Systèmes Dynamiques

Léo Gayral

Ces notes sont basées sur le cours de Hans Rugh.

Table des matières

1 Introduction

1.1 Généralités

Un système dynamique est naturellement induit par une application $f : M \to M$.

Lorsque M est un espace mesuré, alors on tombe généralement dans le domaine de la théorie ergodique.

On peut également considérer un espace topologique, ou une variété différentielle, avec f continue, auquel cas on parle de système dynamique lisse. C'est le cas qui nous intéressera le plus par la suite.

Définition 1 (Orbite d'un point) **:**
Pour tout $x \in M$ on définit l'orbite $O_+(x) = \{f^n(x),\, n \in \mathbb{N}\}$.

Lorsque f est inversible, on définit également $O(x) = \{f^n(x),\, n \in \mathbb{Z}\}$. Dans ce cas, ces orbites partitionnent l'espace.

Définition 2 (Espaces usuels) **:**
Par la suite, on travaillera souvent sur $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n \backslash \mathbb{Z}^n$ le tore n-dimensionnel.

D'autre part, soit $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité ouvert. On pourra quotienter $\mathbb{D}$ par Γ un groupe multiplicatif de $\mathbb{C}$.

Remarque 3 (Systèmes à temps continu) **:**
Dans le cas d'une translation, ou plus largement du flot d'une équation différentielle, on peut également considérer une orbite à temps continu.

1.2 Système à temps discret

Soit $f \in \mathcal{C}(M, M)$ un système dynamique lisse.

Définition 4 (Points fixes) **:**
On pose $\mathrm{Fix}(f) = \{x \in M\; f(x) = x\}$ les points fixes de f.

Plus généralement, $\mathrm{Per}_n(f) = \mathrm{Fix}(f^n)$ est l'ensemble des points de période n.

On définit les points primitifs de période n comme $\mathcal{P}_n(f) = \mathrm{Per}_n(f) \backslash \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} \mathrm{Per}_k(f)$.

Définition 5 (Points attractifs) **:**
Le point $x \in \mathrm{Per}_n(f)$ est attractif lorsqu'il existe un voisinage U de x tel que $\bigcap_{k>0} f^{nk}(U) = \{x\}$.

Le points $x \in \mathrm{Per}_n(f)$ est répulsif si il existe U tel que $\{y \in M,\ O_+(y) \subset U\} = \{x\}$.

Remarque 6 :
De façon générale, sur des variétés différentielles, rappelons que $f_{*x} \in \mathcal{L}\big(T_xM, T_{f(x)}M\big)$ est une application linéaire entre espaces tangents.

Dans le cas plat, sur $\mathbb{R}^n$, $f_{*x} = df_x$ est la différentielle.

Définition 7 (Points stables) **:**
Supposons ici que $f \in \mathcal{C}^r(M, M)$ pour $r > 0$. Le point $x \in \mathrm{Per}_n(f)$ est stable lorsque $\rho(f^n_{*x}) < 1$, lorsque toutes les valeurs propres de la différentielle de f en x sont dans $\mathbb{D}$.

Le point x est instable s'il $\rho > 1$, il existe une valeur propre λ telle que $|\lambda| > 1$.

Le point x est hyperbolique si aucune valeur propre n'est de module 1.

Proposition 8 :
Si x est stable, alors il est attractif. Si x est instable, il est répulsif.

Définition 9 (Points réguliers, points critiques) **:**
On pose $\mathrm{Reg}(f) = \{x \in M,\ f_{*x} \text{ inversible}\}$, et $\mathrm{Crit}(f) = M \backslash \mathrm{Reg}(M)$.

1.3 Théorème de Charkovski

Lemme 10 :
Soient $I, J \subset [0,1]$ des intervalles compacts, et $f \in \mathcal{C}(I, [0,1])$. Si $I \subset f(I)$, alors f a un point fixe dans I. Si $J \subset f(I)$, alors il existe $I' \subset I$ compact tel que $f(I') = J$.

Démonstration. Pour le premier point, on a $I = [a, b]$. Comme f atteint a et b, $g(x) = f(x) - x$ atteint des valeurs positives et négatives, donc 0 par le TVI.

Pour le second point, on a $J = [c, d]$. Sans pertes de généralité, supposons $a' < b' \in I$ tels que $f(a') = c$ et $f(b') = d$. On pose $a" = \max\{x < b',\ f(x) = c\}$ et $b" = \min\{y > a",\ f(y) = d\}$. On pose $I' = [a", b"]$. Naturellement, par le TVI, $J \subset f(I')$. Si l'inclusion était stricte, alors on pourrait contredire la définition de $a"$ ou $b"$, d'où l'égalité souhaitée. $\square$

Théorème 11 (Lee-Yorke, 1975, *Period* 3 *Implies Chaos*) **:**
Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],[0,1])$. Supposons $\mathcal{P}_3(f) \neq \emptyset$. Alors pour tout $n \geq 1$, on a $\mathcal{P}_n(f) \neq \emptyset$.

Démonstration. Sans perte de généralité, quitte à faire le changement $y = 1 - x$ des deux côtés, on a un 3-cycle primitif $x_1 < x_2 < x_3$, de sorte que $f(x_i) = x_{i+1}$.

On pose $I_0 = [x_1, x_2]$ et $I_1 = [x_2, x_3]$. Alors $I_1 = [f(x_1), f(x_2)] \subset f(I_0)$, et de même $I_0 \cup I_1 \subset f(I_1)$.

D'après le lemme précédent, $I_1 \subset f(I_1)$ donc f admet un point fixe $u_1 \in I_1$. On a donc $u_1 \in \mathcal{P}_1(f)$. D'autre part, les inclusions ensemblistes donnent :
— $I_{01} \subset I_0$ tel que $f(I_{01}) = I_1$,
— $I_{10} \subset I_1$ tel que $f(I_{10}) = I_0$,
— $I_{11} \subset I_1$ tel que $f(I_{11}) = I_1$.
En particulier, comme x_2 s'envoie sur $x_3 \notin I_0$, on a $I_{01} \leq x_2 < I_{10}$.

Comme $I_{10} \subset I_1 = f(I_{01})$ et $I_{01} \subset I_0 = f(I_{10})$, en appliquant le lemme à nouveau on a :
— $I_{010} \subset I_{01}$ tel que $f(I_{010}) = I_{10}$,
— $I_{101} \subset I_{10}$ tel que $f(I_{101}) = I_{01}$.
et comme $I_{10} < I_{01}$ alors $I_{101} \leq x_2 < I_{010}$.

Comme $f^2(I_{010}) = I_0 \supset I_{010}$, par le lemme, f^2 admet un point fixe u_{010}. En outre, $u_{101} := f(u_{010}) > x_2 \geq u_{101}$, donc on a bien une orbite 2-périodique primitive, $\mathcal{P}_2(f) \neq \emptyset$.

Par induction, on peut construire une suite d'intervalles emboités, avec $I_{1^{n+1}0} \subset I_{1^n 0}$ tel que $f(I_{1^{n+1}0}) = I_{1^n 0}$. En particulier, tous ces intervalles sont strictement minorés par x_2.

Dans ce cas, pour tout rang $n \in \mathbb{N}$, comme $I_{1^n 0} \subset I_1 \subset f(I_0)$, d'après le lemme on a $I_{01^n 0} \subset I_0$ tel que $f(I_{01^n 0}) = I_{1^n 0}$. Comme $f^{n+1}(I_{01^n 0}) = f^n(I_{1^n 0}) = I_0$, d'après le lemme on a $u_{n+1} \in I_{01^n 0} \leq x_2$ point fixe de f^{n+1}. En outre, toutes les autres valeurs prises au cours du cycle sont dans $I_{10} > x_2$, donc le cycle est primitif, d'où $\mathcal{P}_{n+1}(f) \neq \emptyset$. □

Remarque 12 (Charkovski, 1964) **:**
Le théorème précédent est en fait un cas particulier d'un résultat plus général. On définit l'ordre de Charkovski par :

$$3 < 5 < 7 < \cdots < 3 \times 2 < 5 \times 2 < \cdots < 3 \times 2^2 < \cdots < 3 \times 2^n < \cdots < 2^n < 2^{n-1} < \cdots < 2 < 1\,.$$

Alors dès que $\mathcal{P}_n(f) \neq \emptyset$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{P}_k(f) \neq \emptyset$ pour tous les $k > n$.

1.4 Espaces symboliques

Définition 13 (Espaces symboliques) **:**
Pour $d \geq 1$, on pose $\Sigma_d^+ = [\![0, d]\!]^{\mathbb{N}}$, et $\Sigma_d = [\![0, d]\!]^{\mathbb{Z}}$. Ces espaces sont compacts pour la

topologie produit.

On munit cet espace de l'opérateur (continu) de shift $\sigma : (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto (x_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$.

Définition 14 (Espace symbolique sous contrainte) **:**

Soit $A \in M_d(\{0,1\})$ une matrice de transitions orientées. On peut alors définir l'ensemble des mots compatibles avec A par $\Sigma_A^+ = \left\{\omega \in \Sigma_d^+,\, \forall n \in \mathbb{N},\, A_{\omega_n,\omega_{n+1}} = 1\right\}$.

L'opérateur de shift σ est continu sur Σ_A^+.

Lemme 15 :

Pour tout $n > 0$, les mots de $\mathrm{Per}_n(\sigma)$ correspondent aux cycles du graphe orienté induit par A. On a alors $\#\mathrm{Per}_n(\sigma) = \mathrm{tr}(A^n)$.

Remarque 16 (Considérations spectrales) **:**

Si on sait estimer le spectre de A, ou son rayon spectral, on peut en déduire le taux de croissance de $(\mathrm{Per}_n(\sigma))_{n\in\mathbb{N}}$ sur Σ_A^+.

Considérons $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\}$ les valeurs propres de A avec multiplicité. On a :

$$\begin{aligned}
\chi_A(z) &= \det(I_d - zA) \\
&= \prod_{j=1}^{d} (1 - z\lambda_j) \\
&= \prod_{j=1}^{d} \exp\left(\sum_{k\geq 1} \frac{(z\lambda_j)^k}{k}\right) \\
&= \exp\left(\sum_{k\geq 1} \frac{z^k}{k} \mathrm{tr}\left(A^k\right)\right) \\
&= \exp\left(\sum_{k\geq 1} \frac{z^k}{k} \#\mathrm{Per}_n(\sigma)\right)
\end{aligned}$$

donc la série génératrice de $(\mathrm{Per}_n(\sigma))_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à $\ln(\chi_A(z))$ au voisinage de 0.

2 Systèmes dynamiques mesurés

Définition 17 (Espace PPT) **:**

Un espace PPT (*probability preserving transformation*) $(M, \mathcal{B}, \mu, T)$ est un espace probabilisé $(M, \mathcal{B}, \mu)$ muni d'une transformation $T : M \to M$ qui préserve la mesure μ, c'est-à-dire telle que :

$$\forall A \in \mathcal{B},\ \mu\big(T^{-1}(A)\big) = \mu(A)\,.$$

De façon équivalente, pour toute fonction f mesurable positive, $\mu(f) = \mu(f \circ T)$.

Remarque 18 (Cas de la multiplication par 2) **:**

L'application continue $T : x \mapsto 2x$ définie sur $\mathbb{T}$ induit un PPT pour Lebesgue.

En effet, pour tout ensemble $A \subset [0,1[\cong \mathbb{T}$, on a $T^{-1}(A) = \frac{A}{2} \sqcup \frac{A+1}{2}$, d'où le résultat.

Définition 19 (Ensembles μ-équivalents) **:**

Sur un espace mesuré, on note $A \equiv B[\mu]$ lorsque $\mu(A \Delta B) = 0$.

Définition 20 (Mesure ergodique) **:**

On dit que la PPT $(M, \mathcal{B}, \mu, T)$ est ergodique lorsque, pour tout ensemble mesurable $A \in \mathcal{B}$, si $A \equiv T^{-1}(A)$ alors $A \equiv M$ $(\mu(A) = 1)$ ou bien $A \equiv \emptyset$ $(\mu(A) = 0)$.

Remarque 21 :

Sur $\mathbb{T}$ muni de $\mu = \delta_0$, la multiplication par 2 est une PPT ergodique, car $\mu(A) = 1$ ssi $\mu(A) > 0$ ssi $0 \in A$, et $0 \in T^{-1}(A)$ ssi $0 \in A$.

C'est plus généralement le cas pour toute orbite p-périodique, telle que $X_{i+1} = T(X_i)$ et $X_p = X_0$, en prenant la mesure $\mu = \frac{1}{p} \sum\limits_{i=1}^{p} \delta_{X_i}$.

Proposition 22 :

Si $f : M \to \mathbb{R}$ est T-invariante ($f \circ T = f$ presque-sûrement) et μ ergodique alors f est constante.

Démonstration. Soit $v \in \mathbb{R}$ un réel quelconque. Par invariance, $T^{-1}(\{f > v\}) = \{f \circ T > v\} \equiv \{f > v\}$, donc par ergodicité $\mu(\{f > v\}) \in \{0, 1\}$.

L'application $v \mapsto \mu(\{f > v\})$ est décroissante, continue à droite, donc il existe v tel que

$\mu(\{f = v\}) = 1$. Autrement dit, $f = v$ presque-sûrement. $\square$

Théorème 23 (Théorème d'ergodicité de Birkhoff) **:**

Soit $(M, \mathcal{B}, \mu, T)$ un PPT. Pour $f \in L^1$, on définit ses sommes de Birkhoff par $S_n f = \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i$. Alors $\frac{1}{n} S_n f \xrightarrow{L^1} \overline{f}$ et la limite $\overline{f}$ est T-invariante.

Corollaire 24 :

Si μ est ergodique, alors $\overline{f} = \int_M f \,\mathrm{d}\mu$.

Démonstration. Comme la mesure μ est ergodique et $\overline{f}$ est T-invariante, elle est constante par la proposition précédente. En conséquence, $\overline{f} = \int \overline{f} \,\mathrm{d}\mu = \lim \frac{1}{n} \int S_n f \,\mathrm{d}\mu = \lim \int f \,\mathrm{d}\mu$. $\square$

Remarque 25 :

Soit $f(x) = \cos(2\pi x)$ sur $(\mathbb{T}, \lambda, T : x \mapsto 2x)$. On a toujours $\frac{1}{n} S_n f(0) = 1$. Cependant, comme $\int_{\mathbb{T}} f \,\mathrm{d}\lambda = 0$, par le théorème précédent, $\frac{1}{n} S_n f \overline{L^1} \longrightarrow 0$.

2.1 Système fortement mélangeant

Définition 26 (Espace PPT fortement mélangeant) **:**

Un PPT est fortement mélangeant (*strong mixing*) lorsque, pour toutes fonctions $f, g \in L^\infty(\mu)$, on a $\int f \circ T^n \times g \,\mathrm{d}\mu \to \int f \,\mathrm{d}\mu \times \int g \,\mathrm{d}\mu$.

Lemme 27 :

On peut étendre cette propriété de limite à tout couple $(f, g) \in L^p \times L^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Proposition 28 :

Un système fortement mélangeant est ergodique.

Démonstration. Si A est un évènement T-invariant, alors A est plus généralement T^n invariant. Il en découle $\int \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu = \int \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_A \circ T^n \,\mathrm{d}\mu \to \left(\int \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu\right)^2$, d'où $\mu(A) \in \{0, 1\}$. $\square$

Proposition 29 :

Le PPT $(\mathbb{T}, \lambda, T : x \mapsto 2x)$ est fortement mélangeant.

Démonstration. Montrons le sur la famille orthogonale $(e_p : x \mapsto e^{2i\pi px})_{p \in \mathbb{Z}}$, dense dans L^2. On a $e_p \circ T = e_{2p}$, Si $p = 0$, alors $\langle e_0 \circ T^n, e_q \rangle = \langle e_0, e_q \rangle = \int \overline{e_q} \,\mathrm{d}\mu$. Sinon, à partir d'un rang, $np \neq q$

donc $\langle e_0 \circ T^n, e_q \rangle \to 0 = \int e_p \, \mathrm{d}\mu$. Le résultat passe aux combinaisons linéaires, puis à toutes les applications de L^2 par densité. $\square$

Remarque 30 (Itérations de T) **:**

Itérer une fonction comme $x \mapsto x(2 + \sin(2\pi x))$ sur $\mathbb{T}$ donne des « mauvais » résultats car le comportement des itérées est très chaotique.

Une approche pour contourner ce souci serait d'exploiter une forme de dualité, comme lors de la construction de la mesure de Lebesgue, pour intégrer dans une direction mieux maitrisable. Ainsi, pour $f \in L\infty$ et $g \in L1$, comme T est dérivable :

$$\int f \circ T \times g \, \mathrm{d}x = \int f(y) \left(\sum_{T(x)=y} \frac{g(x)}{|T'(x)|} \right) \mathrm{d}y = \int f(y) \mathcal{L}g(y) \, \mathrm{d}y \,,$$

où $\mathcal{L}g(y) = \sum_{T(x)=y} \frac{g(x)}{|T'(x)|}$ est l'opérateur de transfert de Ruelle.

Cet opérateur est bien défini lorsque g est continue. On peut vérifier qu'il est continu pour $\|.\|_1$, donc qu'on peut l'étendre à $g \in L^1$.

Si T est strictement croissante, fait un nombre fini de *tours* du tore, on peut de façon équivalente découper son graphe en inverses $\psi_k(y)$, de sorte que $\mathcal{L}g(y) = \sum g(\psi_k(y))|\psi_k'(y)|$.

3 Métrique de Hilbert et inégalité de Birkhoff

Définition 31 (Birapport) **:**
Soit E un $\mathbb{R}$-evt de dimension 2 ou plus. Soient $u, v \in E$ linéairement indépendants.

Pour deux vecteurs $x = au + bv$ et $y = cu + dv$, on peut définir le birapport de x et y par rapport à u et v comme $[x, y; u, v] = \frac{ad}{bc} \in \widehat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

On suppose par la suite que $x, y \neq 0$ et qu'on n'a jamais trois vecteurs colinéaires, autrement dit que x et y ne sont pas alignés le long de u ou de v.

Proposition 32 (Invariance projective) **:**
Pour $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}^*$, on a $[\lambda_1 x, \lambda_2 y; \lambda_3 u, \lambda_4 v] = [x, y; u, v]$.

Autrement dit, le birapport est invariant le long des droites, on peut le définir dans l'espace projectif $(E \backslash \{0\})/\mathbb{R}^*$.

Démonstration. Si on multiplie x par λ, alors on multiplie a et b par ce même facteur, ce qui ne change pas la valeur de leur rapport. Il en va de même pour les autres cas de figure. $\square$

Proposition 33 (Invariance linéaire) **:**
Si $A \in L(E)$ est une application linéaire, alors $[Ax, Ay; Au, Av] = [x, y; u, v]$.

