noyau de transition irréductible, avec probabilité de transition $p_{i,j}$ de i vers j, avec des transitions indépendantes vers chacun des descendants pour le vecteur aléatoire θ_i.

Remarque 38 (Marches aléatoires branchantes) **:**

Dans ce cas de figure, on considère χ un groupe additif, et en termes de loi on a $\theta_x^a = x + \theta_0^a$ sur chaque coordonnée, indépendamment.

Remarque 39 (Processus auto-régressif bifurquant (BAR)) **:**

Ici, $L = \delta_2$, on considère un arbre binaire, déterministe. On a la loi $\theta_x = (\alpha x + \varepsilon_1, \beta x + \varepsilon_2)$ où $\varepsilon_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Ce modèle est typiquement utilisé pour représenter l'évolution de la taille des cellules au sein d'une population.

Remarque 40 (Modèle de Kimmel) **:**

Dans ce cas, on veut un modèle plus riche, plus proche de la réalité. On considère ainsi L à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$, autrement dit la cellule peut mourir (p_0), ne rien faire (p_1) ou se diviser (p_2). L'espace des traits est $\chi = \mathbb{N}$, et représente le nombre de parasites au sein d'une cellule. Lorsque $L = 2$, on répartir les k parasites de la cellule-mère entre les deux cellules-filles suivant une répartition binomiale $\mathcal{B}(k, q)$ pour un certain paramètre $0 < q < 1$. Avant l'éventuelle division cellulaire, chaque parasite se reproduit suivant un processus de Galton-Watson de loi μ.

4.2 Propriété de branchement

Définition 41 :

Étant donné $u \in T$, et un arbre de Galton-Watson τ, on note $\tau^u = \{w \in T,\, uw \in \tau\}$. Autrement dit, on recolle l'arbre τ sur la racine u.

On note alors X^u une population structurée, enracinée en u. Ainsi, $X^u(v) = X(uv)$.

Proposition 42 :

Conditionnellement à τ_n et ses étiquettes, les arbres $(X^u)_{u \in G_n}$ sont indépendants. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour toute famille de fonctions positives d'une population $(F_u)_{|u|=n}$, on a :

$$\mathbb{E}\left[\prod_{u \in G_n} F_u(X^u) \middle| \mathcal{F}_n\right] = \prod_{u \in G_n} \mathbb{E}_{X(u)}[F_u(X)]\,,$$

où $\mathbb{E}_x$ sous-entend que la racine du processus X est étiquetée par x.

4.3 Semi-groupe du premier moment

Définition 43 :

Notons $M(x,f) = \mathbb{E}_x\left[\sum_{i=1}^{L} f(X_i^x)\right] = \mathbb{E}_x\left[\sum_{u \in G_1} f(X(u))\right]$. On a $M(x,1) = \mathbb{E}_x[L] = m$. On introduit plus généralement $M_n(x,f) = \mathbb{E}_x\left[\sum_{u \in G_n} f(X(u))\right]$. On peut voir $M_n(x,\cdot)$ comme une mesure positive.

Remarque 44 :

Dans le cas d'un graphe fini, $M_{i,j} = M\big(i, \mathbb{1}_{\{j\}}\big) = p_{i,j}$ par linéarité et indépendance de la loi de chaque descendant.

Proposition 45 :

Pour tous $x \in \chi$ et f positive, on a $M_{n+1}(x,f) = M_n(x, M(\cdot,f)) = M(x, M_n(\cdot,f))$.

Plus largement, on en déduit $M_{n+p} = M_n M_p$. Ainsi, $M_n(x,1) = m^n$.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
M_{n+1}(x,f) &= \mathbb{E}_x\left[\sum_{u\in G_{n+1}} f(X(u))\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left[\sum_{u\in G_{n+1}} f(X(u))\middle|\mathcal{F}_n\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\sum_{u\in G_n} \mathbb{E}_x\left[\sum_{v=ua\in G_{n+1}} f(X(u))\middle|\mathcal{F}_n\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\sum_{u\in G_n} \mathbb{E}_{X(u)}\left[\sum_{a\in G_1} f(X(a))\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\sum_{u\in G_n} M_1(X(u),f)\right],
\end{aligned}$$

d'où le résultat. Le résultat se prouve de façon analogue pour l'autre décomposition. □

Définition 46 :

On considère également le noyau normalisé $Q = \frac{1}{m}M$, un noyau de transition Markovien.

4.4 Formule *many-to-one*

Proposition 47 :

Soit $F : \chi^{n+1} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. On a :

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{u\in G_n} F(X(v), v\leq u)\right] = m^n \mathbb{E}_x[F(Y_0,\dots,Y_n)],$$

où Y est une Q-chaîne de Markov initialisée en $Y_0 = x$.

Démonstration. Par densité, on se ramène au cas cylindrique, où $F_n(x_0,\dots,x_n) = \prod_{j=0}^{n} f_j(x_j)$. Le résultat général s'obtient alors par un lemme de classes monotones.

Ainsi, pour une telle fonction :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[\sum_{u\in G_{n+1}} F_{n+1}(X(v), v\leq u)\right] &= \mathbb{E}_x\left[\sum_{w\in G_n} \mathbb{E}\left[\sum_{u=wa\in G_{n+1}} F_{n+1}(X(v), v\leq u)\middle|\mathcal{F}_n\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\sum_{w\in G_n} F_n(X(v), v\leq w)\mathbb{E}\left[\sum_{u=wa\in G_{n+1}} f_{n+1}(X(u))\middle|\mathcal{F}_n\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\sum_{w\in G_n} F_n(X(v), v\leq w) M(X(w), f_{n+1})\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\sum_{u\in G_n} \widetilde{F}_n(X(u))\right],
\end{aligned}$$

avec $\widetilde{F}_n(x_i, i\leq n) = m \times \prod_{j=0}^{n-1} f_j(x_j) \times f_n(x_n) Q(x_n, f_{n+1})$. On peut alors utiliser l'hypothèse de récurrence, et une propriété de Markov au rang n, ce qui nous l'égalité avec :

$$m^n \mathbb{E}_x\left[\widetilde{F}_n(Y_0, \ldots, Y_n)\right] = m^{n+1}\mathbb{E}_x[F_n(Y_0, \ldots, Y_n) Q_{Y_n}(f_{n+1})] = m^{n+1}\mathbb{E}_x[F_{n+1}(Y_0, \ldots, Y_{n+1})]\,,$$

ce qui conclut la preuve, avec l'initialisation triviale en $n = 0$ avec un individu déterministe. $\square$

Remarque 48 :

En particulier, si $F\big((x_i)_{i\leq n}\big) = \mathbb{1}_A(x_n)$, alors le nombre moyen d'individus dans A après n générations vérifie :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{u\in G_n} \mathbb{1}_A(X(u))\right] = m^n \times \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_A(Y_n)]\,.$$

Remarque 49 :

Ce résultat a un intérêt pratique, puisqu'on a transformé une espérance sur une population (à croissance exponentielle) en l'espérance sur une chaîne de Markov usuelle, où il est envisageable de simuler un certain nombre de trajectoires pour obtenir une moyenne empirique.

Remarque 50 :

Une autre façon de réécrire le noyau Q est :

$$Q(x, A) = \sum_{k\geq 0} \frac{kp_k}{m} \sum_{1\leq i\leq k} \frac{1}{k}\mathbb{P}\left(X_i^{(x)} \in A \middle| L = k\right) = \sum_{k\geq 0} \widehat{p}_k Q^{(k)}(x, A)\,,$$

où $Q^{(k)}(x, \cdot)$ est la loi moyenne du trait des descendants de x, conditionnée par le nombre de descendants fixé à $L = k$.

Remarque 51 :

Revenons au modèle de Kimmel, où $L \in \{0, 1, 2\}$. On a $m = p_1 + 2p_2$, $\widehat{p}_1 = \frac{p_1}{m}$ et $\widehat{p}_2 = \frac{2p_2}{m}$. Avec la décomposition précédente, on a $Q^{(1)}(x, A) = \mathbb{P}(P_1^x \in A)$, et :

$$Q^{(2)}(x, A) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{P_1^x} \mathcal{B}(q) \in A\right) + \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{P_1^x} \mathcal{B}(1-q) \in A\right)\right).$$

Notons que, du *point de vue* des parasites, la division cellulaire correspond à un environnement aléatoire : soit la cellule meurt et tue la sous-population, soit elle n'évolue pas et l'environnement est neutre, soit elle se divise et crée deux sous-populations (ou autrement dit une partie de la population est tuée du point de vue d'une lignée de parasites donnée).

4.5 Formule pour les fourches

On a pour l'instant établi le comportement moyen des étiquettes au sein de la population. On aimerait désormais étudier des couples d'échantillons, pour mettre un effet de concentration, de type loi des grands nombres. Pour ce faire, on étudiera des individus dont les lignées ont divergé à un certain moment, d'où l'appellation de *fourche*.

On se place ici dans le cas L^2, où $\mathbb{E}[L^2] < \infty$ (et $m > 1$).

Définition 52 :

Étant donnée une lignée $x \in \chi^{\mathbb{N}}$ et une famille de fonctions $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mesurables bornées sur χ, on note $F_{i,j}(x) = \prod_{k=0}^{j-i} f_{i+k}(x_k)$.

Proposition 53 :

Pour tout étiquette initiale $x \in \chi$ et toute génération $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{u\neq v\in G_n} F_{0,n}\big((X(w))_{w\leq u}\big) \times G_{0,n}\big((X(w))_{w\leq v}\big)\right] = \sum_{p=0}^{n-1} m^p \mathbb{E}_x\left[F_{0,p}G_{0,p}\Big((Y_i)_{i\leq p}\Big) \times H_{p,n}(Y_p)\right],$$

où $H_{p,n}(y) = m^{2(n-p-1)}\mathbb{E}_y\left[\sum_{a\neq b\in G_1} \mathbb{E}_{X(a)}\left[F_{p+1,n}\Big((Y_i)_{i\leq n-p-1}\Big)\right] \times \mathbb{E}_{X(b)}\left[G_{p+1,n}\Big((Y_i)_{i\leq n-p-1}\Big)\right]\right]$.

Démonstration. On peut partitionner les couples distincts dans G_n en fonction de la génération de leur dernier ancêtre commun w, selon le paramètre $p \in [\![0, n-1]\!]$. Étant donné cet ancêtre étiqueté $X(w)$, on considère alors deux de ses descendants $a \neq b$. On peut alors appliquer la formule *many-to-one* aux fonctions $F_{p+1,n}$ et $G_{p+1,n}$, qui évoluent dans des lignées indépendantes conditionnellement à la génération G_{p+1}.

Quitte à passer à l'espérance conditionnelle selon G_p, on fait apparaître la fonction $H_{p,n}(X(w))$. On se ramène à une fonction qui, elle, ne dépend que de la lignée de w, des étiquettes $(X(z))_{z\leq w}$, à laquelle on peut à nouveau appliquer le théorème. $\square$

Corollaire 54 :

Si $F = G$ ne dépend que de la valeur finale :

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{u\neq v\in G_n} f(X(u))f(X(v))\right] = \sum_{p=0}^{n-1} m^{2(n-1)-p}\mathbb{E}_x[h_{n,p}(Y_p)],$$

avec $h_{n,p}(y) = \mathbb{E}_y\left[\sum_{a\neq b\in G_1} \mathbb{E}_{X(a)}[f(Y_{n-p-1})]\mathbb{E}_{X(b)}[f(Y_{n-p-1})]\right]$.

4.6 Loi des grands nombres

Considérons f mesurable bornée, telle que $\mathbb{E}_x[f(Y_n)] \xrightarrow{\text{p.s.}} \pi(f)$ pour une certaine mesure π.

Remarque 55 :

C'est en particulier le cas pour toute fonction f lorsque la Q-chaîne de Markov est ergodique.

En particulier, pour un graphe de transitions fini, cette propriété est vérifiée lorsque le système est irréductible apériodique.

Théorème 56 :

Sous l'hypothèse précédente, sous l'évènement $\{\forall n \in \mathbb{N},\, |G_n| > 0\}$ de non-extinction, on a la convergence :

$$\frac{1}{|G_n|}\sum_{u\in G_n} f(X(u)) \longrightarrow \pi(f)\,,$$

dans L^2 donc en probabilité.

Démonstration. On peut réécrire le terme comme le produit de $\frac{m^n}{|G_n|}$ et du terme précédent en remplaçant $|G_n|$ par m^n. Le facteur à gauche converge vers $\frac{1}{W}$ sous l'évènement de non-extinction. Quitte à recentrer, étudions désormais $\Delta_n = \frac{1}{m^n}\sum\limits_{u\in G_n} g(X(u))$, où $g(x) = f(x) - \pi(f)$, encore mesurable bornée.