Démonstration. La coordonnée de Ax selon Au est la même que celle de x selon u, il en va de même pour les autres coefficients, donc le birapport est le même. $\square$

Proposition 34 (Symétries du birapport) **:**
On a $[y, x; u, v] = [x, y; v, u] = \frac{1}{[x,y;u,v]}$. Lorsque x et y sont linéairement indépendants, $[u, v; x, y] = [x, y; u, v]$.

Démonstration. Le fait d'intervertir u et v ou bien x et y échange les coefficients au numérateur et au dénominateur de la fraction, d'où la première égalité.

Si (x, y) est une famille libre, la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, et son inverse proportionnel à $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. En conséquence, $[u, v; x, y] = \frac{da}{(-b)(-c)} = \frac{ad}{bc} = [x, y; u, v]$. $\square$

Remarque 35 :
On a également $[u,y;x,v]+[x,y;u,v]=1$.

Démonstration. En admettant que les rapports sont bien définis, on a $x=au+bv$ donc on a u proportionnel à $x-bv$, et $y=c\left(\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}v\right)+dv=\frac{c}{a}x+\frac{ad-bc}{a}v$ proportionnel à $cx+(ad-bc)v$.

En conséquence, $[u,y;x,v]=\frac{ad-bc}{-bc}$. Il en découle $[u,v;x,y]+[u,y;x,v]=\frac{ad}{bc}-\frac{ad-bc}{bc}=1$. □

Définition 36 ($\mathbb{R}$-cône) **:**
Soient E un $\mathbb{R}$-evt. et $K\subset E$ qui n'est pas réduit à $\{0\}$. On dit que K est un $\mathbb{R}$-cône si c'est un cône ($\mathbb{R}^+K=K$) fermé, convexe ($K+K=K$) propre ($K\cap(-K)=\{0\}$).

Définition 37 (Métrique de Hilbert) **:**
Soient $x,y\in K^*:=K\backslash\{0\}$. On pose $\beta(x,y)=\inf\{t>0,\, tx-y\in K\}\in\,]0,\infty]$, et

$$d_K(x,y)=\ln(\beta(x,y)\beta(y,x))\,.$$

A priori, d_K est à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

Proposition 38 :
On a les propriétés suivantes :

1. Symétrie : $d_K(x,y)=d_K(y,x)$,
2. $d_K\geq 0$, et $d_K(x,y)=0$ ssi x et y sont colinéaires,
3. Invariance projective : pour $\lambda>0$, on a $d_K(\lambda x,y)=d_K(x,y)$,
4. Inégalité triangulaire : $d_K(x,z)\leq d_K(x,y)+D_K(y,z)$.

Démonstration. La première propriété découle directement de la définition de d_K.

Comme K est un cône, $\{t>0,\, tx-y\in K\}=[\beta(x,y),\infty[$. Soit $s<\frac{1}{\beta(x,y)}$. Le vecteur $sx-y$ est sur la même demi-droite que $-\left(y-\frac{1}{s}x\right)\in(-K)^*$, donc $\beta(y,x)\geq\frac{1}{\beta(x,y)}$. En outre, si $d_K(x,y)=0$, c'est que $\beta(x,y)=y$, donc que x et y sont colinéaires.

Le troisième point découle de $\beta(\alpha x,y)=\alpha\beta(x,y)$.

Pour l'inégalité triangulaire, montrons que $\beta(x,z)\leq\beta(x,y)\beta(y,z)$. Si $tx-y, sy-z\in K$, alors $tsx-z=s(tx-y)+(sy-z)\in K$. On en déduit le résultat. □

En conséquence, d_K est une distance sur les demi-droites de K.

Définition 39 :
Si u,v sont linéairement indépendants, ils induisent un $\mathbb{R}$-cône noté $\mathbb{R}^+[u,v]$.

Proposition 40 :

Sur $K = \mathbb{R}^+[u,v]$, on a $d_{u,v}(x,y) := d_K(x,y) = |\ln([x,y;u,v])|$.

Démonstration. Quitte à échanger x et y, on a $t_1 = \beta(x,y)$ tel que $u' = t_1 x - y$ colinéaire à u, et $t_2 = \beta(y,x)$ tel que $v' = t_2 y - x$ colinéaire à v. Graphiquement, u' est l'intersection entre l'axe $\mathbb{R}u$ et la droite affine (x,y).

En conséquence, $t_2 u' + v' = (t_1 t_2 - 1)x$ est proportionnel à x et $u' + t_1 v' = (t_1 t_2 - 1)y$ est proportionnel à y. On a donc $[x,y;u,v] = [x,y;u',v'] = t_1 t_2$, d'où le résultat souhaité. □

Lemme 41 (Inégalité de Birkhoff) **:**

Soient $x,y \in \mathbb{R}^+[u_1,v_1] \subset \mathbb{R}^+[u_2,v_2]$ non colinéaires. Notons $\Delta = d_{u_2,v_2}(u_1,v_1) \in \overline{\mathbb{R}^+}$. Alors $d_{u_2,v_2}(x,y) \leq \tanh\left(\frac{\Delta}{4}\right) d_{u_1,v_1}(x,y)$.

Démonstration. Quitte à normaliser par des facteurs multiplicatifs, ce qui ne change pas les birapports, on se ramène à $u_1 = u_2 + a v_2$ et $v_1 = u_2 + b v_2$. Quitte à permuter u_1 et v_1, on a $b \geq a$. En conséquence, $\Delta = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

Par le même argument, $x = u_2 + c v_2$ et $y = u_2 + d v_2$ et $c \leq d$, donc $d_{u_2,v_2}(x,y) = \ln\left(\frac{d}{c}\right)$. En outre, $c, d \in [a,b]$.

Soit $f : t \mapsto \frac{t-a}{t-b}$. On a $f'(t) = \frac{b-a}{(b-t)(t-a)}$. Un calcul explicite nous donne $x = \frac{b-c}{b-a} u_1 + \frac{c-a}{b-a} v_1$ et $y = \frac{b-d}{b-a} u_1 + \frac{d-a}{b-a} v_1$. On peut multiplier les vecteurs par $(b-a)$, ce qui donne le birapport :

$$d_{u_1,v_1}(x,y) = \ln\left(\frac{(b-c)(d-a)}{(b-d)(c-a)}\right) = \ln\left(\frac{d-a}{d-b}\right) - \ln\left(\frac{c-a}{c-b}\right) = \int_c^d \frac{b-a}{(b-t)(t-a)} \,\mathrm{d}t\,.$$

Soit $\eta = \sup\limits_{[a,b]} \frac{1}{t} \times \frac{(b-t)(t-a)}{b-a}$. La fonction est positive, nulle aux bords, et sa dérivée s'annule en $t = \sqrt{ab}$. On a donc :

$$\eta = \frac{\left(b - \sqrt{ab}\right)\left(\sqrt{ab} - a\right)}{\sqrt{ab}(b-a)} = \frac{\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)^2}{b-a} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{e^{\ln(b)/2} - e^{\ln(a)/2}}{e^{\ln(b)/2} + e^{\ln(a)/2}} = \frac{e^{\Delta/4} - e^{-\Delta/4}}{e^{\Delta/4} + e^{-\Delta/4}}\,,$$

d'où $\eta = \tanh\left(\frac{\Delta}{4}\right)$. Finalement, $d_{u_2,v_2}(x,y) = \int_c^d \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \eta \int_c^d \frac{b-a}{(b-t)(t-a)}\,\mathrm{d}t = \eta \times d_{u_1,v_1}(x,y)$. □

Théorème 42 (Garett Birkhoff, 1956-1957) **:**

Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire continue sur E un $\mathbb{R}$-evt. Soient $K_1 \subset K_2$ des $\mathbb{R}$-cônes de E, tels que $T(K_2^*) \subset K_1^*$.

Soit $\Delta = \mathrm{diam}_{K_2}(K_1) = \sup\limits_{x,y \in K_1^*} d_{K_2}(x,y) \in \overline{\mathbb{R}^+}$. Alors $d_{K_2}(Tx,Ty) \leq \tanh\left(\frac{\Delta}{4}\right) d_{K_2}(x,y)$.

Démonstration. Soient $u_1, v_1 \in K_2$ tels que $\mathrm{Vect}(x,y) \cap K_2 = \mathbb{R}^+[u_1, v_1]$, et de même u_2, v_2 tels que $\mathrm{Vect}(Tx, Ty) \cap K_2 = \mathbb{R}^+[u_2, v_2]$. On a alors :

$$\begin{aligned} d_{K_2}(Tx, Ty) &= d_{u_2,v_2}(Tx, Ty) \\ &\leq \tanh\Big(\tfrac{d_{u_2,v_2}(Tu_1, Tv_1)}{4}\Big) d_{Tu_1,Tv_1}(Tx, Ty) \\ &\leq \tanh\big(\tfrac{\Delta}{4}\big) d_{u_1,v_1}(x,y) \\ &= \tanh\big(\tfrac{\Delta}{4}\big) d_{K_2}(x,y)\,. \end{aligned}$$

□

4 Contractions du cône et trou spectral

Remarque 43 (Exemple de Perron-Frobenius) **:**

Soit $A \in M_d(\mathbb{R}^{+*})$. A préserve le cône $(\mathbb{R}^+)^d$. Par le théorème de Perron-Frobenius, on a $\lambda = \rho(A) > 0$ est une valeur propre simple de A, et admet un vecteur propre dans K.

On note h le vecteur propre à droite l le vecteur propre à gauche (pour A^T). Quitte à normaliser, $\langle l, h\rangle = 1$. Le trou spectral fait qu'il existe $\theta < 1$ tel que le spectre de A est inclus dans $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq \theta\lambda\} \cup \{\lambda\}$. Dans ce cas, on a $\|\lambda^{-n}A^n x - h\langle l, x\rangle\| = O(\theta^n \|x\|)$.

Par la suite, on considère $(E, \|.\|)$ un espace de Banach réel.

Définition 44 (Cône régulier) **:**

Soit $K \subset E$ un $\mathbb{R}$-cône.

On dit que K est extérieurement régulier (*outer regular*) si il existe une forme linéaire continue $m \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et $\mathcal{A} < \infty$ tels que, pour tout $f \in K$, $\|f\|_E \times \|m\|_{E'} \leq \mathcal{A} \times \langle m, f\rangle_E$.

On dit que K est intérieurement régulier (*inner regular*) s'il est d'intérieur non vide.

Définition 45 (Ouverture sectionnelle) **:**

On définit $\mathcal{A} = \mathcal{A}(K, E) = \sup\limits_{u,v \in K^*} \frac{\|u\|_E + \|v\|_E}{\|u+v\|_E} \in [1, \infty]$ l'ouverture sectionnelle de K (*sectional aperture*). On dit que K est d'ouverture bornée (*bounded aperture*) lorsque $\mathcal{A} < \infty$.

Définition 46 (Cône régénérant) **:**

On dit que K est régénérant (*regenerating*) lorsqu'il existe $\gamma < \infty$ tel que pour tout élément $f \in E$ on a $f^+, f^- \in K$ tels que $f = f^+ - f^-$ et $\|f^+\|_E + \|f^-\|_E \leq \gamma \|f\|_E$.

Lemme 47 :

Si K est intérieurement régulier, il est régénérant.

Démonstration. Comme K est d'intérieur non vide, quitte à dilater une boule ouverte, on a $x \in K$ tel que $B(x, 1) \subset K^*$.

Soit $f \in E$ non nulle. On pose $\widetilde{f^\pm} := x \pm \frac{1}{2}\frac{f}{\|f\|_E} \in K$, et $f^\pm = \|f\|_E \widetilde{f^\pm} \in K$. On a alors $f = f^+ f^-$. En outre, $\left\|\widetilde{f^\pm}\right\|_E \leq \|x\|_E + \frac{1}{2}$. On a donc le résultat souhaité pour $\gamma = 2\|x\|_E + 1$. $\square$

Proposition 48 :

K est d'ouverture sectionnelle $\mathcal{A}$ bornée ssi pour tous $x, y \in K$, $\mathbb{R}^+[x,y]$ est extérieurement régulier avec la constante $\mathcal{A}$ (dans son espace vectoriel engendré).

Démonstration. Commençons par le sens réciproque. Pour $x, y \in K$ quelconques, on a une forme linéaire m de norme 1, définie sur $\mathbb{R}^+[x,y]$. Par régularité extérieure, on a alors $\|x\|_E + \|y\|_E \leq \mathcal{A}\langle m, x\rangle + \mathcal{A}\langle m, y\rangle = \mathcal{A}\langle m, x+y\rangle \leq \mathcal{A}\|x+y\|_E$.

Pour le sens direct, on se ramène en deux dimensions. Pour $x, y \in K$ quelconques, remarquons que $K \cap \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(x,y) = \mathbb{R}^+[u_1, u_2]$ est un cône propre, engendré par deux vecteurs u_1 et u_2 de norme 1.

On pose $\langle m, au_1 + bu_2\rangle_E = a + b$. On a alors $\|au_1 + bu_2\|_E \leq a\|u_1\|_E + b\|u_2\|_E = a + b = \langle m, au_1 + bu_2\rangle_E$.

Reste à vérifier que $\|m\|_{E'} \leq \mathcal{A}$. Cela découle de la définition de l'ouverture sectionnelle $\mathcal{A}$:

$$\langle m, au_1 + bu_2\rangle_E = a + b = \|au_1\|_E + \|bu_2\|_E \leq \mathcal{A}\|au_1 + bu_2\|_E\,.$$

$\square$

Théorème 49 :

Soit K un cône et $\mathcal{A}$ son ouverture sectionnelle. Alors $\left\|\frac{x}{\|x\|_E} - \frac{y}{\|y\|_E}\right\|_E \leq 2\mathcal{A} \times d_K(x,y)$.

Démonstration. Soient $x, y \in K$ fixés. Quitte à les renormaliser, on peut supposer que x et y sont dans le segment $[u_1, u_2]$, donc $m(x) = m(y) = 1$ en particulier.

Soit $v_t = \frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}y$. On a $v_{-1} = x$ et $v_1 = y$. On a alors $t_1 < -1$ tel que $v_{t_1} = u_1$ et $t_2 > 1$ tel que $v_{t_2} = u_2$. En conséquence $[t_1, t_2] \subset I := \{t \in \mathbb{R}, v_t \in K\}$.

D'après la proposition précédente, sur I, on a $\|v_t\|_E \leq \langle m, v_t\rangle_E = 1 \leq \mathcal{A} \times \|v_t\|_E$. Pour $t \in I$, on a donc $\|t(y-x)\|_E = \|2v_t - x - y\|_E \leq 4$, d'où $|t| \leq \frac{4}{\|y-x\|_2} = \rho$, et on peut minorer ρ par $\rho \geq \frac{4}{\|u_2 - u_1\|_E} \geq \frac{4}{\|u_1\|_E + \|u_2\|_E} = 2$.

Comme t_1 et t_2 sont bornés par ρ, on a :

$$\begin{aligned} d_K(x,y) &= d_{u_1,u_2}(x,y) = d_{v_{-t_1}, v_{t_2}}(x,y) \\ &= |\ln([x, y; v_{-t_1}, v_{t_2}])| \\ &= |\ln([v_{-t_1}, v_{t_2}; x, y])| \\ &= \ln\left(\frac{t_2+1}{t_2-1}\right) + \ln\left(\frac{(-t_1)+1}{(-t_1)-1}\right) \\ &\geq 2\ln\left(\frac{\rho+1}{\rho-1}\right). \end{aligned}$$

En inversant les calculs, $\frac{1}{\rho} \leq \tanh\left(\frac{d_K(x,y)}{4}\right) \leq \frac{d_K(x,y)}{4}$, d'où $\|x-y\|_E \leq d_K(x,y)$.

On n'a pas encore renormalisé x et y. Or $\|x\|_E \leq \frac{1}{\mathcal{A}}$ et de même pour y. On a donc $\left\|\frac{x}{\|x\|_E} - \frac{y}{\|y\|_E}\right\|_E \leq \left\|\frac{x-y}{\|x\|_E} + y\frac{\|x\|_E - \|y\|_E}{\|x\|_E\|y\|_E}\right\|_E \leq \frac{\|x-y\|_E}{\|x\|_E} + \|y\|_E \frac{\left|\|x\|_E - \|y\|_E\right|}{\|x\|_E\|y\|_E} \leq \frac{2\|x-y\|_E}{\|x\|_E} \leq 2\mathcal{A}\|x-y\|_E$ d'où le résultat voulu. □

Théorème 50 :

Soit K un $\mathbb{R}$-cône d'ouverture $\mathcal{A}$ bornée. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ linéaire, qui laisse K^* stable, de sorte que $\Delta := \operatorname{diam}_K(T(K)) < \infty$.

Alors K contient une unique demi-droite $\mathbb{R}^+ h$ invariante par T. En particulier, on peut normaliser $\|h\|_E = 1$. Dans ce cas, $T(h) = \lambda h$ est un vecteur propre pour $\lambda > 0$.

Il existe une forme linéaire continue $\rho \in E'$, telle que $\rho(h) = 1$ et plus généralement, pour tout $x \in K^*$, $\rho(x) \neq 0$ et on a $\left\|\frac{1}{\lambda^n}T^n(x) - h\rho(x)\right\|_E = O(\theta^{n-1}\|x\|_E)$, avec $\theta = \tanh\left(\frac{\Delta}{4}\right) < 1$.

Démonstration. Soit $e_0 \in K$ de norme 1 quelconque. On définit par induction $e_{k+1} = \frac{T(e_k)}{\|T(e_k)\|}$. On a $e_n \in T^n(K^*)$. Par inégalité de Birkhoff, $d_K(e_{n+m}, e_n) \leq \tanh\left(\frac{\Delta}{4}\right)^{n-1} d_K(T(e_m), T(e_0)) \leq \theta^{n-1}\Delta$. Pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $\|e_{n+m} - e_n\|_E \leq 2\mathcal{A} d_K(e_{n+m}, e_n) \leq 2\mathcal{A}\Delta\theta^{n-1}$. C'est une suite de Cauchy, de norme 1 constante, donc elle converge vers une limite $h \in K$ de norme 1.

En outre, posons $\lambda = \|Th\| > 0$. Comme $e_{n+1} = \frac{T(e_n)}{\|T(e_n)\|}$, à la limite on a $h = \frac{Th}{\lambda}$, d'où un vecteur propre.