On a $\mathbb{E}[\Delta_n^2] = \frac{1}{m^{2n}}\mathbb{E}\left[\sum\limits_{u\in G_n} g(X(u))^2 + \sum\limits_{u\neq v\in G_n} g(X(u))g(X(v))\right]$. L'espérance de la partie de gauche est de l'ordre de m^n, écrasée par le m^{2n}. On a donc :

$$\mathbb{E}\left[\Delta_n^2\right] = o(1) + \sum_{p=0}^{n-1} m^{-p-2}\mathbb{E}[h_{n,p}(Y_p)]\,.$$

Notons que $\mathbb{E}[h_{n,p}(Y_p)] \leq \|f\|_\infty^2\mathbb{E}[L^2] < \infty$, donc on peut tronquer la somme à un rang K fini indépendamment de n, de sorte que ce qui dépasse soit majoré par ε. On veut donc majorer $\sum\limits_{p=0}^{K} m^{-p-2}\mathbb{E}[h_{n,p}(Y_p)]$ pour $n \to \infty$ à K fixé. Ce faisant, on utilise la propriété d'ergodicité sur g, $\mathbb{E}[g(Y_n)] \longrightarrow 0$, pour conclure que ces $K+1$ termes convergent vers 0 lorsque $n \to \infty$ par convergence dominée.

On a ainsi établi la convergence L^2 donc en probabilité de Δ_n vers 0. On en déduit directement la convergence en probabilité de la somme initiale vers $\pi(f)$, et on obtient une convergence L^2 avec un peu plus d'efforts. $\square$

4.7 Application au BAR

Proposition 57 :
Dans ce cas, la Q-chaîne Y est égale en loi à la chaîne de Markov Z définie via $Z_0 = Y_0$ et $Z_{n+1} = \theta_{n+1} Z_n + \varepsilon_{n+1}$, avec $\varepsilon_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\theta_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{U}(\{\alpha, \beta\})$.

Remarque 58 :
On peut écrire $Z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k \prod\limits_{j=k+1}^{n} \theta_j + Y_0 \prod\limits_{j=1}^{n} \theta_j$. Conditionnellement aux valeurs de θ, la somme de gauche a la loi $\mathcal{N}(0, A(\theta_1, \dots, \theta_n))$, où $A(\theta_1, \dots, \theta_n) = \sigma^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \prod\limits_{j=k+1}^{n} \theta_j^2$.

En outre, $A(\theta_1, \dots, \theta_n) \overset{\text{d}}{=} A(\theta_n, \dots, \theta_1) = \sigma^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \prod\limits_{j=1}^{k} \theta_j^2$. Ce nouveau terme a une convergence monotone vers A_∞ pour $n \to \infty$. On peut réécrire $A_\infty = \sigma^2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{S_{k-1}}$, avec la marche aléatoire $S_n = 2 \sum\limits_{j=1}^{n} \ln(\theta_j)$.

Lemme 59 :
Si $\alpha\beta < 1$, alors la marche a un drift négatif, $S_n \to -\infty$ linéairement. Dans ce cas, on a donc $A_\infty < \infty$ p.s. d'où la convergence en loi de Y_n vers $\mathcal{N}(0, A_\infty)$. Notons π cette loi limite.

Si $\alpha\beta \geq 1$, alors Y_n tend en probabilité vers $+\infty$.

Théorème 60 (Régime stable) **:**
Lorsque $\alpha\beta < 1$, $\frac{\#\{u \in G_n, X(u) \in [a,b]\}}{2^n} \xrightarrow{L^2} \pi([a,b])$, avec $\pi([a,b]) = \int\limits_0^\infty \int\limits_a^b \frac{e^{-\frac{y^2}{2\sigma}}}{\sqrt{2\pi\sigma}} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}\mathbb{P}_{A_\infty}(\sigma)$.

4.8 Application au modèle de Kimmel

Remarque 61 :
Pour revenir à l'aspect *environnement aléatoire* pour les parasites, on peut considérer un paramètre aléatoire dans $E = \{q, 1-q, 1\}$, où chaque parasite survit avec probabilité $e \in E$ après la phase de reproduction. Notons ainsi $L_j^e \sim \mathcal{B}(e)$.

On peut réécrire le noyau Q sous la forme :

$$Q(x, A) = \widehat{p}_1 \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{P} L_j^1 \in A \right) + \frac{\widehat{p}_2}{2} \left(\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{P} L_j^q \in A \right) + \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{P} L_j^{1-q} \in A \right) \right).$$

où P est la loi de reproduction des parasites. On a ainsi une loi $\varepsilon = \widehat{p}_1 \delta_1 + \frac{\widehat{p}_2}{2} \delta_q + \frac{\widehat{p}_2}{2} \delta_{1-q}$ sur l'environnement.

Proposition 62 :

On a donc un processus de branchement (Y_n) en environnement aléatoire ε, avec les lois de reproduction $(L(e))_{e\in E}$ à expliciter.

Théorème 63 :

On dit que l'organisme guérit lorsque la proportion de cellules infectées tend vers 0.

Lorsque $\ln(\mathbb{E}[P]) \leq \frac{p_2}{m}\ln\left(\frac{1}{q(1-q)}\right)$, alors $\mathbb{1}_{G_n\neq\emptyset}\frac{\#\{u\in G_n, X(u)>0\}}{|G_n|} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Remarque 64 :

Supposons désormais $p_2 = 1$, et donc $m = 2$. Dans ce cas, l'arbre de reproduction des cellules est un arbre binaire, déterministe.

Dans ce cas, le critère devient $\mathbb{E}[P]^2 q(1-q) \leq 1$. Si on pose $m_1 = q\mathbb{E}[P]$ et $m_2 = (1-q)\mathbb{E}[P]$, on écrit le critère sous la forme $m_1 m_2 \leq 1$.

Si on note $N_n = \#\{u \in G_n,\, X(u) > 0\}$, alors N_n est de l'ordre de 2^n lorsque l'infection se propage, et les cellules infectées le sont par une grosse population.

Dans ce contexte, sans extinction de cellules, le nombre total de parasites est un processus de Galton-Watson. En particulier, lorsque $\mathbb{E}[P] = m_1 + m_2 \leq 1$, la population de parasites s'éteint en temps fini, l'infection disparait entièrement en temps fini.

Lorsque $\mathbb{E}[P] > 1$ mais que $m_1 m_2 < 1$, on peut distinguer deux régimes, selon un critère entropique. Lorsque $m_1 \ln(m_1) + m_2 \ln(m_2) < 0$, la loi de répartition est trop uniforme, et le nombre de cellules infectées est de l'ordre de $\mathbb{E}[P]^n$. Sinon, il y a une répartition assez peu homogène pour non seulement garantir $N_n \ll m^n = 2^n$ mais aussi $N_n \ll \mathbb{E}[P]^n$.

5 Vitesse d'invasion dans un modèle spatial

Remarque 65 :

On se replace dans le contexte d'une marche branchante. On a une loi de reproduction L, telle que $m = \mathbb{E}[L] < \infty$.

On considère la variable de déplacement D à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui quantifie à quel point chaque descendant s'éloigne de son parent. On suppose $\mathbb{E}[D] = 0$, et $\mathrm{Var}(D) = \sigma^2 \in \mathbb{R}^{+*}$. On a alors la loi de reproduction $\theta^x = (x + D_i)_{i \leq L}$, $D_i \overset{\text{iid}}{\sim} D$ indépendamment de la variable L.

On s'intéresse à la vitesse d'invasion, autrement dit à l'individu au déplacement maximal à un instant donné.

5.1 Premiers résultats

Remarque 66 :

Dans ce contexte, comme les descendants se comportent tous de la même façon, on a en fait le noyau $Q_x \sim x + D$, de sorte que $Q(x, A) = \mathbb{P}(x + D \in A)$. Ainsi, Y est simplement une marche aléatoire de pas D. Par le TCL, on a la convergence en loi de $\frac{Y_n}{\sqrt{n}}$ vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Proposition 67 :

On a la convergence :

$$\frac{1}{|G_n|}\#\{n \in G_n,\, a\sqrt{n} \le X(u) \le b\sqrt{n}\} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P},\, L^2} \mathbb{P}\big(\mathcal{N}(0,\sigma^2) \in [a,b]\big)\,.$$

Démonstration. On définit la fonction $F_n(x_0,\dots,x_n) = \mathbb{1}_{[a,b]}\left(\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)$. Par la formule *many-to-one* :

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{u\in G_n} F_n(X(v),\, v \le u)\right] = m^n\mathbb{E}_x[F_n(Y_i,\, i\le n)] = m^n\mathbb{P}_x\left(\frac{Y_n}{\sqrt{n}} \in [a,b]\right).$$

Par le TCL, le terme de droite converge vers la probabilité souhaitée. On a ainsi établi un comportement moyen. On peut adapter les raisonnements précédents pour conclure. □

5.2 Grandes déviations

on a $N_n(v) := \mathbb{E}[\#\{u\in G_n,\, X(u) \ge nv\}] = m^n\mathbb{P}(Y_n \ge nv)$. En invoquant des résultats de grandes déviations qu'on va détailler ci-après, on peut obtenir une fonction ψ croissante, telle que $\mathbb{P}(Y_n \ge nv) \sim e^{-\psi(v)n}$. Ce faisant, si $\psi(v) > \ln(m)$, alors $N_n(v) \ll 1$. Sinon, si $\psi(v) < \ln(m)$, alors $N_n(v) \gg 1$. On peut donc chercher le seuil critique v^* où $\psi(v^*) = \ln(m)$.

Remarque 68 :

Supposons que $\Lambda(\theta) = \ln\big(\mathbb{E}\big[e^{\theta D}\big]\big)$ est bien définie, donc que D admet des moments de tout ordre, avec une décroissance exponentielle.

Par dérivation sous l'intégrale, $\Lambda''(\theta) = \frac{\mathbb{E}\left[D^2e^{\theta D}\right]\mathbb{E}\left[e^{\theta D}\right] - \mathbb{E}\left[De^{\theta D}\right]^2}{\mathbb{E}\left[e^{\theta D}\right]^2} \ge 0$. Ainsi, $\Lambda'(\theta) = \frac{\mathbb{E}\left[De^{\theta D}\right]}{\mathbb{E}\left[e^{\theta D}\right]}$ est croissante, admet une limite $\gamma \in \mathbb{R}^{+*} \cup \{\infty\}$ en $+\infty$.

On définit la transformée de Fenchel-Legendre $\psi(x) = \sup\{\theta x - \Lambda(\theta),\, \theta \in \mathbb{R}\}$. Ce supremum est ici toujours atteint pour $\theta \ge 0$. On obtient ainsi une fonction convexe croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Notons que $\partial_\theta[\theta x - \Lambda(\theta)] = 0$ lorsque $x = \Lambda'(\theta)$. On peut trouver un tel x lorsque $0 \le x < \gamma$. Dans ce cas, il existe un unique $\theta(x)$ tel que $\Lambda'(\theta(x)) = x$, et $\psi(x) = \theta(x)x - \Lambda(\theta(x))$. Lorsque $x > \gamma$, alors $\psi(x) = \infty$.

Remarque 69 :

Par exemple, lorsque $D \sim \mathcal{U}(\pm 1)$, on a $\Lambda(\theta) = \ln\left(\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}\right)$, et $\theta(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

On a alors $\psi(x) = \frac{1}{2}((1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x))$ lorsque $0 \le w \le 1$, et notablement $\psi(1) = \ln(2)$, puis $\psi(x) = \infty$ si $x > 1$.

Théorème 70 :

Si $x \in [0, \gamma[$, alors $\frac{1}{n}\ln(\mathbb{P}(Y_n \geq nx)) \longrightarrow -\psi(x)$.

Démonstration. Par inégalité de Markov, on a :

$$\mathbb{P}(Y_n \geq nx) \leq \mathbb{E}\left[e^{\theta Y_n - \theta nx}\right] \leq \mathbb{E}\left[e^{\theta D - \theta x}\right]^n,$$

et quitte à optimiser selon θ, on majore finalement $e^{-n\psi(x)}$.