Soit désormais $x \in K^*$. On pose $x_n = \frac{1}{\lambda^n}T^n(x)$. D'après le théorème précédent, on a l'inégalité $\left\|h - \frac{x_n}{\|x_n\|_E}\right\| \leq 2\mathcal{A} d_K(h, x_n)$. En conséquence, avec le même raisonnement que pour montrer que e est une suite de Cauchy, $\|x_n - \|x_n\|_E h\|_E \leq 2\mathcal{A}\Delta\theta^{n-1}\|x_n\|_E$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x_n\|_E &= \left\|\left(\tfrac{1}{\lambda}T - \mathrm{Id}\right)x_n\right\|_E \\
&= \left\|\left(\tfrac{1}{\lambda}T - \mathrm{Id}\right)(x_n - \|x_n\|_E h)\right\|_E \\
&\leq \left\|\tfrac{1}{\lambda}T - \mathrm{Id}\right\| \times 2\mathcal{A}\Delta\theta^{n-1}\|x_n\|_E \\
&= q\theta^{n-1}\|x_n\|_E\,.
\end{aligned}$$

En conséquence, $\|x_n\| \leq \prod_{n\in\mathbb{N}}(1 + q\theta^{n-1}) \times \|x\|_E = M\|x\|_E < \infty$. La suite est uniformément bornée par dessus. Avec le même raisonnement, $q\theta^{n-1} < \frac{1}{2}$ à partir d'un rang N, d'où alors la minoration $\|x_n\|_E \geq \|x_N\| \prod_{n\geq N}\left(1 - \frac{\theta^{n-N}}{2}\right) > 0$, la suite est uniformément bornée par dessous.

On a donc également $\|x_{n+m} - x_n\|_E \leq \frac{qM\|x\|_E}{1-\theta}\theta^{n-1}$. La suite (x_n) est de Cauchy, donc converge. On pose alors $\rho(x) = \lim\|x_n\| > 0$. On a alors $\|x_n - \rho(x)h\|_E \to 0$, d'où la limite souhaitée.

La linéarité de ρ se vérifie par linéarité de la limite, car on itère une application linéaire. □

Théorème 51 (Trou spectral) **:**
Soit $K \subset E$ un $\mathbb{R}$-cône, d'ouverture $\mathcal{A}$ bornée, γ-régénérant.

Sous les hypothèses du théorème précédent, on a convergence le long de $\mathbb{R}h$ pour tout $x \in E$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser ici l'hypothèse supplémentaire que K est régénérant : pour tout $x \in E$, on a $x^\pm \in K$ tels que $x = x^+ - x^-$ et $\|x^+\|_E + \|x^-\|_E \leq \gamma \|x\|_E$.

On applique alors le théorème précédent à $x^\pm$. L'inégalité entre les normes de $x^\pm$ et x permet de majorer les vitesses de convergence pour les itérées de $x^\pm$ en fonction de la norme de x, et donc en recollant les solutions on a bien convergence de $\frac{1}{\lambda^n} T^n(x)$ vers $\rho(x)h = (\rho(x^+) - \rho(x^-))h$ à vitesse géométrique. $\square$

5 Une famille de cônes log-Lipschitz

Définition 52 (Espace des fonctions lipschitziennes) **:**
Soit (Ω, d) un espace métrique borné, de diamètre $D < \infty$. On définit $X = \mathrm{Lip}_{\mathbb{R}}(\Omega, d)$ l'ensemble des fonctions $\Omega \to \mathbb{R}$ lipschitziennes bornées.

On munit X de la norme $\|f\|_X = \|f\|_\infty + Lip(f)$, où $Lip(f) = \sup\limits_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)}$.

On peut vérifier que $(X, \|.\|_X)$ est un espace de Banach réel.

Définition 53 :
Pour $a > 0$, on définit le $\mathbb{R}$-cône suivant dans X :

$$K_a = \left\{\varphi \in \mathcal{C}\big(X, \mathbb{R}^+\big), \forall x, y \in \Omega, \varphi(x) \leq e^{ad(x,y)} \varphi(y)\right\}.$$

Remarque 54 :
Si $\varphi \in K_a$ s'annule en un point, par définition, $\varphi = 0$. Sinon, on peut considérer le logarithme de φ, qui vérifier alors $|\ln(\varphi(x)) - \ln(\varphi(y))| \leq ad(x,y)$.

Les fonctions de K_a sont toutes a-log-lipschitziennes, et cette caractérisation est équivalente à la définition.

Proposition 55 :
Le cône K_a est intérieurement et extérieurement régulier.

Démonstration. La fonction constante 1 est clairement dans tout K_a. Soit $h \in X$ telle que

$\|h\|_X \leq r < 1$. Comme h est r-lipschitzienne et minorée par $-r$:

$$(1+h)(x) \leq 1 + h(y) + rd(x,y) \leq (1+h)(y)\left(1 + \frac{rd(x,y)}{1-r}\right) \leq (1+h)(y)e^{\frac{r}{1-r}d(x,y)}.$$

En ajustant r pour que $a = \frac{r}{1-r}$, on en déduit que K_a contient $B_X(1,r)$, est intérieurement régulier.

Soit désormais $x_0 \in \Omega$ quelconque, et l l'évaluation en x_0. On a $\|l\|_{X'} = 1$ (la majoration par 1 est directe, l'égalité est vérifiée sur les fonctions constantes par exemple). Pour tout $\varphi \in K_a$ on a en particulier $\varphi(y) \leq \varphi(x_0)e^{aD}$. En conséquence, $\|\varphi\|_\infty \leq e^{aD} \times l(\varphi)$.

En outre, pour tous $x \neq y \in \Omega$, on a $\varphi(x) \leq \varphi(y)e^{aD}$ donc $\varphi(x) - \varphi(y) \leq \varphi(y)\big(e^{ad(x,y)} - 1\big)$. Par symétrie de la relation, on a donc $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \|\varphi\|_\infty \times \sup\limits_{t \in]0,D]} \frac{e^{at}-1}{t} \times d(x,y) = \|\varphi\|_\infty \times \frac{e^{aD}-1}{D} \times d(x,y)$.

Finalement, mis bout à bout, on a $\|\varphi\|_X \leq \|\varphi\|_\infty\Big(1 + \frac{e^{aD}-1}{D}\Big) \leq e^{aD}\Big(1 + \frac{e^{aD}-1}{D}\Big) \times l(\varphi)$. □

En particulier, K_a est d'ouverture bornée $\mathcal{A} \leq e^{aD}\Big(1 + \frac{e^{aD}-1}{D}\Big)$.

Lemme 56 :

Soient $s, t > 0$. Alors $\frac{1-e^{-(t+s)}}{1-e^{-t}} \leq 1 + \frac{s}{t}$.

Démonstration. Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $1 + x \leq e^x$. On a donc ici :

$$\frac{1-e^{-(t+s)}}{1-e^{-t}} = \frac{e^t - e^{-s}}{e^t - 1} = 1 + \frac{1-e^{-s}}{e^t-1} \leq 1 + \frac{s}{t}.$$

□

Proposition 57 :

Pour $0 < b < a$, on a $\Delta := \mathrm{diam}_{K_a}(K_b^*) \leq 2\ln\big(\frac{a+b}{a-b}\big) + 2bD$.

Démonstration. Soient $f, g \in K_b^*$, $x, y \in \Omega$ et $d = d(x,y)$. On a l'encadrement $e^{-bd} \leq \frac{f(x)}{f(y)} \leq e^{bd}$.

Soit $t > 0$. On a $tf - g \in K_a$ ssi pour tous $x, y \in \Omega$ on a $tf(x) - g(x) \leq (tf(y) - g(y))e^{ad}$ ssi $t \geq \frac{g(y)}{f(y)} \times \frac{1-\frac{g(x)}{g(y)}e^{-ad}}{1-\frac{f(x)}{f(y)}e^{-ad}}$. On en déduit que $t_1 = \beta(f,g)$ est égal au supremum du terme de droite pris sur $(x,y) \in \Omega^2$.

D'après le lemme technique précédent appliqué à $t = (a-b)d$ et $s = 2bd$, on a la majoration $t_1 \leq \sup\limits_{x,y}\Big(\frac{g(y)}{f(y)} \times \frac{1-e^{-(a+b)d}}{1-e^{-(a-b)d}}\Big) \leq \frac{a+b}{a-b} \times \sup\limits_{y\in\Omega} \frac{g(y)}{f(y)}$. Par symétrie du raisonnement, il en va de même pour $t_2 = \beta(g,f) \leq \frac{a+b}{a-b}\sup\limits_{x\in\Omega}\frac{f(x)}{g(x)}$. Pris conjointement, on obtient :

$$t_1t_2 \leq \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 \sup_{x,y\in\Omega}\left(\frac{f(x)}{f(y)} \times \frac{g(y)}{g(x)}\right) \leq \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 e^{2bD}.$$

En passant au logarithme, on obtient la majoration souhaitée. $\square$

Remarque 58 :
Avec cette majoration sur Δ, en déroulant les calculs, on a $\theta = \tanh\left(\frac{\Delta}{4}\right) \leq \frac{(a+b)e^{bD}-(a-b)}{(a+b)e^{bD}+(a-b)}$.

5.1 Exemple de mesure invariante

Soit $T \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T}, \mathbb{T})$ une transformation sur le tore, telle que $T' \geq \Lambda > 1$. En particulier, T ne fait pas d'aller-retours, fait $d^\circ(T)$ tours du tore, et chaque point a exactement $d^\circ(T)$ antécédents par T. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, on définit l'opérateur $\mathcal{L}$ via $\mathcal{L}f(y) = \sum\limits_{x \in T^{-1}(y)} \frac{1}{T'(x)} f(x)$.

On peut vérifier que $\mathcal{L}f \in \mathcal{C}^0$, et que $\|\mathcal{L}f\|_\infty \leq \frac{d^\circ(T)}{\Lambda}\|f\|_\infty$.

On peut de même vérifier que $\mathcal{L}$ est bien défini, continu sur l'espace $X = \mathrm{Lip}_\mathbb{R}(\mathbb{T})$.

Lemme 59 :
Soit $M = \left\|\frac{T''}{T'}\right\|_\infty < \infty$ la distorsion de T. L'opérateur $\mathcal{L}$ envoie K_a dans K_b, avec $b = \frac{M+a}{\Lambda}$.

En particulier, si $a > \frac{M}{\Lambda-1}$, alors $b < a$, $\mathcal{L}$ contracte K_a dans $K_b \subset K_a$.

Démonstration. De façon générale, pour $x, x' \in \mathbb{T}$, on a :

$$\left|\ln\left(\frac{T'(x)}{T'(x')}\right)\right| = \left|\int_x^{x'} \frac{T''(u)}{T'(u)}\,\mathrm{d}u\right| \leq M d(x, x')\,.$$

Si $f \in K_a$, $T' > 0$ donc naturellement $\mathcal{L}f$ est positive également. Soient désormais $y, y' \in \mathbb{T}$. on peut appairer les $d^\circ(T)$ antécédents (x_i) de y et (x_i') de y' de sorte que $d(x_i, x_i') \leq \frac{1}{\Lambda} d(y, y')$ pour tout $1 \leq i \leq d^\circ(T)$. En conséquence :

$$\mathcal{L}f(y') = \sum_{i=1}^{d^\circ(T)} \frac{1}{T'(x_i')} \times f(x_i') \leq \sum_{i=1}^{d^\circ(T)} \frac{1}{T'(x_i)} e^{Md\left(x_i, x_i'\right)} \times e^{ad\left(x_i, x_i'\right)} f(x_i) \leq \mathcal{L}f(y) e^{\frac{M+a}{\Lambda} d(y, y')}\,.$$

On en déduit le résultat souhaité. $\square$

Corollaire 60 :
L'opérateur $\mathcal{L}$ a un trou spectral sur X.

Lemme 61 :
Il existe une unique fonction $h \in X$ telle que la mesure m à densité h pour la mesure de Lebesgue est une mesure de probabilité T-invariante.

Dans ce cas, pour tous $f, g \in X$, on a $|m(f \circ T^n g) - m(f)m(g)| \leq C\|f\|_X \|g\|_X \theta^{n-1}$.

Démonstration. Par le théorème du trou spectral, on a un unique vecteur propre $h \in X$, dans K_a^*, tel que $\mathcal{L}h = \lambda h$ et $\int h(x)\,\mathrm{d}x = 1$. La fonction $h \in K_a$ est positive, donc la mesure m à densité h, de masse 1, est bien une mesure de probabilités.

Par définition de $\mathcal{L}$, pour $f, \varphi \in \mathcal{C}^0$, on a un changement de variables sur $\mathbb{T}$ de sorte que $\int f \circ T^n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\mathcal{L}\varphi(y)\,\mathrm{d}y$. En particulier, en posant $f = 1$ et $\varphi = h$, on obtient alors $\int h\,\mathrm{d}x = \int \mathcal{L}h\,\mathrm{d}x = \lambda \int h\,\mathrm{d}x$ d'où $\lambda = 1$, m est bien T-invariante.

Toute mesure à densité T-invariante correspond à une valeur propre de $\lambda = 1$ pour l'opérateur $\mathcal{L}$, d'où l'unicité de m.

Reste donc à montrer que m est mélangeante. Si $\varphi \in X$, la suite $\mathcal{L}^n(\varphi)$ converge vers $h\rho(\varphi)$ dans X. En conséquence, $\int \varphi\,\mathrm{d}x = \int \mathcal{L}^n\varphi \to \rho(\varphi)$, d'où $\rho(\varphi) = \int \varphi\,\mathrm{d}x$.

La convergence de $\mathcal{L}^n\varphi$ vers $\rho(\varphi)h$ dans X se fait à vitesse $O(\theta^{n-1}\|\varphi\|_X)$. Or X est une algèbre de Banach, on a $\|gh\|_X \leq \|g\|_X\|h\|_X$.

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}
|m(f \circ T^n g) - m(f)m(g)| &= \left|\int f(\mathcal{L}^n(gh) - m(g)h)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \int |f| \times \|\mathcal{L}^n(gh) - \rho(gh)h\|_X\,\mathrm{d}x \\
&\leq \|f\|_X\|g\|_X \times C\|h\|_X\theta^{n-1}\,.
\end{aligned}$$

□

Théorème 62 :

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un PPT. Si $\mathcal{S} \subset L^1(\mu) \cap L^2(\mu)$ est dense dans L^1, et que pour tous $A, B \in \mathcal{S}$, on a $\mu(A \circ T^n \times B) \to \mu(A)\mu(B)$, alors on a plus généralement le résultat pour toutes fonctions $f \in L^p$ et $g \in L^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$.

Démonstration. Commençons par le cas de fonctions bornées. Comme le domaine d'intégration a une masse finie, $L^\infty \subset L^2$. On peut donc approcher $f, g \in L^\infty$ par A, B dans L^2 à ε près.

Alors $|\mu(f \circ T^n g) - \mu(A \circ T^n B)| \leq \varepsilon(\|f\|_2 + \|g\|_2 + \varepsilon)$, et $\mu(A)\mu(B)$ approche $\mu(f)\mu(g)$ avec la même précision. On a donc $\overline{\lim}|\mu(f \circ T^n g) - \mu(f)\mu(g)| \leq \varepsilon(\|f\|_2 + \|g\|_2 + \varepsilon)$ d'où la limite voulue avec $\varepsilon \to 0$.

On peut alors propager le résultat à $f \in L^p$ et $g \in L^q$, par densité de L^∞. Dans ce cas, l'inégalité de Hölder donne une majoration en $\varepsilon\Big(\|f\|_p + \|g\|_q + \varepsilon\Big)$. □

Théorème 63 :

Soit $T \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T}, \mathbb{T})$ une transformation uniformément Λ-*expanding* ($T' \geq \Lambda$).

Alors le système admet une unique mesure T-invariante m à densité pour Lebesgue.

Cette mesure est en outre fortement mélangeante, et pour toute fonction $\varphi \in L^1(\mathbb{T}, \mathrm{d}x)$, on a la convergence $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Phi\circ T^k = \frac{1}{n}S_n\Phi \xrightarrow{\text{p.s.}} m(\varphi)$.

Démonstration. On a déjà établi l'existence d'une telle mesure m à densité $h \in K_a^*$, fortement mélangeante pour les fonctions dans X. La dernière propriété découle alors du théorème de Birkhoff, appliqué au PPT $(\mathbb{T}, \mathcal{B}, m, T)$.

Notons ici que, comme h est uniformément bornée par dessus et dessous, m et la mesure de Lebesgue décrivent exactement les mêmes fonctions L^p, ce qui légitime en particulier le fait que le théorème de Birkhoff s'applique à des fonctions $L^1(\mathrm{d}x)$ au lieu de $L^1(m)$.

D'après le théorème précédent, par densité de X, pour tous $f \in L^p$ et $g \in L^q$, on a $m(f\circ T^n g) \to m(f)m(g)$.

Il ne reste qu'à conclure sur l'unicité. Considérons donc une probabilité T-invariante μ à densité $\varphi \geq 0$, et montrons que $\mu = m$. La mesure μ est entièrement caractérisée par les valeurs prises par $\mu(f)$ pour des fonctions f mesurables bornées. Or μ est T-invariante, donc pour tout $n \geq 0$ on a $\mu(f) = \mu(f\circ T^n) = \int f\circ T^n \varphi\,\mathrm{d}x = m\big(f\circ T^n \times \frac{\varphi}{h}\big)$. Comme $f \in L^\infty$ et $\frac{\varphi}{h} \in L^1$, en passant à la limite, on a donc $\mu(f) = m(f)\times m\big(\frac{\varphi}{h}\big) = m(f)\int \frac{\varphi}{h}\times h\,\mathrm{d}x = m(f)\mu(1) = m(f)$. $\square$

6 Opérateurs de transfert positifs et trou spectral

On considère ici un espace (Ω, d) métrique compact, de diamètre $D = \sup_{x,y\in\Omega} d(x, y) < \infty$.

Définition 64 :

Soit $T : \Omega \to \Omega$ un revêtement à d feuillets (d*-fold covering map*), un homéomorphisme local, où chaque élément admet d antécédents.

On dit que T est uniformément *expanding* et uniformément mélangeante (*mixing*) lorsqu'il existe $\beta > 1$ tel que, pour tous $y, y' \in \Omega$, on peut appairer les antécédents $\{x_i\} = T^{-1}(y)$ et $\{x'_i\} = T^{-1}(y')$ de sorte que, pour tout $1 \leq i \leq d$, on a $d(x_i, x'_i) \leq \frac{1}{\beta} d(y, y')$.

Remarque 65 :

C'est par exemple le cas de $x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{T}$, qui est un revêtement à 2 feuillets, et vérifie la propriété pour $\beta = 2$.

Définition 66 (Opérateur de transfert de Ruelle) **:**

Soit $g \in X$ une fonction lipschitzienne sur Ω. On définit l'opérateur de transfert $\mathcal{L}_g$ par $\mathcal{L}_g\varphi(y) = \sum_{x\in T^{-1}(y)} e^{g(x)}\varphi(x)$.

Par homéomorphisme local, si φ est continue, alors $\mathcal{L}_g\varphi$ l'est aussi.

Proposition 67 :

L'opérateur $\mathcal{L}_g$ a un trou spectral sur X.

Autrement dit, il existe $\lambda > 0$, $h_g \in X$, $l_g \in X'$, $\theta < 1$ et $C < \infty$ tels que :

1. $\mathcal{L}_g h_g = \lambda h_g$,
2. $l_g \mathcal{L}_g = \lambda l_g$,
3. $l_g(h_g) = 1$,
4. pour tout $\varphi \in X$, $\left\| \frac{\mathcal{L}_g^n \varphi}{\lambda^n} - l_g(\varphi) h_g \right\|_X \leq C \|\varphi\|_X \theta^n$.

et alors λ est unique.