Pour la borne inférieure, considérons l'unique θ tel que $\Lambda'(\theta) = x$. On définit la variable $\widetilde{D}$, absolument continue par rapport à D, via $\mathrm{d}\mathbb{P}_{\widetilde{D}}(y) = \frac{e^{\theta y}}{\mathbb{E}[e^{\theta D}]}\,\mathrm{d}\mathbb{P}_D(y)$. On a naturellement :

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{D}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[De^{\theta D}\right]}{e^{\theta D}} = \Lambda'(\theta) = x\,.$$

Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_n \geq nx) &= \int \mathbb{1}_{\sum\limits_{j=1}^{n} y_j \geq nx} \prod_{j=1}^{n} \mathrm{d}\mathbb{P}_D(y_j) \\
&= \mathbb{E}\left[e^{\theta D}\right]^n \int \mathbb{1}_{\sum\limits_{j=1}^{n} y_j \geq nx}\, e^{-\theta \sum\limits_{j=1}^{n} y_j} \prod_{j=1}^{n} \mathrm{d}\mathbb{P}_{\widetilde{D}}(y_j) \\
&= \mathbb{E}\left[e^{\theta D}\right]^n \times \mathbb{E}\left[e^{-\theta \widetilde{Y}_n} \mathbb{1}_{\widetilde{Y}_n \geq nx}\right] \\
&= e^{n\Lambda(\theta)}\mathbb{E}\left[e^{-\theta \widetilde{Y}_n} \mathbb{1}_{\widetilde{Y}_n \geq nx}\right],
\end{aligned}$$

avec $\widetilde{Y}$ une marche aléatoire de pas $\widetilde{D}$ cette fois-ci. Par un calcul similaire, on a en fait :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(nx \leq Y_n \leq n(x+\delta)) &\geq e^{n\Lambda(\theta)} \times e^{-n\theta(x+\delta)}\mathbb{P}\left(x \leq \tfrac{\widetilde{Y}_n}{n} \leq x + \delta\right) \\
&= e^{-n\psi(x) - n\delta\theta(x)}\mathbb{P}\left(x \leq \tfrac{\widetilde{Y}_n}{n} \leq x + \delta\right),
\end{aligned}$$

et la probabilité de droite converge vers $\frac{1}{2}$. On a donc $\underline{\lim}\, \frac{1}{n}\ln(\mathbb{P}(Y_n \geq nx)) \geq -\psi(x) - \theta(x)\delta$ à la limite, et ce indépendamment du δ choisi, d'où le résultat. □

5.3 Borne supérieure pour l'invasion

Définition 71 :

Soit $R_n = \max\{X(u),\, u \in G_n\}$, la position du *front* d'invasion au temps n.

Proposition 72 :

On a $\overline{\lim}\, \frac{R_n}{n} \leq v^*$.

Démonstration. Soit $v > v^*$, de sorte que $\psi(v) > \psi(v^*) = \ln(m)$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_n \geq vn) &= \mathbb{P}(\#\{u \in G_n,\, X(u) \geq vn\} \geq 1) \\
&\leq \mathbb{E}[\#\{u \in G_n,\, X(u) \geq vn\}] \\
&= m^n \mathbb{P}(Y_n \geq vn) \\
&= N_n(v) \\
&\to 0\,,
\end{aligned}$$

par la remarque initiale sur les grandes déviations, car on a une décroissance exponentielle d'ordre $\ln(m) - \psi(v) < 0$.

Comme la décroissance est exponentielle, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(R_n \geq nv) < \infty$, donc par Borel-Cantelli, presque-sûrement, à partir d'un rang, on a $R_n < nv$, d'où $\overline{\lim}\, \frac{R_n}{n} \leq v$. En passant à l'infimum sur les v considérés, on a le résultat annoncé. $\square$

5.4 Borne inférieur pour l'invasion

Proposition 73 :

Soit $S = \{\forall n \in \mathbb{N},\, |G_n| > 0\}$ l'évènement de survie de la population. Sous cet évènement, $\underline{\lim}\, \frac{R_n}{n} \geq v^*$.

Démonstration. Soit désormais $v < v^*$ sous-critique. On pose $Z^{(p)} = \#\{u \in G_p,\, X(u) \geq pv\}$. On a $\mu_p = \mathbb{E}\big[Z^{(p)}\big] = m^p \mathbb{P}(Y_p \geq pv) \approx \exp(p(\ln(m) - \psi(v)))$ qui explose exponentiellement car $\ln(m) > \psi(v)$. En particulier, on a un certain rang p tel que $\mu_p > 1$.

De façon informelle, on regarde désormais le processus toutes les p étapes. En outre, au bout de p étapes, on ne garde que les individus qui ont dépassé le front pv. Ce faisant, on extrait du processus initial un processus de Galton-Watson, de loi de reproduction $Z^{(p)}$ avec une espérance $\mu_p > 1$.

Il reste deux soucis à régler formellement : d'une part, justifier que sous l'évènement de survie de la population globale, on peut garantir la survie d'une telle sous-population. Pour ce faire, on attendra une explosion exponentielle de la population initiale, puis on pourra étudier une grande quantité de telles lignées dérivant de façon indépendante. D'autre part, justifier que tout se passe *bien* dans les étapes intermédiaires, aux temps $p\mathbb{N} + 1, \ldots, p\mathbb{N} + (p-1)$, durant lesquelles on ne doit pas *trop* dériver vers la gauche. A nouveau, si on part d'individus aux étapes $0, \ldots, p-1$ dans des lignées séparées, on peut étudier séparément le front de chaque classe pour conclure sur le front de la population globale. $\square$

Remarque 74 :

Le souci de l'approche tous-pour-un précédente est qu'elle met autant de poids sur chaque individu de la population, a priori. Il existe d'autres variantes qui permettent de compenser ce phénomène.

Théorème 75 (Formule *many-to-one* à biais exponentiel) **:**

Soit $\rho > 0$. On suppose que les traits sont réels. Alors :

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{u \in G_n} e^{\rho X(u)} F(X(v),\, v \leq u)\right] = e^{\rho x} \lambda(\rho)^m \mathbb{E}_x[F(Y_i,\, i \leq n)]\,,$$

avec $\lambda(\rho) = m \times \mathbb{E}\left[e^{\rho D}\right]$.

Idée. On commence par appliquer la formule *many-to-one* classique à la fonction produit définie comme $G(X(v),\, v \leq u) = e^{\rho X(u)} F(X(v),\, v \leq u)$. On obtient ainsi une espérance en $G(Y)$. Pour passer de cette formule à une espérance en $F(Y)$, on fait alors un changement de probabilité. □

6 Populations structurées non neutres

Dans ce cas de figure, on veut considérer des modèles non *neutres*, où le trait a une influence sur la loi de reproduction. On parle alors également de chaînes de Markov branchantes.

6.1 Définition et construction

Définition 76 :

Dans ce cas de figure, le nombre de descendants pour le trait $x \in \chi$ suit la loi L_x à valeurs dans $\mathbb{N}$. Les traits des descendants de x suivent alors une loi $\theta_x = \left(X_1^{(x)}, \ldots, X_{L_x}^{(x)}\right)$.

On considère la famille de variables $(L_x(u), \theta_x(u))_{x \in \chi,\, u \in T}$ indépendants, avec $\theta_x(u) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \theta_x$, et $L_x(u) = \|\theta_x(u)\|_0 \stackrel{\mathrm{d}}{=} L_x$.

on peut alors obtenir un processus non neutre, par induction. On part de $G_0 = \{\varepsilon\}$, avec le trait x. On construit alors conjointement $G_{n+1} = \left\{vk,\, v \in G_n,\, 1 \leq k \leq L_{X(v)}(v)\right\}$, ainsi que les variables $X(vk) = X_k^{(X(v))}(v)$.

Autrement dit, on initialise la chaîne de Markov branchante X en $X_0 = \{(\varepsilon, x)\}$, et on a plus largement $X_n = \{(u, X(u)),\, u \in G_n\}$.

6.2 Généralisation de la formule tous-pour-un

Définition 77 :

Comme précédemment, on peut définir le noyau M_x via $M_x(f) = \mathbb{E}_x\left[\sum_{u\in G_1} f(X(u))\right]$.

On a plus généralement $M_n(x,f) = \mathbb{E}_x\left[\sum_{u\in G_n} f(X(u))\right]$.

Proposition 78 :

La famille $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme un semi-groupe de mesures positives.

Démonstration. Voir la démonstration dans le cas neutre. □

Proposition 79 :

Soient $n \geq 0$, F mesurable positive sur χ^{n+1} et φ mesurable positive sur χ. Alors :

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{u\in G_n} \varphi(X(u))F(X(v),\, v\leq u)\right] = M_n(x,\psi)\times \mathbb{E}_x\left[F\left(Y_i^{(n)},\, i\leq n\right)\right],$$

où $\left(Y_i^{(n)}\right)_{i\leq n}$ est une chaîne de Markov inhomogène, avec les noyaux de transitions $\left(Q_i^{(n)}\right)_{i<n}$ définis par :

$$\mathbb{P}\left(Y_{i+1}^{(n)}\in A\middle|Y_i^{(n)}=x\right) = Q_i^{(n)}(x,A) := \frac{1}{M_{n-i}(y,\psi)}\int_A M_{n-i-1}(y,\psi)\,\mathrm{d}M_x(y)\,.$$

Démonstration. On peut établir le résultat sur les fonctions cylindriques $F_n(x) = \prod_{j=0}^{n} f_j(x_j)$, puis conclure par un lemme de classes monotones. Dans ce cas, avec $G = \psi\times f_{n+1}$, par récurrence sur le rang n :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sum_{u\in G_{n+1}} \psi(X(u))F_{n+1}(X(v),\, v\leq u)\right]\\
=\;&\mathbb{E}\left[\sum_{w\in G_n} F_n(X(v),\, v\leq w)\times \mathbb{E}\left[\sum_{u\in G_{n+1},\, u\geq w} \psi(X(u))f_{n+1}(X(u))\middle|\mathcal{F}_n\right]\right]\\
=\;&\mathbb{E}\left[\sum_{w\in G_n} F_n(X(v),\, v\leq w)\times \mathbb{E}\left[\sum_{u\in G_{n+1},\, u\geq w} G(X(u))\middle|\mathcal{F}_n\right]\right]\\
=\;&\mathbb{E}\left[\sum_{w\in G_n} F_n(X(v),\, v\leq w)\times M(X(w),G)\right]\\
=\;&\mathbb{E}\left[\sum_{w\in G_n} \psi(X(w))\widetilde{F_n}(X(v),\, v\leq w)\right],
\end{aligned}$$

avec $\widetilde{F_n}(y) = F_n(y)\frac{M(y_n,G)}{\psi(y_n)}$. On utilise alors l'hypothèse de récurrence, puis le lemme ci-après, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
&= M_n(x,\psi)\mathbb{E}_x\left[\widetilde{F_n}\left(Y_i^{(n)},\, i\leq n\right)\right] \\
&= M_n(x,\psi)\int_{\chi^n} F_n(y)\tfrac{M(y_n,\psi f_{n+1})}{\psi(y_n)} \times \tfrac{\psi(y_n)}{M_n(x,\psi)} \times \prod_{i=0}^{n-1} M(y_i,\mathrm{d}y_{i+1}) \\
&= \int_{\chi^n} F_n(y)M(y_n,\psi f_{n+1}) \times \prod_{i=0}^{n-1} M(y_i,\mathrm{d}y_{i+1}) \\
&= \int_{\chi^{n+1}} F_{n+1}(y)\psi(y_{n+1}) \prod_{i=0}^{n} M(y_i,\mathrm{d}y_{i+1}) \\
&= M_{n+1}(y,\psi)\mathbb{E}_x\left[F_{n+1}\left(Y_i^{(n+1)},\, i\leq n+1\right)\right].
\end{aligned}$$

□

Lemme 80 :

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{y_0}\left[F\left(Y_i^{(n)},\, i\leq n\right)\right] &= \int_{\chi^n} F(y_i,\, i\leq n)\prod_{i=0}^{n-1} Q_j^{(n)}(y_i,\mathrm{d}y_{i+1}) \\
&= \int_{\chi^n} F(y_i,\, i\leq n)\tfrac{\psi(y_n)}{M_n(y_0,\psi)}\prod_{i=0}^{n-1} M(y_i,\mathrm{d}y_{i+1}).
\end{aligned}$$

Corollaire 81 :

Supposons que, pour tout $x\in\chi$, $M(x,\psi)=\lambda\psi(x)$. Alors le résultat précédent se raffine en :

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{u\in G_n}\psi(X(u))F(X(v),\, v\leq u)\right] = \lambda^n\mathbb{E}_x[F(Y_i,\, i\leq n)],$$

avec cette fois-ci Y une chaîne de Markov homogène, de noyau $\mathrm{d}Q_x(y)=\frac{\psi(y)}{\lambda\psi(x)}\,\mathrm{d}M_x(y)$.