Démonstration. La preuve est assez similaire au cas précédent. Il suffit de montrer que $\mathcal{L}_g$ contracte un certain cône K_a pour conclure.

Soit $\varphi \in K_a$. On a :

$$\mathcal{L}_g\varphi(y) = \sum_{i=1}^{d} e^{g(x_i)}\varphi(x_i) \leq \sum_{i=1}^{d} e^{g\left(x_i'\right)+Lip(g)d\left(x_i,x_i'\right)}\varphi(x_i')e^{ad\left(x_i,x_i'\right)} \leq \mathcal{L}_g\varphi(y')e^{\frac{1}{\beta}(Lip(g)+a)d(y,y')},$$

donc $\mathcal{L}_g\varphi \in K_{\sigma a}$ avec $\sigma = \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{Lip(g)}{a}\right)$. Pour a assez grand, $\sigma < 1$, ce qui conclut la preuve. □

Théorème 68 (Théorème de représentation de Riesz) **:**

Soit (Ω, d) métrique compact. Alors le dual topologique de l'espace $(\mathcal{C}^0(\Omega), \|.\|_\infty)$, l'espace des formes linéaires bornées, est isomorphe à l'espace des mesures signées finies sur Ω.

Démonstration. Admis. □

Proposition 69 :

L'opérateur $l_g \in X'$ se prolonge de façon unique en forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^0(\Omega)$, associée à une mesure *positive*. Quitte à normaliser (l_g, h_g), on a une unique mesure de probabilité μ_g sur Ω telle que $\mu_g(\varphi) = \langle l_g, \varphi\rangle$ pour toute fonction $\varphi \in X$.

Démonstration. Soit $\mathbb{1} \in K_a$ la fonction constante. L'opérateur $\mathcal{L}$ préserve les fonctions continues positives. En conséquence, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, on a $\|\varphi\|_\infty \times \mathbb{1} \pm \varphi$ continue positive, donc $\mathcal{L}(\|\varphi\| \times \mathbb{1} \pm \varphi)$ aussi. Autrement dit, $|\mathcal{L}\varphi| \leq \|\varphi\|_\infty \times \mathcal{L}\mathbb{1}$.

Quitte à normaliser (l_g, h_g) conjointement, on se ramène au cas où $\langle l_g, \mathbb{1}\rangle = 1$.

Si $\varphi \in X$, quitte à normaliser par λ^n, en passant à la limite, comme h_g est positive non nulle, on obtient finalement $|\langle l_g, \varphi\rangle| \leq \|\varphi\|_\infty \times \langle l_g, \mathbb{1}\rangle = \|\varphi\|_\infty$. La forme linéaire l_g est donc continue pour $\|.\|_\infty$ sur X, donc se prolonge de façon unique en μ sur $\mathcal{C}^0$ par densité de X.

Comme $\mathcal{L}$ préserve les fonctions continues positives, on en déduit que l_g est positive sur les fonctions positives de X, donc μ_g est positive sur les fonctions continues positives, c'est bien une mesure *positive*. En outre, $\mu_g(\mathbb{1}) = \langle l_g, \mathbb{1}\rangle = 1$, donc c'est une mesure de probabilité. □

Remarque 70 :

Par densité de X, on a encore la convergence $\frac{\mathcal{L}^n f}{\lambda^n} \to h \times \mu_g(f)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0$, mais plus nécessairement à vitesse $O(\theta^n)$.

On dit que μ_g est une g-mesure.

Définition 71 (*Bowen Balls*) **:**

Soit δ un *rayon d'injectivité*, tel que pour tout $x \in \Omega$, $T : B(x, \delta) \to \Omega$ est injective. L'application qui à x associe le rayon maximal possible est continue, donc par compacité il existe un tel $\delta > 0$.

On pose $B_n(x,\delta) = \bigcap_{k=0}^{n} T^{-k}\big(B\big(T^k(x),\delta\big)\big) = \big\{y \in \Omega,\ \forall 0 \leq k \leq n,\ d\big(T^k(x),T^k(y)\big) \leq \delta\big\}$.

Lemme 72 (Distorsion bornée) **:**

Soit $g \in X$. On rappelle que $S_n g = \sum_{k=0}^{n-1} g \circ T^k$. Pour tout $y \in B_n(x,\delta)$, on a :

$$|S_n g(x) - S_n g(y)| \leq Lip(g)\frac{\beta\delta}{\beta - 1}\,.$$

Démonstration. Par induction décroissante sur k à n fixé, on montre que pour $y \in B_n(x,\delta)$, $d\big(T^k(x),T^k(y)\big) \leq \frac{\delta}{\beta^{n-k}}$. Pour $k = n$ on a naturellement $T^n(y) \in B(T^n(x),\delta)$.

Si le résultat est vrai au rang $k+1$, on a un élément $z \in T^{-1}\big(T^{k+1}(y)\big)$ pour lequel $d\big(z,T^k(x)\big) \leq \frac{d\left(T(z),T^{k+1}(x)\right)}{\beta} = \frac{d\left(T^{k+1}(y),T^{k+1}(x)\right)}{\beta} \leq \frac{\delta}{\beta^{n-k}} < \delta$. En particulier, z et $T^k(y)$ sont deux antécédents de $T^{k+1}(y)$, dans $B\big(T^k(x),\delta\big)$ où T est injective, d'où $z = T^k(y)$. La propriété est alors vraie au rang k.

Le résultat en découle en passant à la somme pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. □

Proposition 73 :

Soient $\lambda_g > 0$, $h_g \in X$ et μ_g la probabilité issue du trou spectral. On définit la mesure de probabilité $\nu_g = h_g \times \mu_g$. Alors ν_g est T-invariante et fortement mélangeante, donc le PPT (Ω, T, ν_g) est ergodique.

Démonstration. Si $\varphi \in X$, comme l_g est un λ_g-vecteur propre à gauche de $\mathcal{L}_g$:

$$\int \varphi \circ T \,\mathrm{d}\nu_g = \langle l_g, \varphi \circ T \times h_g\rangle = \frac{1}{\lambda_g}\langle l_g, \mathcal{L}_g(\varphi \circ T \times h_g)\rangle = \frac{1}{\lambda_g}\langle l_g, \varphi\mathcal{L}_g(h_g)\rangle = \langle l_g, \varphi h_g\rangle = \int \varphi \,\mathrm{d}\nu_g\,.$$

On étend le résultat aux fonctions continues par densité. On en déduit la T-invariance de ν_g.

Pour la propriété de mélange, notons que X est une algèbre de Banach par compacité de Ω. Pour $a, b \in X$, on a donc $a \circ T^n \times bh \in X$. En outre, $\mathcal{L}_g(a \circ T \times b) = a\mathcal{L}_g(b)$. Alors :

$$\int a \circ T^n \times b \,\mathrm{d}\nu_g = \langle l_g, a \circ T^n \times bh_g\rangle = \frac{1}{\lambda_g^n}\langle l_g, \mathcal{L}^n(a \circ T^n bh_g)\rangle = \left\langle l_g, a \times \frac{\mathcal{L}^n(bh_g)}{\lambda_g^n}\right\rangle.$$

Par convergence uniforme, en passant à la limite, on obtient $\langle l_g, a(h_g\langle l_g, bh_g\rangle)\rangle = \nu_g(a)\nu_g(b)$. Comme $X \subset L^1 \cap L^2$ est dense dans $L^1(\mathrm{d}\nu_g)$, on en déduit le résultat souhaité, le PPT est fortement mélangeant. □

Théorème 74 (Mesure de Gibbs) **:**

La mesure ν_g est l'unique mesure T-invariante pour laquelle il existe un intervalle défini par $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$ de sorte que, pour tout $x \in \Omega$ et tout $n \geq 1$, $\frac{\nu_g(B_n(x,\delta))}{\lambda^{-n}e^{S_n g(x)}} \in [C_1, C_2]$.

Démonstration. Soit $y = T^n(x)$. Pour tout $y' \in \Omega$ on a $d(y, y') \leq D$. Quitte à remonter la chaîne de feuilletages consécutifs, on peut toujours trouver $x' \in T^{-n}(y')$ tel que $d(x, x') \leq \frac{D}{\beta^n}$.

À partir d'un rang N, on a en particulier $\frac{D}{\beta^n} < \delta$ plus petit que le rayon d'injectivité.

Si $\varphi \in X$, alors $\mathcal{L}^n\varphi(y) = \sum\limits_{x \in T^{-n}(y)} e^{S_n g(x)}\varphi(x)$. En conséquence, $\mathcal{L}^n\big(e^{-S_n g}\varphi\big)(y) = \sum\limits_{x \in T^{-n}(y)} \varphi(x)$. On peut étendre la propriété à $\mathbb{1}_O$ en approchant l'ouvert O par en-dessus, par des fonctions continues bornées.

Soit $z \in \Omega$ fixé, et $f = \mathbb{1}_{B(z,\delta)}$. À partir du rang N, on a toujours un des termes de la somme non nul, un des $x \in T^{-n}(y)$ à distance au plus δ de z, donc $\mathcal{L}^n\big(e^{-S_n g}\mathbb{1}_{B(z,\delta)}\big)(y) \geq 1$. En passant à l'espérance sous la loi μ_g :

$$1 \leq \mu_g\Big(\mathcal{L}^n\big(e^{-S_n g}\mathbb{1}_{B(z,\delta)}\big)\Big) = \lambda_g^n \mu_g\big(e^{-S_n g}\mathbb{1}_{B(z,\delta)}\big) \leq C \times \lambda_g^n e^{-S_n g(z)} \mu_g\big(\mathbb{1}_{B(z,\delta)}\big)\,.$$

En particulier, à $n = N$ fixé, on peut majorer $e^{-S_N g} \leq e^{N\|g\|_\infty}$, donc on a un encadrement uniforme, indépendant de z :

$$\frac{1}{C\lambda_g^N e^{N\|g\|_\infty}} \leq \mu_g(B(z,\delta)) \leq 1\,.$$

Par un argument similaire, on obtient les encadrements uniformes souhaités dans l'énoncé pour les rangs $n \in [\![1, N-1]\!]$.

À partir du rang N, un seul des points peut se retrouver dans le rayon d'injectivité pour $B_n(x,\delta)$, donc on a par construction :

$$\mathcal{L}_g^n\big(e^{-S_n g}\mathbb{1}_{B_n(x,\delta)}\big)(y) = \sum_{x' \in T^{-n}(y)} \mathbb{1}_{B_n(x,\delta)}(x') = \mathbb{1}_{B(T^n(x),\delta)}(y)\,.$$

On en déduit donc un encadrement uniforme, indépendant de $n \geq N$ et $x \in \Omega$, sur :

$$\mu_g\Big(\mathcal{L}_g^n\big(e^{-S_n g}\mathbb{1}_{B_n(x,\delta)}\big)\Big) = \lambda_g^n \mu_g\big(e^{-S_n g}\mathbb{1}_{B_n(x,\delta)}\big)\,.$$

En outre, comme on a $|S_n g(x) - S_n g(x')| \leq Lip(g)\frac{\beta\delta}{\beta-1}$ pour tout $x' \in B_n(x,\delta)$, on obtient un encadrement uniforme sur $\lambda_g^n e^{-S_n g(x)}\mu_g(B_n(x,\delta))$.

Enfin, comme $\nu_g = h_g \mu_g$, et que h_g est elle-même uniformément bornée entre deux constantes positives, on en déduit le résultat souhaité pour la mesure ν_g.

Reste à montrer la propriété d'unicité. Si on a une mesure T-invariante θ qui vérifie cette inégalité. On a en particulier une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in \Omega$ et tout $n \geq 0$, $\theta(B_n(x,\delta)) \leq C\nu_g(B_n(x,\delta))$. On peut vérifier que les boules de Bowen constituent une base d'ouverts sur notre topologie, donc par construction de la tribu borélienne, on en déduit que $\theta \ll \nu_g$. Par le théorème de Radon-Nikodym, on a donc $\theta = f\nu_g$. Comme θ et ν_g sont toutes deux T-invariantes, on en déduit que la densité f est T-invariante. Comme (Ω, T, ν_g) est ergodique, on a f constante, donc $f = 1$, $\theta = \nu_g$. $\square$

7 Théorie des perturbations analytiques

Définition 75 :

Soient g et $A \in X$. Pour $t \in \mathbb{C}$ on pose $\mathcal{L}_t\varphi(y) = \sum_{x \in T^{-1}(y)} e^{g(x)+tA(x)}\varphi(x)$.

Lemme 76 :

L'application $t \mapsto \mathcal{L}_t$ est analytique autour de 0.

Démonstration. On peut écrire $\mathcal{L}_t\varphi(y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{t^n}{n!} \sum_{x \in T^{-1}(y)} A^n(x)e^{g(x)}\varphi(x)$. Autrement dit, on a $\mathcal{L}_t\varphi = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{t^n}{n!}\mathcal{L}_g(A^n\varphi)$. Comme $\|\mathcal{L}_g(A^n\varphi)\|_X \leq C\|A\|_X^n\|\varphi\|_X$, on a bien convergence normale de la série indépendamment de t sur un disque complexe $\overline{B_{\mathbb{C}}(0,r)}$ avec $r < \frac{1}{\|A\|_X}$. □

Théorème 77 :

Soit $(\mathcal{L}_t)$ une famille d'opérateurs analytique sur $\overline{B_{\mathbb{C}}(0,r)}$.

Si $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ est valeur propre simple de $\mathcal{L}_0$, avec des vecteurs propres $h_0 \in X$ et $l_0 \in X'$, alors il existe $\delta > 0$, de sorte que $t \mapsto \lambda_t$ donne une valeur propre simple de $\mathcal{L}_t$ de façon analytique, et $t \mapsto h_t$ et $t \mapsto l_t$ donnent de façon analytique des vecteurs propres à droite/gauche de $\mathcal{L}_t$. De plus, pour $\delta > 0$ assez faible, on a un trou spectral $\theta < 1$ uniforme, pour tout $\mathcal{L}_t$ avec $t \in \overline{B_{\mathbb{C}}(0,\delta)}$.

Démonstration. Admis. □

8 Fonctions de pression et TCL

Remarque 78 (Cas réel et cas complexe) **:**

Soient (Ω, d) métrique, de diamètre fini, et T uniformément mélangeante et expanding.

On note $X_{\mathbb{R}}$ l'espace des fonctions lipschitziennes réelles, et de même $X_{\mathbb{C}}$ l'espace des fonctions lipschitziennes complexes.

Soient $g, A \in X_{\mathbb{R}}$, qui induisent $\mathcal{L}_t\varphi(y) = \sum_{x \in T^{-1}(y)} e^{g(x)+tA(x)}\varphi(x)$. Pour tout paramètre $t \in \mathbb{R}$, on a $g + tA \in X_{\mathbb{R}}$ donc on a un trou spectral pour l'opérateur $\mathcal{L}_t$.

En théorie des perturbations, on s'intéresse à étendre cette propriété aux opérateurs $\mathcal{L}_z$ pour des $z \in \mathbb{C}$ qui vérifient $|\mathrm{Im}(z)| \leq f(\mathrm{Re}(z))$.

Définition 79 (Pression) **:**

Pour toute fonction $g \in X_{\mathbb{R}}$, on note $\lambda(g, T)$ le rayon spectral de $\mathcal{L}_g$.

La pression de g (et T) est définie par $P(g) = \ln(\lambda(g, T))$.

On peut alors décomposer $\mathcal{L}_g = e^{P(g)} \times (l_g(\cdot) \times h_g + R_g)$.

On vérifie que $\mathcal{L}_g^n = e^{nP(g)} \times \left(l_g(\cdot) \times h_g + R_g^n\right)$.

Lemme 80 :

Pour la norme d'opérateur, on a $\left\|R_g^n\right\| \leq C\theta^{n-1}$.

Démonstration. On utilise le trou spectral de $\mathcal{L}_g$. □

Proposition 81 (Décroissance des corrélations) **:**

Soit $\nu = h\mu$ la mesure de Gibbs associée à g. Pour toutes fonctions $A \in L^\infty(\Omega)$ et $B \in X$ lipschitzienne, on a :

$$|\nu(A \circ T^n \times B) - \nu(A)\nu(B)| \leq C\|A\|_\infty \|B\|_X \theta^{n-1}.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
\nu(A \circ T^n \times B) &= \mu(A \circ T^n \times Bh) \\
&= e^{-nP}\mu(\mathcal{L}^n(A \circ T^n \times Bh)) \\
&= e^{-nP}\mu(A\mathcal{L}^n(Bh)) \\
&= \mu(A \times h\mu(Bh)) + \mu(AR^n(Bh)) \\
&= \nu(A)\nu(B) + O(\theta^{n-1}),
\end{aligned}$$

avec les bonnes constantes qui sortent dans le O. □

Corollaire 82 :

Soit $A \in X$ telle que $\nu(A) = 0$. Alors $|\nu(A \circ T^n \times A)| \leq C\|A\|_X^2 \theta^{n-1}$.

Corollaire 83 :

Soit $A \in X$ telle que $\nu(A) = 0$. Alors la limite suivante est bien définie :

$$\sigma_A^2 := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\nu\big((S_nA)^2\big) = \nu\big(A^2\big) + 2\sum_{n\geq 1} \nu(A \circ T^n \times A) \geq 0\,.$$

Démonstration. Le terme de droite est bien défini, en tant que série sommable. Si la limite du terme de gauche existe, elle est nécessairement positive. On veut donc montrer l'égalité entre ces deux limites.

Par T-invariance, remarquons que $\nu\big(A \circ T^k \times A \circ T^l\big) = \nu\big(A \circ T^{|k-l|} \times A\big)$, donc quitte à partitionner les couples (k, l) en fonction de leur différence, le long des diagonales du carré $[\![1, n]\!]^2$:

$$\frac{1}{n}\nu\big((S_nA)^2\big) = \nu\big(A^2\big) + 2\sum_{p=1}^{n-1} \frac{n-p}{n}\nu(A \circ T^p \times A)\,,$$

et le terme de droite converge vers la somme voulue par convergence dominée. □

Remarque 84 :

Par exemple, si $A = b \circ T - b$ est le co-bord d'une fonction $b \in X$, alors $S_nA = b \circ T^n - b$, et $\frac{1}{n}\nu\big((S_nA)^2\big) \leq \frac{1}{n} \times 4\|b\|_\infty^2 \to 0$.

Remarque 85 :

Revenons au cas de l'opérateur $\mathcal{L}_t$. On a $\mathcal{L}_t(\varphi) = \mathcal{L}_0\big(e^{tA}\varphi\big)$. Comme $B \times \mathcal{L}_t(\varphi) = \mathcal{L}_t(B \circ T \times \varphi)$, on en déduit que $\mathcal{L}_t^n(\varphi) = \mathcal{L}_0^n\big(e^{tS_nA}\varphi\big)$.

En conséquence, $\partial_t(\mathcal{L}_t^n(\varphi)) = \mathcal{L}_0^n\big(e^{tS_nA}S_nA\varphi\big)$. En particulier, $\partial_t(\mathcal{L}_t^n(\varphi))|_{t=0} = \mathcal{L}_0^n(S_nA\varphi)$.

Proposition 86 :

Soit ν_t la mesure de Gibbs associée à $\mathcal{L}_t$, et $P(t)$ la pression de $g + tA$. Alors $P'(t) = \nu_t(A)$.

Démonstration. On a $e^P = \lambda = \mu(\mathcal{L}(h)) = \langle l, \mathcal{L}h\rangle$.

On sait que pour tout $t \in \mathbb{R}$, toutes les applications considérées sont holomorphes au voisinage de t, donc ce sont des applications analytiques réelles en particulier. On pourra donc dériver les objets sans plus de justifications.

Par linéarité, on a donc :

$$\begin{aligned} P'e^P &= \langle l', \mathcal{L}(h)\rangle + \langle l, \mathcal{L}(Ah)\rangle + \langle l, \mathcal{L}(h')\rangle \\ &= e^P\langle l', h\rangle + e^P\langle l, Ah\rangle + e^P\langle l, h'\rangle \\ &= e^P\big((\langle l, h\rangle)' + \nu(A)\big)\,, \end{aligned}$$

et $\langle l_t, h_t\rangle = 1$ est constante, d'où $P'(t) = \nu_t(A)$. □

Théorème 87 :

Notons $B_t = A - \nu_t(A)$ la fonction recentrée au temps t. On a alors :

$$P''(t) = \sigma_A^2(t) := \lim \frac{1}{n}\nu_t\big((S_n(B_t))^2\big)\,.$$

Démonstration. On va montrer le résultat à $t = 0$. Quitte à normaliser $\mathcal{L}_t$ par une constante, on peut se ramener au cas $\lambda_0 = 1$, donc $P(0) = 0$. Quitte à remplacer A par $A - \nu_0(A)$, on peut supposer de plus que $P'(0) = \nu_0(A) = 0$.

On a alors $P'(t) = \langle l_t, Ah_t\rangle = \langle l_t, \mathcal{L}_t^n(A\mathcal{L}_t^n(h_t))\rangle e^{-2nP(t)}$. La dérivée du terme exponentiel fait apparaître un facteur $P'(t)$, qui s'annule en 0. On a donc :

$$\begin{aligned} P''(0) &= \langle l_0', \mathcal{L}_0^n(A\mathcal{L}_0^n(h_0))\rangle + \langle l_0, \mathcal{L}_0^n(A\mathcal{L}_0^n(h_0'))\rangle \\ &+ \langle l_0, \mathcal{L}_0^n(S_nA \times A\mathcal{L}_0^n(h_0))\rangle + \langle l_0, \mathcal{L}_0^n(A\mathcal{L}_0^n(S_nA \times h_0))\rangle\,. \end{aligned}$$

En outre, on vérifie que $\|\mathcal{L}_0^n(A\mathcal{L}_0^n(\cdot))\| = O(\eta^n)$ en tant qu'opérateur, car en développant les calculs $\mathcal{L}_0^n(A\mathcal{L}_0^n(\varphi)) = R^{2n}(\varphi)$. Le terme à droite de l'égalité, sur la première ligne, est donc lui-même un terme qui converge vers 0. Comme $e^{nP(0)} = 1$, on a alors :

$$\begin{aligned} P''(0) &= \langle l_0, \mathcal{L}_0^n(A \times [S_nA \times \mathcal{L}_0^n(h_0) + \mathcal{L}_0^n(S_nA \times h_0)])\rangle + o(1) \\ &= \langle l_0, A \times [S_nA \times \mathcal{L}_0^n(h_0) + \mathcal{L}_0^n(S_nA \times h_0)]\rangle + o(1) \\ &= \langle l_0, AS_nA \times h_0\rangle + \langle l_0, \mathcal{L}_0^n(A \circ T^n S_nA \times h_0)\rangle + o(1) \\ &= \nu_0((A + A\circ T^n) \times S_nA) + o(1) \\ &= \nu_0(A^2) + 2\sum_{k=1}^{n-1}\nu_0\big(A\circ T^k \times A\big) + \nu_0(A\circ T^n \times A) + o(1) \\ &= \lim_{n\to\infty}\nu_0(A^2) + 2\sum_{k=1}^{n-1}\nu_0\big(A\circ T^k \times A\big) \\ &= \sigma_A^2 \end{aligned}$$

puisque le terme de droite est lui-même un $o(1)$.

Avec beaucoup de précautions, on peut étendre ce résultat au cas général, pour toutes valeurs de $P(0)$, $P'(0)$, puis pour tout paramètre t. □

Remarquons en particulier que, pas positivité de la dérivée seconde lorsque t est réel, la fonction P est alors convexe sur $\mathbb{R}$.

Théorème 88 (TCL) **:**

Soit ν la mesure de Gibbs pour $\mathcal{L}_g$ avec $g \in X$.

Pour A telle que $\nu(A) = 0$, on a $\frac{1}{\sqrt{n}} S_n A \rightharpoonup \mathcal{N}(0, \sigma_A^2)$.

Démonstration. Il suffit de vérifier la convergence simple des fonctions caractéristiques, par le théorème de Lévy. Quitte à renormaliser, on suppose ici encore que $P(0) = 0$.

Posons $\psi_n(t) = \nu\left(e^{it \times \frac{S_n A}{\sqrt{n}}}\right)$. Autrement écrit, on a :

$$\psi_n(t) = \left\langle l_0, e^{\frac{it}{\sqrt{n}} S_n A} h_0 \right\rangle = \left\langle l_0, \mathcal{L}_0^n \left(e^{\frac{it}{\sqrt{n}} S_n A} h_0 \right) \right\rangle = \left\langle l_0, \mathcal{L}^n_{\frac{it}{\sqrt{n}}} h_0 \right\rangle.$$

À t fixé, à partir d'un certain rang, $\frac{it}{\sqrt{n}}$ est dans un voisinage de 0 où $\mathcal{L}_t$ est analytique, avec un trou spectral uniforme, donc $\psi_n(t) = \left\langle l_0, e^{-nP\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)} h_0 \right\rangle + O(\theta^{n-1})$. Reste donc à étudier la limite de $e^{nP\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)}$. Or $P(s) = \frac{s^2}{2}\sigma_A^2 + O(s^3)$, dont on déduit que $nP\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{t^2}{2}\sigma_A^2 + O\left(\frac{t^3}{\sqrt{n}}\right)$, d'où la limite souhaitée. $\square$

9 *Conformal repellers* et dimension

On se place sur (Ω, d) métrique, localement compact.

Définition 89 (Dimension de Minkowski) **:**
Soit $J \subset \Omega$ non vide. On note $N(\delta, J) \in \overline{\mathbb{N}^*}$ le nombre minimal de boules de rayon δ nécessaire pour recouvrir l'ensemble J.

Alors on pose $\overline{\dim_B}(J) = \overline{\lim_{\delta \to 0^+}} \frac{\ln(N(\delta,J))}{\ln(1/\delta)} \in \overline{\mathbb{R}^+}$ la *box-dimension* supérieure, et de même on définit la *box-dimension* inférieure $\underline{\dim_B}(J)$.

En particulier, on note simplement $\dim_B(J)$ lorsque les deux valeurs coïncident.

Remarque 90 :
Si J est fini, alors $\dim_B(J) = 0$. Si $J \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné, alors $\dim_B(J) = n$. On peut relativement facilement vérifier que $\dim_B(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 1$ et $\dim_B\left(\left\{\frac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}^*\right\}\right) = \frac{1}{2}$.

Par la suite, on montrera que $\dim_B(K_3) = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ pour l'ensemble de Cantor triadique.

Remarque 91 (Diamètre d'un ensemble) **:**
Dans la suite de cette section, pour un ensemble U, on notera $|U| = \sup_{x,y \in U} |x-y|$ le diamètre de cet ensemble.

Définition 92 (Dimension de Hausdorff) **:**
Un δ-recouvrement de J est un recouvrement de J par une famille dénombrable d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$, dont les diamètres vérifient $|U_i| \leq \delta$.

On définit $M_s(\delta, J) = \min\left\{\sum |U_i|^s,\ (U_i)_{i\in I} \text{ un } \delta\text{-recouvrement de } J\right\} \in \overline{\mathbb{R}^+}$. L'application $\delta \mapsto M_s(\delta, J)$ est décroissante, donc elle admet une limite monotone $M_s(J)$ en 0^+, la s-dimension de Hausdorff.

On pose alors $\dim_H(J) = \inf\{s \geq 0, M_s(J) < \infty\}$ la dimension de Hausdorff.

Remarque 93 :
Fixons $\delta \leq 1$. Lorsque $0 < x \leq \delta$, l'application $s \mapsto x^s$ est décroissante. En conséquence, $s \mapsto M_s(J)$ est décroissante, et donc $\{s \geq 0, M_s(J) = \infty\}$ est un segment initial de $\mathbb{R}^+$. On va désormais montrer une propriété plus forte.

Proposition 94 :

Il existe un unique $s^* \in \overline{\mathbb{R}^+}$ tel que :

— si $s < s^*$, alors $M_s(J) = +\infty$,

— si $s > s^*$, alors $M_s(J) = 0$.

En conséquence, $s^* = \dim_H(J)$, et on nomme $M_{s^*}(J)$ sa *mesure* de Hausdorff.

Démonstration. Soient $s_1 < s_2 \in \mathbb{R}^+$. Pour tout δ-recouvrement, on a $|U_i|^{s_2} \leq \delta^{s_2 - s_1}|U_i|^{s_1}$, et donc $M_{s_2}(\delta, J) \leq \delta^{s_2-s_1} M_{s_1}(\delta, J)$. En conséquence, si $M_{s_1}(J) < \infty$, alors $M_{s_2}(J) = 0$ et inversement, si $M_{s_2}(J) > 0$ alors $M_{s_1}(J) = \infty$.

Si $s \mapsto M_s(J)$ est identiquement égale à $+\infty$, alors $s^* = \infty$ convient. Sinon, si l'application ne vaut que $+\infty$ puis 0, par décroissance, $s^* = \dim_H(J) \in \mathbb{R}^+$ convient. Enfin, si l'application prend une valeur $M_{s^*}(J) \in \mathbb{R}^{+*}$ strictement positive finie, alors on applique la première partie de la preuve à ce pivot pour conclure. □

Lemme 95 :

On a $\dim_H \leq \underline{\dim}_B$.

Démonstration. Un recouvrement par des boules de rayon δ est en particulier un 2δ-recouvrement, donc $M_s(2\delta, J) \leq (2\delta)^s N(\delta, J)$.

Si $s^* = 0$, on a de toute façon l'inégalité souhaitée, et sinon on peut considérer $0 \leq s < s^*$. Pour un tel s, on a $M_s(2\delta, J) \underset{\delta \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, et donc pour δ assez faible, $M_s(2\delta, J) \geq 1$. En passant au logarithme on a donc $s \ln(2\delta) + \ln(\delta, J) \geq 0$. En divisant par $\ln\left(\frac{1}{\delta}\right) > 0$ puis en passant à la limite inférieure, on en déduit que $\underline{\dim}_B(J) \geq s$.

Ceci étant vrai pour tout $s < s^*$, donc enfin $\underline{\dim}_B(J) \geq \dim_H(J)$. □

Remarque 96 :

On a $\dim_H(\mathbb{Q}) = 0$ et $M_0(\mathbb{Q}) = \infty$.

Plus généralement, pour tout ensemble J dénombrable, $\dim_H(J) = 0$, en utilisant une famille de boules de rayons décroissant arbitrairement vite, de sorte que $M_s(J) = 0$ dès que $s > 0$.

Définition 97 (Dimension d'une mesure) **:**

Soit μ une mesure borélienne sur (Ω, d). On pose $\dim_H(\mu) = \inf\{\dim_H(A), \mu(A^c) = 0\}$.

En particulier, $\dim_H(\mu) \leq \dim_H(\mathrm{Supp}(\mu))$.

Définition 98 (Ahlfors) **:**

Soient μ une mesure (positive) sur Ω. On dit que μ est Ahlfors s-régulière sur J :

— *supérieurement* ssi $\exists C > 0$, $\forall x \in J$, $\forall r > 0$, $\mu(B(x,r)) \leq Cr^s$,
— *inférieurement* ssi $\exists C > 0$, $\forall x \in J$, $\forall r > 0$, $\mu(B(x,r)) \geq \frac{1}{C}r^s$.

Théorème 99 :
Si μ est s-régulière supérieurement sur J et $\mu(J) > 0$, alors $\dim_H(J) \geq s$.

Si μ est une probabilité s-régulière inférieurement sur J, alors $\overline{\dim_B(J)} \leq s$.

Démonstration. Pour le premier point, considérons $(U_i)_{i\in I}$ un δ-recouvrement de J quelconque, et fixons des représentants $x_i \in U_i \cap J$. On a alors :

$$0 < \mu(J) \leq \sum_{i\in I} \mu(U_i) \leq \sum_{i\in I} \mu(B(x_i, |U_i|)) \leq C \sum_{i\in I} |U_i|^s,$$

et donc $M_s(J) \geq \frac{\mu(J)}{C} > 0$, d'où $s^* \geq s$.

Pour le second point, fixons $0 < \delta < 1$. On considère $(x_i)_{1\leq i\leq N(\delta)}$ un ensemble de points δ-séparés maximal, inclus dans J, tel que $\mathrm{d}(x_i, x_j) \geq \delta$ pour $i \neq j$. Par construction, on a $J \subset \bigcup_{i=1}^{N(\delta)} B(x_i, \delta)$, sans quoi on pourrait ajouter un point à la famille. En outre, les boules de rayons $\frac{\delta}{2}$ sont disjointes, d'où :

$$1 = \mu(\Omega) \geq \sum_{i=1}^{N(\delta)} \mu\left(B\left(x_i, \frac{\delta}{2}\right)\right) \geq \frac{1}{C}\left(\frac{\delta}{2}\right)^s N(\delta).$$

Pour la box-dimension, on a alors $N(\delta, J) \leq N(\delta) \leq C\left(\frac{2}{\delta}\right)^s$, et donc $\overline{\dim_B}(J) \leq s$. □

Définition 100 (Recouvrement de Besicovitch) **:**
Un recouvrement de Besicovitch de J est une famille $\mathcal{A}$ de boules ouvertes, centrées en des points de J, de sorte que *tout* $x \in J$ soit le centre d'une des boules au moins.

On note $\mathcal{A}_\delta = \{B \in \mathcal{A},\ |B| \leq \delta\}$.

On dit que $\mathcal{A}$ est un *fine Besicovitch cover* si, pour tout $\delta > 0$, $\mathcal{A}_\delta$ est encore un recouvrement de Besicovitch.

Remarque 101 :
De façon équivalente, $\mathcal{A}$ est *fine* ssi, pour tout $x \in J$, il existe $r_n \to 0$ une suite de rayons tels que $B(x, r_n) \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 102 (Lemme de couverture de Besicovitch) **:**
Soit $\Omega = \mathbb{R}^n$ muni de la distance euclidienne.

Il existe une constante de Besicovitch $b_n \in \mathbb{N}$ de sorte que, pour toute recouvrement de Besicovitch $\mathcal{A}$ de J, on peut extraire un sous-recouvrement $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ pour lequel chaque $x \in \Omega$

apparaît dans au plus b_n boules.

Autrement dit, on peut trouver b_n familles $(\mathcal{C}_i)_{1\le i\le b_n}$ incluses dans $\mathcal{A}$, chaque $\mathcal{C}_i$ étant une famille de boules *disjointes*, et $J \subset \bigcup_{i=1}^{b_n} \bigsqcup_{B\in\mathcal{C}_i} B$.

Démonstration. Admis. □

Remarque 103 :

Plus généralement, on dit que l'espace métrique Ω a la propriété de Besicovitch lorsqu'il existe une constante $b_\Omega \in \mathbb{N}$ pour laquelle on retrouve la propriété du théorème précédent.

Définition 104 (Dimension ponctuelle) **:**

Soit μ une probabilité sur Ω. Pour $x \in \Omega$ et $\delta < 1$, on pose $\underline{d}_\mu(x,\delta) = \inf_{0<r\le\delta} \frac{\ln(\mu(B(x,r)))}{\ln(r)}$ et $\underline{d}_\mu(x) \in \overline{\mathbb{R}^+}$ la limite croissante de la fonction pour $\delta \to 0^+$.

On dit que $\underline{d}_\mu(x)$ est la dimension ponctuelle (*pointwise*) inférieure de μ en x. On considère alors :

$$\underline{d}_\mu^* = \left\|\underline{d}_\mu\right\|_\infty := \sup\left\{s \ge 0,\ \mu\left(\left\{x,\ \underline{d}_\mu(x) \ge s\right\}\right) > 0\right\}$$

son supremum essentiel, sa norme dans l'espace $L^\infty(\mu)$.

Remarque 105 :

Pour $0 < r < 1$, on a $\frac{\ln(\mu(B(x,r)))}{\ln(r)} \ge s$ ssi $\mu(B(x,r)) \le r^s$.

Pour $s \le \underline{d}_\mu(x,\delta)$ et $0 < r \le \delta$ on a donc $\mu(B(x,r)) \le r^s$.

Lorsque x n'est pas dans le support de μ, on a $\mu(B(x,\delta)) = 0$ pour δ assez faible, d'où $\underline{d}_\mu(x,\delta) = +\infty$ dans ce cas, mais ces points ne comptent *pas* pour le supremum essentiel.

Théorème 106 :

Si Ω a la propriété de Besicovitch, alors pour toute probabilité μ, on a $\underline{d}_\mu^* = \dim_H(\mu)$.

Démonstration. Soit $s < \underline{d}_\mu^*$. On a $0 < \mu\left(\left\{x,\ s < \underline{d}_\mu(x)\right\}\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{x,\ s < \underline{d}_\mu\left(x, \frac{1}{n}\right)\right\}\right)$. En particulier, on a $n \in \mathbb{N}$ tel que $D := \mu\left(\left\{x,\ s < \underline{d}_\mu\left(x, \frac{1}{n}\right)\right\}\right) > 0$.

Soit $A \subset \Omega$ tel que $\mu(A^c) = 0$. Soit (U_i) un $\frac{1}{n}$-recouvrement de A. C'est aussi un recouvrement de $A \cap D$, et $\mu(A \cap D) = \mu(D) > 0$.