6.3 Cas moyen

Théorème 82 (Contraction de Doeblin) **:**

Soient P un noyau markovien sur χ. Supposons qu'il existe une probabilité ν telle que $P_x\geq c\nu$ uniformément.

Dans ce cas, pour tous μ,θ sur χ, on a $\|\mu P-\theta P\|_{\mathrm{VT}}\leq(1-c)\|\mu-\theta\|_{\mathrm{VT}}$.

A fortiori, il existe une mesure P-invariante, et on a convergence à vitesse géométrique vers cette mesure invariante.

Démonstration. Quitte à faire un couplage via $Q_x=c\nu+(1-c)R$, avec le noyau $R=\frac{P-c\nu}{1-c}$, on a naturellement $\|\mu P-\theta P\|=(1-c)\|\mu R-\theta R\|\leq(1-c)\|\mu-\theta\|$. □

Corollaire 83 :

Supposons que, pour tous $i \leq n$, et tout $x \in \chi$, on a $Q_i^{(n)}(x, \cdot) \geq c\nu$. Alors il existe une mesure de probabilité π sur χ telle que $\sup_{x\in\chi,\,|f|\leq 1} \left|\mathbb{E}_x\left[f\left(Y_n^{(n)}\right)\right] - \pi(f)\right| \leq (1-c)^n$.

6.4 Exemple d'une population structurée en âge

Remarque 84 :

On considère des traits $a \in \mathbb{N}$ pour l'âge. On reste dans un cadre de division cellulaire, où $L(a) \in \{0, 1, 2\}$, autrement dit où les cellules peuvent mourir, survivre ou se diviser.

Si $L(a) = 0$, avec probabilité $p_0(a)$, il n'y a pas de descendance. Si $L(a) = 1$, avec probabilité $p_1(a)$, alors le descendant a le trait $a+1$. Si $L(a) = 2$, avec probabilité $p_2(a)$, alors les descendants ont les traits $(a + 1, 0)$.

Supposons que p_1 et $_2$ sont des fonctions décroissantes, à valeurs dans $]0, 1[$. Supposons en outre qu'il existe $c > 0$ tel que $p_1 \leq cp_2$.

Proposition 85 :

Il existe une probabilité π sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tous $a_0, a \in \mathbb{N}$, on a la convergence $\frac{\mathbb{E}_{a_0}[\#\{u\in G_n,\, X(u)=a\}]}{\mathbb{E}_{a_0}[|G_n|]} \longrightarrow \pi(a)$ à vitesse géométrique.

On a de plus la convergence $\frac{\#\{u\in G_n,\, X(u)=a\}}{|G_n|} \longrightarrow \pi(a)$ dans L^2 et p.s. sous l'évènement de survie de la population.

Idée. Pour le premier point, on utilise la formule tous-pour-un avec $F_n(y) = \delta_{y_n,a}$ et $\psi = 1$. Ainsi :

$$\mathbb{E}_{a_0}[\#\{u \in G_n,\, X(u) = a\}] = \mathbb{E}_{a_0}[|G_n|]\mathbb{E}_{a_0}\left[F_n\left(Y^{(n)}\right)\right].$$

Grâce aux propriétés de monotonie de p, on vérifie la condition de Doeblin avec la mesure δ_0, ce qui permet alors de conclure sur le résultat. $\square$

Proposition 86 :

La population survit avec probabilité positive ssi $\sum_{a\geq 0} p_2(a) \prod_{b=0}^{a-1}(1 - p_0(b)) > 1$, auquel cas $|G_n| \longrightarrow \infty$ sous l'évènement de survie.

Démonstration. Soit T le temps de survie de la racine. On a $\mathbb{P}(T \geq a + 1|T \geq a) = 1 - p_0(a)$. En outre, à chaque instant où elle survit, la cellule a une chance de produire un enfant. On a donc $N = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{T\geq n,\ \text{la racine a un enfant au temps } n}$ le nombre d'enfants produits en tout. En passant à l'espérance, on obtient l'expression annoncée pour $\mathbb{E}[N]$.

En outre, grâce à cette construction, on peut identifier un processus de Galton-Watson au sein de la population, de loi de reproduction N, d'où le résultat. $\square$

7 Approximations en grandes populations

7.1 Définition

Définition 87 :

On travaille sur l'espace $I = \bigsqcup_{n \geq 1} \mathbb{N}^n$. On considère une échelle $K \geq 1$, associée à une variable L^K à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note alors $p_k^K = \mathbb{P}\big(L^K = k\big)$. Dans ce cas, la loi de dispersion devient $x \mapsto \theta_x^K = \big(x + D_1^K, \ldots, x + D_{L^K}^K\big)$, avec $D_i^K \overset{\text{iid}}{\sim} \frac{D}{K}$ à valeurs réelles, et D centrée de variance $\sigma^2 < \infty$.

On part de G_0^K la génération initiale, à Z_0^K individus. On peut donc définir les variables $\big(L^K(u)\big)_{u \in I}$ iid de loi L^K, et les variables $\big(D_i^K(u)\big)_{u \in I, i \geq 1}$ iid de loi $\frac{D}{K}$. On introduit alors les ensembles $G_{n+1}^K = \big\{uk,\, u \in G_n^K,\, 1 \leq k \leq L^K(u)\big\}$ de façon récurrente, avec les étiquettes $X^K(uk) = X^K(u) + D_k^K(u)$.

L'objet d'étude qui nous intéresse est la mesure empirique $X_n^K = \frac{1}{K} \sum_{u \in G_n^K} \delta_{X^K(u)}$ sur $\mathbb{R}$. Avec les bons changements d'échelle, on aimerait converger faiblement vers une mesure à densité.

7.2 Décomposition en semi-martingale

Proposition 88 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. On note $X_n^K(f)$ l'intégrale de f sous la mesure aléatoire.

On a la décomposition $X_n^K(f) = V_n^K(f) + M_n^K(f)$ où $V_n^K(f)$ est une variable $\mathcal{F}_{n-1}^K$-mesurable, et $\big(M_n^K(f)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.

En outre, $V_n^K(f) = X_0^k(f) + \sum_{k=1}^{n} \Delta_k^K(f)$ avec $\Delta_k^K(f) = \mathbb{E}\big[X_k^K(f) - X_{k-1}^K \big| \mathcal{F}_{k-1}\big]$.

D'autre part, naturellement, $M_n^K = \sum_{k=1}^{n} \delta_k^K(f)$, avec $\delta_k^K(f) = X_k^K(f) - X_{k-1}^K - \Delta_k^K(f)$.

Remarque 89 :

On a ici $M^K(x, f) = m^K \mathbb{E}\big[f\big(x + \frac{D}{K}\big)\big]$ avec $m^K = \mathbb{E}\big[L^K\big]$.

On peut également réécrire $M^K(x, f) = K\mathbb{E}_{(1,x)}\big[X_1^K(f)\big]$. On en déduit :

$$\Delta_k^K(f) = \frac{1}{K} \sum_{u \in G_{k-1}^K} M^K\big(X^K(u), f\big) - f\big(X^K(u)\big)\,.$$

Proposition 90 :

Supposons f mesurable bornée et $\mathbb{E}\left[\left(L^K\right)^2\right] < \infty$. On a :

$$M_n K(f)^2 = \frac{1}{K^2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{u \in G_{k-1}^K} G^k(X(u)) + \widetilde{M}_n \,,$$

avec $\left(\widetilde{M}_n\right)_{n\geq 0}$ une martingale, et :

$$G^k(x) = \mathbb{E}_{(1,x)}\left[\left(M^K(x,f) - \sum_{w \in G_1^K} f\left(X^K(w)\right)^2\right)\right].$$

Démonstration. On adapte la proposition précédente, avec une décomposition analogue :

$$M_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\Delta}_n + \widetilde{M}_n \,,$$

avec $\widetilde{\Delta}_k = \mathbb{E}\left[M_k^2 - M_{k-1}^2 \middle| \mathcal{F}_{k-1}\right]$. Pour le terme de gauche, remarquons que $M_k^2 = (M_{k-1} + \delta_k)^2$, donc en développant puis en passant à l'espérance :

$$\widetilde{\Delta}_k = \mathbb{E}\left[2M_{k-1}\delta_k + \delta_k^2 \middle| \mathcal{F}_{k-1}\right] = \mathbb{E}\left[\delta_k^2 \middle| \mathcal{F}_{k-1}\right].$$

En outre, $\delta_k^2 = (X_k - X_{k-1} - \Delta_k)^2$, et Δ_k est $\mathcal{F}_{k-1}$-mesurable par définition, d'où :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}_k &= \mathbb{E}\left[(X_k - X_{k-1})^2 \middle| \mathcal{F}_{k-1}\right] - \Delta_k^2 \\
&= \tfrac{1}{K^2}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{u \in G_{k-1}} \sum_{w \in G_k, w \geq u} f(X(w)) - f(X(u))\right)^2 \middle| \mathcal{F}_{k-1}\right] \\
&- \tfrac{1}{K^2}\left(\sum_{u \in G_{k-1}} M(X(u), f) - f(X(u))\right)^2 \\
&=: \tfrac{1}{K^2}\left(\mathbb{E}\left[\left(\sum_{u \in G_{k-1}} R(u)\right)^2 \middle| \mathcal{F}_{k-1}\right] - \left(\sum_{u \in G_{k-1}} M(X(u), f) - f(X(u))\right)^2\right).
\end{aligned}$$

Si on développe la somme en u dans le terme de gauche, lorsque $u \neq v \in G_{k-1}$, comme $R(u)$ et $R(v)$ sont indépendants conditionnellement à $\mathcal{F}_{k-1}$, on fait apparaître les termes correspondants dans le carré de droite. On a donc :

$$K^2 \widetilde{\Delta}_k = \sum_{u \in G_{k-1}} \mathbb{E}\left[R(u)^2 \middle| \mathcal{F}_{k-1}\right] - \mathbb{E}[R(u) | \mathcal{F}_{k-1}]^2 \,,$$

et on peut enfin se ramener à l'expression initialement annoncée. $\square$

7.3 Un cadre de convergence

Remarque 91 :

Avec la formule *many-to-one*, on obtient :

$$\mathbb{E}_{(1,0)}\left[X_n^K(f)\right] = \mathbb{E}\left[L^K\right]^n \times \frac{1}{K}\mathbb{E}_0\left[f\left(S_n^K\right)\right],$$

avec $\left(S_n^K\right)$ une marche aléatoire de pas $\frac{D}{K}$. Par linéarité, en partant de K individus on a donc :

$$\mathbb{E}_{(1,0),\dots,(K,0)}\left[X_n^K(f)\right] = \mathbb{E}\left[L^K\right]^n \times \mathbb{E}_0\left[f\left(S_n^K\right)\right].$$

Par le TCL, S_n^K est en loi de l'ordre de $\frac{\sqrt{n}}{K}\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Moralement, avec l'échelle de temps $n = K^2$, on s'approche d'une loi normale.

Définition 92 :

Soit le processus à temps continu $Y_t^K = X_{\lfloor K^2 t \rfloor}^K$.

Proposition 93 :

Supposons que $m^K = 1 + \frac{\alpha}{K^2} + o\left(\frac{1}{K^2}\right)$ sur de grandes échelles. Alors à t fixé :

$$\mathbb{E}_{\delta_0}\left[Y_t^K(f)\right] \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} e^{\alpha t} \times \mathbb{E}_{N\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2 t}[f(N)].$$

On aimerait en fait montrer que le processus $\left(Y_t^K\right)_{t\geq 0}$ converge vers des solutions de l'équation de la chaleur, pondérées par l'évolution de la taille de la population. Plus précisément, on obtiendra l'EDP via le terme $V_n^K(f)$, tandis que le terme $M_n^K(f)$ s'annulera à la limite.

Lemme 94 :

Soit $\mathcal{C}^{2,+}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace des fonctions dont la dérivée seconde est Lipschitzienne.

Si $f \in \mathcal{C}^{2,+}$, alors $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|K^2\left(M^K(x,f) - f(x)\right) - \left(\alpha f(x) + \frac{\sigma^2}{2}f''(x)\right)\right| \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Démonstration. On a :

$$M^K(x,f) - f(x) = m^K\mathbb{E}\left[f\left(x + \frac{D}{K}\right)\right] - f(x).$$

On réécrit le terme de gauche sous la forme :

$$\left(1 + \frac{\alpha}{K^2} + o\left(\frac{1}{K^2}\right)\right)\left(f(x) + \frac{\sigma^2}{2K^2}f''(x) + o\left(\frac{1}{K^2}\right)\right),$$

avec des $o\left(\frac{1}{K^2}\right)$ uniformes, indépendants du x choisi. En développant le produit, on fait enfin apparaître le résultat annoncé. $\square$