Soit $\mathcal{I} = \{i \in I,\ U_i \cap A \cap D \ne \emptyset\}$. On peut naturellement se restreindre à ces indices sans changer le recouvrement. Pour chaque $i \in \mathcal{I}$ on fixe un représentant $x_i \in U_i \cap A \cap D$. Comme $|U_i| \le \frac{1}{n}$, et $\underline{d}_\mu\left(x_i, \frac{1}{n}\right) > s$, on a :

$$0 < \mu(A \cap D) \le \sum_{i\in\mathcal{I}} \mu(A \cap D \cap U_i) \le \sum_{i\in\mathcal{I}} \mu(U_i) \le \sum_{i\in\mathcal{I}} \mu(B(x,|U_i|)) \le \sum_{i\in\mathcal{I}} |U_i|^s \le \sum_{i\in I} |U_i|^s,$$

et donc $M_s(A) \geq \mu(D) > 0$, d'où $\dim_H(A) \geq s$. En passant au supremum en s, on a alors $\dim_H(A) \geq \underline{d}_\mu^*$. Enfin, en passant à l'infimum en A, on a $\dim_H(\mu) \geq \underline{d}_\mu^*$.

Considérons désormais le sens réciproque, $s > \underline{d}_\mu^*$. On a $\mu\big(\{x,\, \underline{d}_\mu(x) \geq s\}\big) = 0$, donc son complémentaire A est de mesure pleine.

Pour tout $x \in A$, il existe une suite $r_n(x) \to 0$ telle que $\mu(B(x, r_n)) > r_n^s$. En conséquence, $\mathcal{A} = \{B(x, r_n(x)),\, x \in A, n \in \mathbb{N}\}$ est un *fine* recouvrement de Besicovitch de A.

Par la propriété de Besicovitch, pour tout $\delta > 0$, on peut extraire un sous-recouvrement $\mathcal{C}_\delta$ de $\mathcal{A}_\delta$, avec au plus b_Ω occurrences de chaque $x \in \Omega$. Si on indexe $\mathcal{C}_\delta$ par une famille dénombrable I, on a alors :

$$\sum_{i \in I} |B(x_i, r_i)|^s \leq \sum_{i \in I} (2r_i)^s \leq 2^s \sum_{i \in I} \mu(B(x_i, r_i)) \leq 2^s b_\Omega\,.$$

Comme $\mathcal{C}_\delta$ est un δ-recouvrement de A, on en déduit que $M_s(\delta, A) \leq 2^s b_\Omega$, donc à la limite $M_s(A) < \infty$. On a enfin $\dim_H(\mu) \leq \dim_H(A) \leq s$, d'où l'égalité souhaitée. □

Théorème 107 (Formule de Bowen) **:**
Soit $T : I_1 \sqcup I_2 \subset [0,1] \to [0,1]$ une transformation $\mathcal{C}^1$, et $\Omega = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} T^{-k}([0,1])$.

On considère la famille de transformations de Ruelle $\mathcal{L}_s\varphi(y) = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{|T'(x_i)|}\varphi(x_i)$, associées aux applications $g_s = -s\ln(|T'|)$. Alors $s^* = \dim_H(\Omega)$ est l'unique réel tel que $P(s) = 0$.

Démonstration. Admis. □

Remarque 108 (Application au Cantor) **:**
Soit $\Omega = K_3$ l'ensemble de Cantor triadique, sans points isolés. Pour tout $x \in \Omega$, on vérifie que $\frac{r}{2} \leq |B_\Omega(x, r)| \leq 2r$. La majoration est évidente, et pour la minoration, il faut trouver un point à distance entre $\frac{r}{2}$ et r de x dans le Cantor. On peut écrire $\Omega = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$, avec $\Omega_1 = \big[0, \frac{1}{3}\big] \sqcup \big[\frac{2}{3}, 1\big]$, et ainsi de suite.

En identifiant $\Omega_0 = [0,1]$ à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on remarque que $T : x \mapsto 3x$ est un revêtement à 3 feuillets, uniformément mélangeant et expanding. En outre, par construction du Cantor, $T(\Omega_{i+1}) = \Omega_i$. En passant à la limite, on en déduit que T est une transformation qui préserve Ω. Notons cependant que T est un revêtement de Ω à 2 feuillets et non 3, justement par construction de Ω.

Soit $0 < \delta_0 < \frac{1}{3}$. Si $U \subset \Omega$ et $|U| < \delta_0$, alors U est nécessairement inclus dans $\big[0, \frac{1}{3}\big]$ ou bien $\big[\frac{2}{3}, 1\big]$, et donc on peut voir $T|_U$ comme une fonction réelle affine, de pente 3. Autrement dit, δ_0 est un rayon d'injectivité pour T. Les deux branches de T, sur Ω, sont alors $\psi_0(x) = \frac{x}{3}$ et $\psi_1(x) = \frac{x+2}{3}$. L'opérateur de ruelle associé est donc $\mathcal{L}\varphi(y) = |\psi_0'(y)| \times \varphi \circ \psi_0(y) + |\psi_1'(y)| \times \varphi \circ \psi_1(y)$, l'opérateur $\mathcal{L}_g$ avec $g = -\ln(3)$.

T^n envoie la boule de Bowen $B_n(x, \delta_0)$ sur $B_\Omega(T^n(x), \delta_0)$. En notant $\lambda_n(x) = 3^n$ la pente affine de T^n, on a naturellement $|B_n(x, \delta_0)| = \frac{|B_\Omega(T^n(x), \delta_0)|}{\lambda_n(x)} = \Theta\Big(\frac{1}{\lambda_n(x)}\Big)$, car on a un contrôle uniforme sur le diamètre des boules $B_\Omega(x,r)$ à r fixé.

Plus généralement, pour $0 < r < \delta_0$ et $x \in \Omega$, posons :

$$n(x,r,\delta) = \max\{k \in \mathbb{N},\ B(x,r) \subset B_k(x,\delta)\} \in \mathbb{N}\,.$$

Pour ce rang n, on peut vérifier que $B_n\big(x, \frac{\delta_0}{6}\big) \subset B(x,r) \subset B_n(x,\delta_0)$. En conséquence, quitte à obtenir un autre encadrement uniforme dans le cas $\frac{\delta_0}{6}$, on en déduit finalement l'encadrement uniforme $|B(x,r)| = \Theta\Big(\frac{1}{\lambda_{n(x,r)}(x)}\Big) = \Theta\big(\frac{1}{3^{n(x,r)}}\big)$.

Définissons plus généralement l'opérateur de Ruelle $\mathcal{L}_s\varphi(y) = \sum\limits_{x\in T^{-1}(y)} \frac{1}{|T'(x)|^s}\varphi(x)$, associé à $g = -s\ln(3)$. Par le principe du trou spectral, on en déduit une pression $P(s)$ et une mesure invariante ν_s pour $\mathcal{L}_s$. La propriété de Gibbs, appliquée à ν_s, nous donne ici l'encadrement :

$$\nu_s(B_n(x,\delta_0)) = \Theta\big(\lambda_s^{-n}e^{S_n g(x)}\big) = \Theta\left(e^{-n(P(s)} \times \frac{1}{\lambda_n^s}\right) = \Theta\big(e^{-nP(s)}|B_n(x,\delta_0)|\big)\,.$$

En prenant le rang $n(x,r,\delta_0)$, on obtient plus généralement $\nu_s(B(x,r)) = \Theta\big(e^{-nP(s)}r^s\big)$.

Dans notre cas particulier, par la formule de Bowen, on a $\mathcal{L}_s\mathbb{1} = \frac{2}{3^s}\mathbb{1}$, et $\mathbb{1} \in K_a$ est dans tous les cônes log-lipschitziens, c'est donc nécessairement un vecteur propre associé au rayon spectral. On a alors $P(s) = 0$ ssi $\lambda_s = \frac{2}{3^s} = 1$ ssi $s = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$. Autrement dit, $\dim_H(K_3) = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

10 Dynamiques complexes et dimension

10.1 Courbes de Julia

Définition 109 (Ensembles de Julia) **:**

Soit $P \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme de degré au moins 2. On définit l'ensemble de Julia plein par $K_P = K[P] = \{z \in \mathbb{C}, |P^n(z)| \not\to \infty\}$, où $P^{n+1}(z) = P^n(P(z))$ désigne la suite des itérées. On déduit de cet ensemble l'ensemble de Julia $J_P = \partial K_P$.

Proposition 110 :

Les ensembles K_P et J_P sont compacts.

Démonstration. Comme P est de degré au moins deux, en dehors d'une certaine boule fermée $\mathbb{D}$, on a $|P(z)| \geq 2|z|$, donc K_P est nécessairement borné.

Montrons désormais que K_P^c est ouvert, ce qui conclura la preuve. On a ainsi $z \in K_P^c$ ssi $|P^n(z)| \to \infty$ ssi la suite sort de tout compact. En particulier, la suite sort de $\mathbb{D}$ à partir d'un rang. Réciproquement, si la suite visite $\mathbb{D}^c$ à un certain rang, alors par la remarque précédente, elle tend vers l'infini. On peut donc écrire $K_P^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P^{-n}(\mathbb{D}^c)$ comme une union dénombrable d'ouverts, par continuité du polynôme P. □

Proposition 111 :

On a $K_P = P(K_P) = P^{-1}(K_P)$, et de même pour J_P.

Démonstration. L'ensemble K_P est naturellement invariant par P et P^{-1}, qui ne change pas le comportement asymptotique des itérées d'un point.

Plutôt que de montrer la stabilité de J_P, nous allons plutôt montrer la stabilité du complémentaire $\mathring{K}_P$. Par continuité de P, on a $P^{-1}\left(\mathring{K}_P\right)$ ouvert, inclus dans K_P donc dans son intérieur. D'autre part, l'application P est ouverte en tant que fonction holomorphe non constante, donc $P\left(\mathring{K}_P\right) \subset K_P$ est également ouvert. On a donc montré que $\mathring{K}_P$ est laissé stable par P et P^{-1}.

On en déduit que $\mathring{K}_P = P\left(P^{-1}\left(\mathring{K}_P\right)\right) \subset P\left(\mathring{K}_P\right)$, d'où une égalité. On a alors l'inclusion $\mathring{K}_P \subset P^{-1}\left(P\left(\mathring{K}_P\right)\right) = P^{-1}\left(\mathring{K}_P\right)$, d'où la seconde égalité.

Comme K_P et $\mathring{K}_P$ sont tous deux P et P^{-1} invariants, on en déduit que J_P, le complémentaire de $\mathring{K}_P$ dans K_P, l'est également. □

10.2 Cas particulier de $P_c(z) = z^2 + c$

Par la suite, on considère le cas particulier des polynômes $P_c = z^2 + c$, avec $|c| < \frac{1}{6}$. Un certain nombre de propriétés obtenues se généralisent, mais ce cas-ci est arrangeant pour les calculs.

Remarque 112 (Ensembles usuels) **:**

On notera par la suite $B(z,r) = \{z' \in \mathbb{C}, |z'-z| < r\}$ la boule complexe ouverte de centre 0 et de rayon r, $D(z,r) = \overline{B(z,r)}$ la boule fermée, et $C(z,r) = \partial B(z,r) = \partial D(z,r)$ le cercle. Lorsque $z = 0$, on pourra s'abstenir de le nommer.

Pour $0 < r < 1$, on note alors $A_r = \left\{z \in \mathbb{C}, r < |z| < \frac{1}{r}\right\} = B\left(\frac{1}{r}\right) \backslash D(r)$ l'anneau ouvert centré en 0.

Remarque 113 (Cas trivial) **:**

Si $c = 0$, on a $K(P_0) = D(1)$, et donc $J(P_0) = C(1)$ le cercle unité. On a naturellement $\dim_H(J(P_0)) = 1$.

Lemme 114 :

Soient $|c| < \frac{1}{6}$, et $A = A_{\frac{3}{4}}$. On a $P_c^{-1}(\overline{A}) \subset A$. En conséquence, $J(P_c) \subset A$.

Démonstration. Supposons $z \in D\left(\frac{3}{4}\right)$. Alors $|P_c|(z) \leq \frac{9}{16} + \frac{1}{6} < \frac{3}{4}$. A fortiori, $D\left(\frac{3}{4}\right) \subset K(P_c)$. En outre, $P^{-1}\left(D\left(\frac{3}{4}\right)\right) \subset B\left(\frac{3}{4}\right)$ donc $D\left(\frac{3}{4}\right) \subset P\left(B\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ est inclus dans un ouvert inclus $K(P_c)$, donc finalement $D\left(\frac{3}{4}\right) \subset \mathring{K}(P_c)$.

D'autre part, si $z \notin B\left(\frac{4}{3}\right)$, alors $|P_c(z)| \geq \frac{4|z|}{3} - \frac{1}{6} = \frac{8|z|-1}{6}$. On peut vérifier que, dès lors que $x \geq \frac{4}{3}$, on a $8x - 1 \geq \alpha x$ ssi $\alpha \leq 8 - \frac{3}{4}$. En particulier, $|P_c(z)| \geq \frac{7}{6}|z|$. On en déduit par induction que $P^n(z) \to \infty$, donc $z \notin K(P_c)$.

On a donc montré que $D\left(\frac{3}{4}\right) \subset \circ K(P_c) \subset K(P_c) \subset B\left(\frac{4}{3}\right)$, d'où $J(P_c) \subset A$. $\square$

Définition 115 :

Soit $\Gamma_A(z,w)$ l'ensemble des chemins $\gamma \in \mathcal{C}^1\left([0,1], \overline{A}\right)$ de z à w. Pour rappel, la longueur d'un chemin γ est donnée par $l(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$. On définit alors la distance $d_A(z,w)$ sur A comme la longueur minimale d'un chemin $\gamma \in \Gamma_A(z,w)$.

Remarque 116 :

Cette distance induit la même topologie que la distance usuelle sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, dès que $B(z,r) \subset A$, la distance usuelle et d_A coïncident dans la boule. La distance d_A permet par exemple de garantir des boules connexes par arcs, ce qui est faux en général, avec domaines A en zig-zag par exemple.

Lemme 117 :

Soient $z, w \in \overline{A}$. On peut appairer leurs pré-images (z_1, w_1) et (z_2, w_2), de sorte à avoir $d_A(z_i, w_i) \leq \frac{1}{\beta} d_A(z, w)$, avec $\beta = \frac{3}{2} > 1$.

Démonstration. On a $|P_c'(z)| = |2z| \geq 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$ en tout point de $\overline{A}$. En particulier, P_c est localement inversible. On peut donc tirer en arrière tout chemin $\gamma \in \Gamma_A(z, w)$ en deux chemin γ_i, allant de z_i à w_i.

Le tiré en arrière d'un chemin γ de z à w permet d'appairer les antécédents de z, en induisant deux chemins γ_i qui relient z_i à w_i, tels que $P_c \circ \gamma_i = \gamma$. En conséquence, on a l'inégalité $l(\gamma) \geq \frac{3}{2} l(\gamma_i) \geq \frac{3}{2} d_A(x_i, w_i)$, d'où l'inégalité voulue en prenant l'infimum selon γ. □

Théorème 118 :

L'espace $(J(P_c), d_A)$ est un compact métrique, sur lequel P_c est une transformation uniformément *expanding* et mélangeante.

Proposition 119 :

On a $J(P_c) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} P_c^{-n}(\overline{A})$.

Démonstration. On a déjà vu l'inclusion $J(P_c) \subset A \subset \overline{A}$. En outre, $J(P_c)$ est invariant par pré-image, et $\overline{A}$ est stable par pré-image. On a donc une inclusion naturelle :

$$J(P_c) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} P_c^{-n}(\overline{A}) =: M \subset \overline{A}.$$

Soit désormais $z \in M$. M est l'ensemble des points de $\overline{A}$ dont toutes les itérées sont dans $\overline{A}$, donc $M \subset K(P_c)$ en particulier. En outre, toute itérée $z_n := P^n(z)$ est encore dans M.

Soit w_n tel que $|w_n| = \frac{4}{3}$ la projection (radiale) de z_n sur $B\left(\frac{4}{3}\right)^c$. En particulier, $w_n \notin K(P_c)$. Quitte à relier les points par une ligne droite, $d_A(z_n, w_n) \leq \frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{7}{12} < 1$. Par le lemme précédent, on a un antécédent w de w_n tel que $d_A(w, z) \leq \frac{1}{\beta^n}$, et par stabilité, $w \notin K(P_c)$. En passant à la limite, $d_A(z, (K(P_c))^c) = 0$, donc $z \notin \overset{\circ}{K}(P_c)$. Finalement, on a bien $M \subset J(P_c)$, ce qui conclut la preuve. □

10.3 Applications conformes et distorsion

Commençons par quelques rappels d'analyse complexe.

Lemme 120 (Lemme de Schwarz) **:**

Soit $\Phi : B(r) \to B(r')$ holomorphe, telle que $\Phi(0) = 0$. Alors $|\Phi'(0)| \leq \frac{r'}{r}$.

Lemme 121 (Lemme de distorsion de Köebe) **:**

Soit $\Phi : B(1) \to \mathbb{C}$ holomorphe injective, telle que $\Phi(0) = 0$ et $\Phi'(0) = 1$. On dit que Φ est univalente. Alors pour tout z, on a l'encadrement :

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |\Phi(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

Démonstration. Voir *Complex Dynamics*, Carleson, Gamelin. □

Corollaire 122 :

Soient $\lambda > 0$, et $\Phi : B(\delta) \to \mathbb{C}$ holomorphe injective, telle que $\Phi(0) = 0$ et $|\Phi'(0)| = \frac{1}{\lambda}$. Alors pour tout z, on a l'encadrement :

$$\frac{\delta}{\lambda} \times \frac{|z|/\delta}{(1+|z|/\delta)^2} \leq |\Phi(z)| \leq \frac{\delta}{\lambda} \times \frac{|z|/\delta}{(1-|z|/\delta)^2}.$$

On peut encore étendre cette borne à des boules centrées en z, telles que $\Phi(z) = z'$, via des des translations au départ et à l'arrivée.

Notons enfin que, par croissance de $x \mapsto \frac{x}{(1+x)^2}$ sur $\mathbb{R}^+$, si on peut minorer $|z|/\delta$, alors on peut remplacer ce terme par sa minoration dans le terme de gauche. Il en va de même pour les majorations (tant qu'elles restent inférieures à 1) dans le terme de droite.

Considérons désormais $0 < \delta_0 < d_A(J(P_c), \partial_A)$. Cette distance est bien atteinte, strictement positive, en tant que distance entre deux compacts disjoints. Pour un tel δ_0, pour tout $z \in J(P_c)$, on a $B(z, \delta_0) \subset A$. Quitte à prendre δ_0 assez faible, on a un rayon d'injectivité.

Remarque 123 :

Rappelons que les boules de Bowen sont les $B_n(z, \delta_0) = \bigcap_{k=0}^{n} P_c^{-k}(B(z_k, \delta_0))$, avec $z_k = P^k(z)$. On a vu que $P_c(B_{n-k}(z_k), \delta_0) \subset B_{n-k-1}(z_{k+1}, \delta_0)$ et $B_n(z, \delta_0) \subset B\left(z, \frac{\delta_0}{\beta^n}\right)$.

Définition 124 :

Soient $z \in J(P_c)$ et $0 < r < \delta_0$. On pose $n = \underline{n}(z, r, \delta_0) = \max\{k \geq 0, B(z, r) \subset B_k(z, \delta_0)\}$ le dernier rang auquel la *vraie* boule centrée en z de rayon r est contenue dans une δ_0-boule de Bowen.

Lemme 125 :

Soient $z \in J(P_c)$, $0 < r < \delta_0$, et n le rang associé. On note $\alpha = \sup_{z \in A} |P_c'(z)|$. Un calcul direct nous donne l'encadrement $1 < \frac{3}{2} \leq \beta \leq \alpha \leq \frac{8}{3}$.

Soient $\delta_1 = \frac{2}{3} \times \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} \times \delta_0$, et $\lambda_n(z) = \left|(P_c^n)'(z)\right| \geq \beta^n$. Alors on a $B_n(z, \delta_1) \subset B(z, r)$, et $\frac{\delta_1}{\lambda_n(z)} \leq r \leq \frac{\delta_0}{\lambda_n(z)}$.

Démonstration. L'application P_c^n envoie $B_n(z,\delta_0)$ dans $B_0(z_n,\delta_0)$. En conséquence, on a un holomorphisme $P_c^n : B(z,r) \to B(z_n,\delta_0)$, donc par le lemme de Schwarz, $\lambda_n(z) = \left|(P_c^n)'(z)\right| \leq \frac{\delta_0}{r}$.

Comme $B(z,r) \not\subset B_{n+1}(z,\delta_0)$, on a $y \in B(z,r)$ tel que $d(P_c^{n+1}(y), P_c^{n+1}(z)) \geq \delta_0$, et donc $d(P_c^n(y), z_n) \geq \frac{\delta_0}{\alpha}$.

Soit $\psi_n : B(z_n,\delta_0) \to B_n(z,\delta_0)$ un inverse local de P_c^n. On peut alors réécrire une des inégalités précédentes sous la forme $r > d(y,z) = d(\psi_n(P_c^n(y)), \psi_n(z_n))$. Comme $|\psi_n'(z_n)| = \frac{1}{\lambda_n(z)}$, et $\frac{d(P_c^n(y),z_n)}{\delta_0} \geq \frac{1}{\alpha}$, la borne inférieure de Köebe nous donne alors :

$$d(\psi_n(P_c^n(y)), \psi_n(z_n)) \geq \frac{\delta_0}{\lambda_n(z)} \times \frac{1/\alpha}{(1+1/\alpha)^2} = \frac{\delta_0}{\lambda_n(z)} \times \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}\,.$$

On a donc $r > \frac{3}{2}\frac{\delta_1}{\lambda_n(z)}$, et l'inégalité est vraie *a fortiori* en ajoutant un facteur $\frac{2}{3}$.

Considérons enfin $w \in B(z_n,\delta_1)$. On vérifie que $t := \frac{2}{3} \times \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} \leq \frac{1}{6}$. Notons que, sans ajouter de facteur $\frac{2}{3}$, on aurait simplement $t \leq \frac{24}{121}$, ce qui est plus grand que $\frac{1}{6}$. On a $\frac{d(w,z_n)}{\delta_0} \leq t$. En utilisant la borne supérieure de Köebe, cette fois-ci, on a :

$$d(\psi_n(w), z) \leq \frac{\delta_0}{\lambda_n(z)} \times \frac{t}{(1-t)^2} \leq \frac{\delta_1}{\lambda_n(z)} \times \frac{1}{(1-t)^2} \leq \frac{\delta_1}{\lambda_n(z)} \times \frac{36}{25} \leq \frac{\delta_1}{\lambda_n(z)} \times \frac{3}{2} < r\,.$$

En conséquence, on a bien l'inclusion dans la boule souhaitée. □

Remarque 126 :

Soit $X = \mathrm{Lip}_{\mathbb{R}}(J(P_c), d)$. Pour $g \in X$, on a l'opérateur de Ruelle $\mathcal{L}_g\varphi(w) = \sum\limits_{z \in P_c^{-1}(w)} e^{g(z)}\varphi(z)$. $\mathcal{L}_g$ admet un trou spectral, donc une fonction de pression $P(g)$ et une mesure de Gibbs ν_g. On a donc $\nu_g(B_n(z,\delta_0))$ et $\nu_g(B_n(z,\delta_1))$ qui sont tous deux des $\Theta\big(e^{-nP(g)+S_ng(z)}\big)$ uniformes. Par le théorème précédent, on a en outre $r = \Theta\left(\frac{1}{\lambda_{n(z,r)}(z)}\right)$.

Définition 127 (Exposant de Lyapunov) **:**

On définit $\Lambda_g = \int\limits_{J(P_c)} \ln(|P_c'(z)|)\,\mathrm{d}\nu_g(z)$.

Remarque 128 :

On a $\frac{1}{n}\ln(\lambda_n(z)) = \frac{1}{n}\ln\left(\left|(P_c^n)'(z)\right|\right) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\ln(|P_c'(z_k)|) = \frac{1}{n}S_n[\ln(|P_c'|)](z)$. Par le théorème de Birkhoff, on a donc la convergence de :

$$\frac{1}{n}\ln(\lambda_n(z)) \underset{n\to\infty}{\overset{\nu_g-\text{p.s.}}{\longrightarrow}} \Lambda_g\,,$$

et de :

$$\frac{1}{n}S_ng(z) \underset{n\to\infty}{\overset{\nu_g-\text{p.s.}}{\longrightarrow}} \nu_g(g)\,.$$

Théorème 129 :

La dimension de Hausdorff de ν_g vaut $\dim_H(\nu_g) = \frac{P(g)-\nu_g(g)}{\Lambda_g}$.

Démonstration. Comme $(\mathbb{C}, |.|)$ est isomorphe à l'espace euclidien $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$, il admet la propriété de Besicovitch. Par extension, A admet également cette propriété, d'où $\dim_H(\nu_g) = \underline{d}^*_{\nu_g}$.

Rappelons que $\underline{d}^*_{\nu_g} = \left\|\underline{d}_{\nu_g}(z)\right\|_\infty$, avec $\underline{d}_{\nu_g}(z) = \lim\limits_{r\to 0} \underline{d}_{\nu_g}(z,r)$, et $\underline{d}_{\nu_g}(z,r) = \inf\limits_{0<r'<r} \frac{\ln(\nu_g(B(z,r')))}{\ln(r')}$. Par l'encadrement uniforme obtenu, cette limite peut se réécrire sous la forme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-nP(g)+S_n g(z)}{-\ln(\lambda_n(z))}$. En utilisant la convergence p.s. donnée par Birkhoff, on a $\frac{P(g)-\frac{1}{n}S_n g(z)}{\frac{1}{n}\ln(\lambda_n(z))} \overset{\nu_g-\text{p.s.}}{\longrightarrow} \frac{P(g)-\nu_g(g)}{\Lambda_g}$. □

Remarque 130 :

Considérons en particulier les applications $g_s = -s\ln(|P_c'|)$, ainsi que les opérateurs associés, $\mathcal{L}_s\varphi(w) = \sum\limits_{z\in P_c^{-1}(w)} \frac{1}{|P_c'(z)|^s}\varphi(z)$.

Pour $g_t = g + tA$, on a vu que $P'(s) = \nu_s(A)$. Ici :

$$P'(s) = -\int \ln(|P_c'(z)|)\,\mathrm{d}\nu_s(z) = -\Lambda_{g_s} \in [-\ln(\alpha), -\ln(\beta)] \subset \mathbb{R}^{-*},$$

car $1 < \beta \leq \alpha$. En conséquence, on a la réécriture $\dim_H(\nu_{g_s}) = \frac{P(s)+s\Lambda_{g_s}}{\Lambda_{g_s}} = s - \frac{P(s)}{P'(s)}$. Sur le graphe de P, $\dim_H$ correspond au point d'intersection entre la tangente à P en s et l'axe horizontal. Par (stricte) convexité de P, on a donc un unique point $s^* = \operatorname*{argmax}\limits_{s\in\mathbb{R}} \dim_H(\nu_s)$ tel que $P(s^*) = 0$.

En ce point particulier, on a la borne uniforme $\nu_{s^*}(B_n(z,\delta_i)) = \Theta\big(e^{-s^* S_n(\ln(|P_c'(z)|))}\big)$ pour $i \in \{0,1\}$, donc on intercale en particulier $\nu_{s^*}(B(z,r)) = \Theta\big(e^{-s^* S_n(\ln(|P_c'(z)|))}\big)$ entre les deux. Or on a $r^{s^*} = \Theta\big(e^{-s^*\ln(\lambda_n(z))}\big)$.

Rappelons qu'on a établi $\ln(\lambda_n(z)) = S_n(\ln(|P_c'(z)|))$. En conséquence, il existe une constante $C > 1$ telle que, pour tous $z \in J(P_c)$ et $r > 0$:

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\nu_{s^*}(B(z,r))}{r^{s^*}} \leq C\,.$$

L'ensemble $J(P_c)$ est s^*-Ahlfors régulier, d'où finalement $\dim_H(J(P_c)) = s^*$.

11 Dynamiques hyperboliques

Remarque 131 :
Soit $f : (x, y) \mapsto (\lambda_1 x, \lambda_2 y) \in \mathbb{R}^2$, avec $0 < |\lambda_2| < 1 < |\lambda|_1$.

La plupart des trajectoires partent à l'infini pour $n \to \pm\infty$. Si on considère un point est sur l'axe horizontal, il part vers 0 en $-\infty$, et s'il est sur l'axe vertical, il part vers 0 en $+\infty$.

On dit que $O = (0, 0)$ est un point fixe hyperbolique. On note $W^s(O) = \{0\} \times \mathbb{R}$ la partie stable, avec les points qui convergent vers O à l'infini, et $W^u(O) = \mathbb{R} \times \{0\}$ la partie instable, avec les points qui convergent vers O en $-\infty$.

Plus généralement, pour $f : x \mapsto Ax$ linéaire, lorsque $\sigma(A) \cap \mathbb{U} = \emptyset$, on peut découper le spectre entre $\sigma^u(A) = \{\lambda \in \sigma(A), |\lambda| > 1\}$ et $\sigma^s(A) = \{\lambda \in \sigma(A), |\lambda| < 1\}$, avec E^u et E^s les espaces propres associés.

Définition 132 (Point fixe hyperbolique) **:**
Soient U ouvert, et $f \in \mathcal{C}^1\big(U, \mathbb{R}^d\big)$. On dit que $p \in U$ est un point fixe *hyperbolique* si $f(p) = p$ et $\sigma(dF(p)) \cap \mathbb{U} = \emptyset$.

On peut en déduire une décomposition $E^u \oplus E^s$ de l'espace tangent en p.

Remarque 133 :
On aimerait en déduire une variété locale stable $W^s_{loc}(p)$ et une variété locale instable $W^u_{loc}(p)$, mais les non-linéarités compliquent la tâche.

Quitte à translater, on se ramène au cas où $p = 0 \in U$. Dans ce cas, on peut naturellement inclure un voisinage de 0 dans E^u et E^s dans U.

Définition 134 (Cadre général) **:**
Plus généralement, on considère E^u et E^s deux espaces de Banach, et $E = E^u \times E^s$ l'espace de Banach muni de la norme $\|(x, y)\|_E = \max(\|x\|_{E^u}, \|y\|_{E^s})$.

Pour $R > 0$, on pose $D^u_R = B_{E^u}(0, R)$ et $D^s_R = B_{E^s}(0, R)$.

Définition 135 (Fonction hyperbolique) **:**
Soient $0 < \theta < 1$ et $0 < \alpha < \frac{1-\theta}{4}$. On considère $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de $D := D^u_R \times D^s_R$ vers E telles que :

$$f(x, y) = (\Lambda_1(x) + K_1(x, y), \Lambda_2(y) + K_2(x, y)),$$

avec $\Lambda_1 \in GL(E^u)$ et $\left\|\Lambda_1^{-1}\right\|_{L(E^u)} \leq \theta$, $\Lambda_2 \in L(E^s)$ et $\|\Lambda_2\|_{L(E^s)} \leq \theta$, ainsi que $K_i \in \mathcal{C}^1(D, E)$,

$$\sup_{(x,y)\in D} \|K_i(x,y)\|_E \leq \alpha R \text{ et } \sup_{(x,y)\in D} \|dK_i(x,y)\|_{L(E)} \leq \alpha.$$

Par la suite, on s'abstiendra de préciser R lorsque cela n'est pas nécessaire.

Définition 136 :

Soient $K^u = \{\varphi : D^u \to D^s,\, Lip(\varphi) \leq 1\}$ et $K^s = \{\varphi : D^s \to D^u,\, Lip(\varphi) \leq 1\}$ des espaces métriques complets.

Chaque élément $\varphi \in K^u$ induit un graphe $G^u(\varphi) = \{(x, \varphi(x)),\, x \in D^u\} \subset D$.

On peut naturellement considérer $f(G^u(\varphi))$, inclus dans E, qu'on peut restreindre à D. On aimerait que cette objet soit aussi un graphe, pour que f induise une transformation sur K^u.

On décompose $f = (f_1, f_2)$ selon l'espace d'arrivée.

Théorème 137 (Transformation des graphes instables) **:**

Soit $\varphi \in K^u$. Pour tout $y \in D^u$, il existe un unique x tel que $f_1(x, \varphi(x)) = y$. On peut donc poser $\widehat{\varphi}(y) = f_2(x, \varphi(x))$, de sorte que $f(G^u(\varphi)) \cap D = G^u(\widehat{\varphi})$.

En outre, $\widehat{\varphi} \in K^u$, et $\Gamma : \varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ est η-lipschitzienne avec $\eta = \frac{\theta+\alpha}{1-\theta\alpha} < 1$.

Démonstration. Considérons $\varphi, \widetilde{\varphi} \in K^u$. On note $\Delta\varphi = \|\varphi - \widetilde{\varphi}\|_\infty$. Soient $x_1, \widetilde{x_1} \in D^u$, ainsi que $y_1, \widetilde{y_1} \in D^u$ et $y_2, \widetilde{y_2} \in D^s$, et les Δ associés pour $\|.\|_E$.

On a :

$$\|\varphi(x_1) - \widetilde{\varphi}(\widetilde{x_1})\|_E \leq \Delta x_1 + \Delta\varphi\,.$$

D'autre part, comme on borne la dérivée de K_1 :

$$\|K_1(x_1, \varphi(x_1)) - K_1(\widetilde{x_1}, \widetilde{\varphi}(\widetilde{x_1}))\| \leq \alpha(\Delta x_1 + \|\varphi(x_1) - \widetilde{\varphi}(\widetilde{x_1})\|) \leq \alpha(2\Delta x_1 + \Delta\varphi)\,.$$

On a $\Lambda_1(x_1) + K_1(x_1, \varphi(x_1)) = y_1$ ssi $x_1 = \Lambda_1^{-1}(y_1 - K_1(x_1, \varphi(x_1))) =: G(x_1)$. Comme on contrôle la norme de Λ_1^{-1} linéaire, et qu'ici $\Delta\varphi = 0$, on en déduit que :

$$\|G(x_1) - G(\widetilde{x_1})\| \leq 2\theta\alpha\Delta x_1\,.$$

Il y a possiblement une coquille dans la définition du facteur α. Admettons que cette constante est strictement inférieure à 1.

En outre, $\|G(x)\| \leq \theta R + \theta\alpha R = \theta(1+\alpha)R < R$, donc G est en fait une transformation contractante de D^u_R, qui admet un unique point fixe x_1. Considérons alors $y_2 = \Gamma(\varphi)(y_1)$. On a bien montré la première moitié du théorème.

On procède de même avec $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{x_1}$ et finalement $\widetilde{y_2} = \Gamma(\widetilde{\varphi})(\widetilde{y_1})$. Quitte à utiliser les G associés, on a :

$$\Delta x_1 \leq \theta\Delta y_1 + \alpha\theta(\Delta x_1 + \Delta\varphi)\,,$$

et donc au facteur 2 près, quitte à réinjecter l'inégalité, par *bootstrap*, on a finalement :

$$\delta x_1 \leq \frac{\theta}{1-\theta\alpha}\Delta y_1 + \frac{\theta\alpha}{1-\theta\alpha}\Delta\varphi\,.$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \Delta y_2 & = & \|f_2(x_1,\varphi(x_1)) - f_2(\widetilde{x_1},\widetilde{\varphi}(\widetilde{x_1}))\|_E \\ & \leq & \theta\|\varphi(x_1) - \widetilde{\varphi}(\widetilde{x_1})\| + \alpha(\Delta x_1 + \Delta\varphi) \leq (\theta+\alpha)(\Delta x_1 + \Delta_\varphi) \\ & \leq & (\theta+\alpha)\left(\frac{\theta}{1-\theta\alpha}\Delta y_1 + \frac{1}{1-\theta\alpha}\Delta\varphi\right). \end{array}$$

Lorsqu'on considère une même fonction, $\Delta\varphi = 0$, et alors $\Delta y_2 \leq \Delta y_1$, donc φ est bien 1-lipschitzienne, $\Gamma(\varphi) \in K^u$.

Lorsqu'on considère le même point de départ, $\Delta y_1 = 0$, et alors $\Delta y_2 \leq \eta\Delta\varphi$, donc au supremum on a bien $\|\Gamma(\widetilde{\varphi}) - \Gamma(\varphi)\|_\infty \leq \eta\|\widetilde{\varphi} - \varphi\|_\infty$. □

Théorème 138 (Transformation des graphes stables) **:**

On considère cette fois-ci $\varphi \in K^s$. Pour tout $x_2 \in D^s$, il existe des uniques points $x_1 \in D^u$ et $y_2 \in D^s$ tels que $f_2(x_1,x_2) = y_2$ et $f_1(x_1,x_2) = \varphi(y_2)$. Dans ce cas, on considère $\Gamma(\varphi) : x_2 \mapsto x_1$.

On a à nouveau $\Gamma : K^s \to K^s$ une application η-lipschitzienne.

Ce faisant, à restriction près, f^{-1} envoie le graphe de φ sur celui de $\Gamma(\varphi)$.

Démonstration. Si une telle solution existe, alors $f_1(x_1,x_2) = \varphi \circ f_2(x_1,x_2)$. On peut réécrire cette égalité sous la forme :

$$x_1 = \Lambda_1^{-1}(\varphi(\Lambda_2(x_2) + K_2(x_1,x_2)) - K_1(x_1,x_2)) =: G(x_1,x_2,\varphi)\,.$$

On vérifie que G laisse D^u_R stable, et que :

$$\|G(x_1,x_2,\varphi) - G(\widetilde{x_1},\widetilde{x_2},\widetilde{\varphi})\|_E \leq 2\theta\alpha\Delta x_1 + \theta(\theta+2\alpha)\Delta x_2 + \theta\Delta\varphi\,.$$

Comme $2\theta\alpha < 1$, si $\Delta x_2 = \Delta\varphi = 0$, on a bien G contractant, le point fixe x_1 est unique.

Si on considère alors x_1 et $\widetilde{x_1}$ les points fixes, par *bootstrap* :

$$\delta x_1 \leq \frac{\theta(1+2\alpha)}{1-2\theta\alpha}\Delta x_2 + \frac{\theta}{1-2\theta\alpha}\Delta\varphi\,.$$

À nouveau, on peut vérifier que chacun de ces deux coefficients est plus petit que 1, donc avec $\Delta\varphi = 0$ on vérifie que $\Gamma(\varphi) \in K^s$, puis avec $\Delta x_2 = 0$ on vérifie que Γ est η-lipschitzienne. □

Théorème 139 :

Soit $f \in \mathcal{F}$. Alors f admet un unique point fixe $p \in D$.

Γ_u admet un unique point fixe $\varphi_u \in K^u$, et Γ_s un unique point fixe $\varphi_s \in K^s$.

On peut alors poser $W^u_{loc}(p) = \mathcal{G}^u(\varphi_u)$, et de même pour $W^s_{loc}(p)$.

Si de plus $f \in \mathcal{C}^r$, alors les applications φ et donc les variétés W sont aussi $\mathcal{C}^r$.

Démonstration. Si $p = f(p)$, alors on a une relation de point fixe :

$$x = \left(\Lambda_1^{-1}(x_1 - K_1(x)), \Lambda_2(x_2 - K_2(x))\right),$$

par une contraction $(\theta + 2\alpha)$-lipschitzienne sur D. En outre, $\|p_1\| \leq \frac{\alpha\theta}{1-\alpha\theta} R$ et $\|p_2\| \leq \frac{\alpha}{1-\theta} R$.

L'existence et unicité des points fixes φ est naturelle. Quitte à partir des graphes constants qui valent la bonne autre coordonnée de p, en itérant, les graphes contiennent le point p à chaque étape. En passant à la limite, les applications φ aussi.

On admet les propriétés de régularité des variétés, qui sont très laborieuses à démontrer, sans que la preuve gagne en profondeur conceptuelle. □

Remarque 140 :

Que peut-on dire si on considère une *suite* de transformations $(f_k) \in \mathcal{F}^{\mathbb{Z}}$? Précédemment, on avait $W^u_{loc}(p) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n$, avec $D_{n+1} = D \cap f(D_n)$. Si $D_{n+1} = D \cap f_n(D_n)$, en partant de $n_0 \to -\infty$, on converge vers une famille de variétés (W^n) telles que $f_n(W_n) = W_{n+1}$.

Remarque 141 :

On considère un exemple discontinu sur la carré $[0,1]^2$: $f(x,y) = \left(2x, \frac{y}{\beta}\right)$ si $x < \frac{1}{2}$ et $f(x,y) = \left(2x-1, \frac{y+\beta-1}{\beta}\right)$ sinon. Autrement dit, f écrase la moité de gauche en bas, jusqu'à la hauteur $\frac{1}{\beta}$, puis l'étire sur toute la largeur, et de même pour la moitié de droite écrasée sur le haut puis étirée.

En itérant f, on obtient à la limite un ensemble f-invariant $\Omega = [0,1] \times C$, où C est un un Cantor.

Pour tout p on peut définir $W^s(p) = \left\{q,\ d\big(f^k(p), f^k(q)\big)\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\right\}$, un ensemble stable par f.

Pour $p \in \Omega$, on peut définir de même $W^u(p)$ pour $k \to -\infty$.

Remarque 142 :

Soit $\mathbb{T}^2$. On considère $f(x,y) = (x+y, x)$.

Sur $\mathbb{R}^2$, cette transformation a pour vecteurs propres $(\gamma, 1)$ associé à γ et $(1, -\gamma)$ associé à $-\frac{1}{\gamma}$, et 0 est donc un point fixe hyperbolique.

Après projection, cependant, par irrationalité, on constate que les variétés stables forment des espaces denses dans le tore.

12 Disque de Poincaré, flots géodésiques

Définition 143 (Disque de Poincaré) **:**
On note $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$, et $Aut^{\omega}(\mathbb{D})$ l'ensemble des biholomorphismes sur $\mathbb{D}$.

On sait qu'on peut exprimer chaque tel automorphisme sous la forme d'une transformation de Möbius, sous la forme $M(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{D}$.

Pour une telle application M, on vérifie que $|M'(z)| = \frac{1-|M(z)|^2}{1-|z|^2}$.

Théorème 144 :
On définit une métrique riemannienne sur $\mathbb{D}$:

$$\mathrm{d}s = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}\,.$$

Cette métrique induit une distance $d_{\mathbb{D}}$. Dans ce cas, $Aut^{\omega}(\mathbb{D}) = Isom(\mathbb{D})$.

Démonstration. Admis. □

On peut vérifier que le chemin le plus court de 0 à z est la ligne droite. En conséquence :

$$d_{\mathbb{D}}(0,z) = \int_0^{|z|} \frac{2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right).$$

Si on veut parcourir le chemin $]-1,1[$ à vitesse constante pour la métrique, il faut considérer $t = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, autrement dit $x(t) = \tanh\left(\frac{t}{2}\right)$.

Dans le cas général, on peut envoyer un des deux points en 0 par automorphisme, et en déduire la distance entre l'image de l'autre point et 0. Ce faisant, on envoie les géodésiques sur des géodésiques. Les transformations de Möbius préservent les cercles (et les droites, qu'on voit comme des cercles dégénérés), et sont conformes, donc les géodésiques de $d_{\mathbb{D}}$ sont les arcs de cercles orthogonaux au bord de $\mathbb{D}$.

Théorème 145 (Théorème de Birkhoff pour les flots) **:**
Soit (X,μ) un espace probabilisé. Soit $\varphi : \mathbb{R} \times X \to X$ un flot qui préserve la mesure, autrement dit la transformation φ_t préserve la mesure pour tout t. Alors, pour toute fonction $f \in L^1(X)$, la limite $f^+(x) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\varphi_t(x))\,\mathrm{d}t$ existe μ-p.s. On a de même une limite f^- pour la valeur moyenne sur $[-T,0]$, et $f^+ = f^-$ presque-sûrement.

Démonstration. Admis. □

13 Rotations irrationnelles du cercle, problème des petits diviseurs

Ces résultats sont en lien avec le théorème K.A.M.

Soit f un homéomorphisme croissant sur $\mathbb{T}$. On identifie f à son relèvement $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, un homéomorphisme croissant.

Théorème 146 (Nombre de rotations) **:**

Il existe un unique $\tau\left(\widehat{f}\right) \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{n}\left(\widehat{f}^n(x) - x\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tau\left(\widehat{f}\right)$.

En outre, $\tau\left(\widehat{f}\right) \in \left\{\widehat{f}(x) - x, x \in \mathbb{R}\right\}$. Par périodicité de $x \mapsto \widehat{f}(x) - x$, cet ensemble est un intervalle compact.

Notons que si deux relèvements vérifient $\widehat{f} - \widetilde{f} = k \in \mathbb{Z}$, alors $\tau\left(\widehat{f}\right) - \tau\left(\widetilde{f}\right) = k$. En conséquence, après projections, on a un unique nombre de rotations $\tau(f) \in \mathbb{T}$.

Démonstration. Admis. □

Théorème 147 :

Le nombre de rotation de f est invariant par conjugaison.

Démonstration. Soit H un homéomorphisme croissant sur $\mathbb{R}$, tel que $H(x) - x$ est 1-périodique, et $\widehat{f_1} \circ H = H \circ \widehat{f_2}$. En itérant, on a naturellement $\widehat{f_1}^n \circ H = H \circ \widehat{f_2}^n$.

On vérifie alors le résultat. □

Remarque 148 :

Soit ainsi $r_\theta : x \mapsto x + \theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Naturellement, son indice de rotation est θ. On se demande alors si f est toujours conjuguée à la rotation r d'angle $\theta = \tau(f)$.

Si $\theta = 0$, mais que $f \neq \mathrm{Id}$, alors ce n'est pas le cas. Plus largement, si $\theta = \frac{p}{q}$ est rationnel, quitte à itérer q fois, on se ramène à $\tau(f^q) = p = 0$.

Si θ est irrationnel, on peut montrer que f est toujours conjuguée à r_θ lorsque $f \in \mathcal{C}^2$, et on a des contre-exemples lorsque $f \in \mathcal{C}^1$.

Définition 149 (Nombres diophantiens) **:**

L'irrationnel θ est diophantien de type (γ, α), avec $\alpha \geq 0$ et $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, lorsque :

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}^*, |p - q\theta| \geq \frac{\gamma}{q^{2+\alpha}}.$$

On note $Dioph(\gamma, \alpha)$ l'ensemble de ces nombres.

Lemme 150 :

Soit $\theta \in Dioph(\gamma, \alpha)$. Alors pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $\left|e^{2i\pi q\theta} - 1\right| \geq 4\frac{\gamma}{q^{2+\alpha}}$.

Démonstration. Admis. □

Remarque 151 (Fonctions holomorphes périodiques) **:**

Soit $A_\Delta = \mathbb{R} \times [-\Delta, \Delta] \subset \mathbb{C}$, la droite réelle épaissie.

Pour φ holomorphe sur A_Δ, on note $\|\varphi\|_\Delta = \|\varphi\|_{\infty, A_\Delta}$.

Si φ est 1-périodique, elle admet une décomposition en série de Fourier $\varphi(z) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2ik\pi z}$, avec $c_k(\varphi) = \int\limits_0^1 \varphi(z) e^{-2ik\pi z} \, \mathrm{d}z$.

Lemme 152 :

Soit φ holomorphe sur A_Δ, 1-périodique. Alors pour tous $\alpha \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{Z}^*$, on a :

$$|c_k(\varphi)| \leq \|\varphi - \alpha\|_\Delta e^{-2\pi|k|\Delta}.$$

Démonstration. La formule de Cauchy nous donne :

$$\begin{aligned} |c_k(\varphi)| &= \left|\int\limits_0^1 (\varphi(z) - \alpha) e^{-2ik\pi z} \, \mathrm{d}z\right| \\ &= \left|\int\limits_0^1 (\varphi(z + is) - \alpha) e^{-2ik\pi z + 2\pi ks} \, \mathrm{d}z\right| \\ &\leq \|\varphi - \alpha\|_\Delta e^{2\pi ks}. \end{aligned}$$

Quitte à faire tendre s vers $\pm\Delta$, selon le signe de k, on a le résultat. □

Lemme 153 (Fonctions analytiques périodiques) **:**

Soit f une fonction 1-périodique. Elle est analytique réelle ssi il existe $\Delta > 0$ tel que f est la restriction d'une fonction analytique sur A_Δ.

On note alors $\mathcal{C}^\omega_+(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions analytiques réelles, telles que $\delta f(x) := f(x) - x$ est 1-périodique.

Théorème 154 (Arnold, 1961, 1988) **:**

Soient $\theta \in Dioph(\gamma, \alpha)$ et $\Delta > 0$. Alors il existe $\varepsilon(\gamma, \alpha, \Delta) > 0$ qui satisfait la propriété qui suit.

Si $f \in \mathcal{C}^\omega_+(\mathbb{T})$ vérifie $\tau(f) = \theta$ et $\|\delta f - \theta\|_\Delta \leq \varepsilon$, alors elle est conjuguée à r_θ par une fonction analytique $H \in \mathcal{C}^\omega_+(\mathbb{T})$.

Démonstration. L'idée de la démonstration est de procéder itérativement, en partant de $f_0 = f$. On conjugue f_s par $H_s(z) = z + h_s(z)$ pour une fonction h_s bien choisie, pour obtenir ainsi f_{s+1}.

Décomposons les fonctions $f = z + \delta f$, $H = z + h$ et $r_\theta = z + \theta$. Alors $f \circ H = H \circ \theta$ ssi $h(z+\theta) - h(z) = \delta f(z + h(z)) - \theta$. On voudrait obtenir h_s qui satisfait cette équation pour f_s.

On simplifie cette équation en $h(z+\theta) - h(z) = \delta f - c_0$, l'équation cohomologique linéarisée. Pour que cette équation ait une solution, il faut que la valeur moyenne à gauche et à droite coïncide, donc $c_0 = c_0(\delta f)$ est sa valeur moyenne, un de ses coefficients de Fourier.

Plus largement, on obtient h en identifiant les coefficients de Fourier à gauche et à droite. Ainsi, pour $k \in \mathbb{Z}^*$, $c_k(h) = \frac{c_k(\delta f)}{e^{2ik\pi\theta}-1}$.

Avec le lemme admis sur les nombres diophantiens, on a :

$$|c_k(h)| \leq |c_k(\delta f - \theta)| \frac{k^{2+\alpha}}{4\gamma} \leq \|\delta f - \theta\|_\Delta \frac{k^{2+\alpha}}{4\gamma} e^{-2\pi|k|\Delta} \,.$$

Ainsi, avec le lemme suivant, quitte à se restreindre à un domaine $A_{\Delta-\delta}$, on a :

$$\|h\|_{\Delta-\delta} \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(h)| e^{2\pi|k|(\Delta-\delta)} \leq cte \times \|\delta f - \theta\|_\Delta \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} k^{2+\alpha} e^{-2\pi|k|\delta} \leq cte \times \frac{\varepsilon}{\delta^{3+\alpha}} \,.$$

Par un raisonnement analogue, on obtient $\|h'\|_{\Delta-\delta} \leq cte \times \frac{\varepsilon}{\delta^{4+\alpha}}$.

Ainsi, pour ε assez faible, indépendamment de la fonction f donnée, on obtient $\|h\|_{\Delta-\delta} \leq \frac{\delta}{2}$ et $\|h'\|_{\Delta-\delta} \leq \frac{1}{6}$. Ce faisant, on a donc $H = z + h$ une fonction analytique réelle (holomorphe sur $A_{\Delta-\delta}$) telle que $\|H' - 1\|_\infty \leq \frac{1}{6}$ en particulier. C'est donc bien un difféomorphisme analytique croissant.

Soit alors $\widetilde{f} = H^{-1} \circ f \circ H$, qui admet le même nombre de rotation. Si $z \in A_{\Delta-2\delta}$, en déroulant les calculs, on a :

$$f \circ H(z) = H(z+\theta) + c_0(\delta f) + \delta f(z + h(z)) - \delta f(z) \,.$$

On veut alors une information sur $c_0(\delta f)$ et $\eta(z) = \delta f(z + h(z)) - \delta f(z)$. On a l'inégalité $|\eta(z)| \leq \|\delta f'\|_{\Delta-\delta} \|h\|_{\Delta-\delta} \leq cte \times \frac{\varepsilon^2}{\delta^{4+\alpha}}$. D'autre part, remarquons que $\widetilde{f}(a) - a = \theta$ ssi $\widetilde{f}(a) = a + \theta$ ssi $H \circ \widetilde{f}(a) = H(a+\theta)$. Or $H \circ \widetilde{f}(a) = f \circ H(a) = H(a+\theta) + \eta(a) + c_0(\delta f) - \theta$. Dans ce cas, on a donc $|c_0(\delta f) - \theta| \leq |\eta(a)|$ et on peut réutiliser la borne précédente sur η.

Écrivons $f \circ H(z) = H(z+\theta) + \psi(z) = H(w)$ avec $w = \widetilde{f}(z)$. On a $\|\psi\|_{\Delta-2\delta} \leq cte \times \frac{\varepsilon^2}{\delta^{4+\alpha}} \leq \frac{\delta}{6}$ par ce qui précède.

Considérons le chemin $w(t)$ de $w_0 = z + \theta$ à $w_1 = \widetilde{f}(z)$, défini par l'équation fonctionnelle $H(w_t) = H(z+\theta) + t\psi(z)$. Tant que le chemin w reste dans $A_{\Delta-\delta}$, on a $H'(w_t) \times w_t' = \psi(z)$ donc la majoration $|w_t'| \leq \left\|\frac{1}{H'}\right\|_{\Delta-\delta} |\psi(z)| \leq \frac{6}{5} \times \frac{\delta}{6} = \frac{\delta}{5}$. En conséquence, une solution w existe, et $|w_1 - w_0| \leq \frac{\delta}{5}$. Finalement, $w_1 - w_0 = \widetilde{f}(z) - (z+\theta) = \delta\widetilde{f}(z) - \theta$, donc on a l'inégalité $\widetilde{\varepsilon} := \left\|\delta\widetilde{f} - \theta\right\|_{\Delta-2\delta} \leq cte \times \frac{\varepsilon^2}{\delta^{4+\delta}}$. Si ε est assez faible, on peut ainsi garantir $\widetilde{\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Revenons donc à l'idée initiale, celle d'itérer ce processus. Soient $\lambda = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5+\alpha}} < 1$, ainsi que $0 < \delta_0 < \Delta(1-\lambda)$, $\Delta_0 = \Delta$, $\delta_n = \delta_0 \lambda^n$. Itérativement, on a $\Delta_{n+1} = \Delta_n - \delta_n$, de sorte que $\Delta_\infty = \Delta_0 - \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n > 0$. En partant d'un ε_0 assez faible, qui satisfait toutes les inégalités précédentes, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_{n+1} \leq \frac{1}{2}\varepsilon_n$, et $(\varepsilon_n, \delta_n)$ satisfait les différentes inégalités à chaque étape.

Grâce à notre choix de λ, on a alors $\|h_n'\|_{\Delta_{n+1}} \leq \frac{\lambda^n}{6} \to 0$. On peut définir un holomorphisme $H_{0,n} = H_0 \circ \cdots \circ H_n : A_{\Delta_\infty} \to A_{\Delta_0}$. On aimerait finalement que la limite de cette suite soit une fonction H analytique, qui conjugue $f = f_0$ avec Id.

On a $\|H_k' - 1\|_{\Delta_{k+1}} \leq \frac{\lambda^k}{6}$. On vérifie alors que $\left\|H_{0,n}'\right\|_{\Delta_\infty} \leq \prod_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{\lambda^k}{6}\right) \leq \exp\left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{1-\lambda}\right)$. Plus largement, sur un domaine adapté, $\left\|H_{m,n}' - 1\right\|_\infty \leq \exp\left(\frac{\lambda^n}{6(1-\lambda)}\right) - 1 \to 0$. On peut donc bien définir une fonction limite H, holomorphe sur A_{Δ_∞}, telle que $H \in \mathcal{C}_+^\omega(\mathbb{T})$.

On a $f \circ H_{0,n} = H_{0,n} \circ f_n$. Comme $\|\delta f_n - \theta\|_{\Delta_\infty} \to 0$, on a donc $f_n \to r_\theta$ uniformément sur A_{Δ_∞}. en passant à la limite, on a en fait $f \circ H = H \circ r_\theta$ sur ce domaine. □

Lemme 155 :
Soient $\beta \geq 0$ et $0 < \delta < \delta_0$. Alors il existe une constante $C(\beta, \delta_0) > 0$ telle que :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^\beta e^{-2\pi|k|\delta} \leq \frac{C}{\delta^{\beta+1}} .$$

Démonstration. Admis. □