Calcul de Malliavin

Léo Gayral

Ces notes sont basées sur le cours de Laurent Decreusefond.

Table des matières

1 Espace de Wiener

1.1 Variables gaussiennes

Rappelons que la transformée de $X \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$, où $\Gamma \in S_d(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique, vérifie $\mathbb{E}\big[e^{i\langle \xi, X\rangle}\big] = \exp\big(i\langle \xi, m\rangle - \frac{1}{2}\xi^T\Gamma\xi\big)$, ce qui caractérise la loi.

Proposition 1 :
Soient $X \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$ dans $\mathbb{R}^d$, $B \in \mathbb{R}^p$ et $A \in M_{p,d}(\mathbb{R})$. Alors $AX + B \sim \mathcal{N}\big(Am + B, A\Gamma A^T\big)$ dans $\mathbb{R}^p$.

La matrice de covariance est diagonalisable dans une base orthonormale. En outre, si la matrice est positive (coefficient par coefficient), alors ses valeurs propres sont positives également.

Proposition 2 :
Si $\Gamma \in S_n^+(\mathbb{R})$ est symétrique, et $X \sim \mathcal{N}(0, I_n)$, alors $\sqrt{\Gamma}X \sim \mathcal{N}(0, \Gamma)$.

Proposition 3 :
Soit (X, Y) un vecteur gaussien. On a X et Y indépendants ssi, pour tous indices i et j convenables, on a $\mathrm{Cov}(X_i, Y_j) = 0$.

Démonstration. Le sens direct est évident. Pour le sens réciproque, remarquons que la matrice du vecteur gaussien est diagonale par blocs dans ce cas. On vérifie alors que la transformée de Fourier du couple est le produit de leurs transformées de Fourier, donc les variables sont indépendantes. $\square$

Théorème 4 :
Si une suite de gaussiennes (X_n) converge en loi, alors la limite X est encore gaussienne.

1.2 Mouvement brownien

Définition 5 (Processus gaussien) **:**
Un processus gaussien est une famille de variables $(B_i)_{i \in I}$ tel que toute sous-famille finie est un vecteur gaussien.

Définition 6 :

Le mouvement brownien est l'unique processus gaussien centré B, indexé par $\mathbb{R}^+$ et tel que, pour tous $s, t \in \mathbb{R}^+$, on a $\mathbb{E}[B_s B_t] = \min(s,t)$.

Remarque 7 :

Le mouvement brownien B est un processus à accroissements indépendants stationnaire (PAIS), une martingale de crochet t, à trajectoires localement $\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)$-Hölder, à variations infinies (donc non différentiables), mais à 2-variations finies :

$$\sup_{p \in \mathbb{N}, 0=t_0<\cdots<t_p=t} \sum \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2 < \infty\,.$$

Selon les propriétés mises en valeur, on aboutit naturellement au calcul d'Itô, ou bien à l'étude des trajectoires rugueuses (*rough paths*).

Pour introduire le calcul de Malliavin, on se concentrera sur les propriétés des PAIS.

Remarque 8 (Construction du mouvement brownien) **:**

On peut construire le mouvement brownien par le théorème de Donsker, en tant que limite en loi des $B_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_i$ (avec une famille $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ iid).

On obtient à la limite une mesure Wiener sur les fonctions càdlàg. Il s'avère après coup que la mesure limite est supportée par les fonctions continues, mais ce n'est pas a évident a priori.

1.3 Construction d'Itô-Nisio

Définition 9 (Espace de Slobodetzky) **:**

Soient $\alpha \in [0,1]$ et $p \geq 1$.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable. On dit que $f \in W_{\alpha,p}$ lorsque :

$$\|f\|_{W_{\alpha,p}}^p := \int_0^1 \int_0^1 \frac{|f(t) - f(s)|^p}{|t-s|^{1+\alpha p}} < \infty\,.$$

Théorème 10 (Inclusions de Sobolev) **:**

Notons $\mathrm{Hold}(\alpha)$ l'espace des fonctions α-Hölder sur $[0,1]$.

On a naturellement l'injection $\mathrm{Hold}(\alpha) \subset W_{\alpha',p}$ pour tout $p \geq 1$ et tout $\alpha' < \alpha$.

Inversement, si $\alpha p > 1$, alors $W_{\alpha,p} \subset \mathrm{Hold}\Big(\alpha - \frac{1}{p}\Big)$.

Démonstration. Admis. □

Remarque 11 :

On peut exploiter cette inclusion pour prouver le lemme de Kolmogorov, qui dit que si on a $\mathbb{E}[|X_t - X_s|^p] \leq c|t-s|^\gamma$, avec $\gamma > \alpha p > 1$, alors X admet une modification à trajectoires continues.

En exploitant cette formule, on montre facilement que les trajectoires de X sont presque-sûrement dans l'espace $W_{\alpha,p}$, donc dans $\mathrm{Hold}\left(\alpha - \frac{1}{p}\right)$ par injection de Sobolev, ce qui donne le résultat voulu.

Définition 12 (Espace de Cameron-Martin) **:**

Posons H l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$, nulles en 0, primitives de fonctions $\dot{f} \in L^2$.

L'application $f \mapsto \dot{f}$ est une bijection linéaire entre H et L^2. On peut donc définir une norme sur H qui fait de cette application une isométrie. Ainsi, $\langle f, g \rangle_H = \left\langle \dot{f}, \dot{g} \right\rangle_{L^2} = \int\limits_0^1 \dot{f}(x)\dot{g}(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque 13 :

On s'abstiendra pour l'instant d'identifier H à L^2, ce qui pourrait porter à confusion. Malgré tout, une base orthonormale de L^2 se relève en base orthonormale de H.

Ainsi, $h_0(t) = t$ et les $h_m(t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi m}\sin(\pi m t)$ forment une base orthonormale de H.

Théorème 14 (Théorème d'Itô-Nisio) **:**

Soient $X_m \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$. Définissons le processus $S_n(t) = \sum\limits_{m=1}^{n} X_m h_m(t)$.

Alors S_n converge presque-sûrement dans $W_{\alpha,p}$, pour tous α et p tels que $0 < \alpha - \frac{1}{p}$ et $\alpha < \frac{1}{2}$. On note alors B sa limite.

Démonstration. On vérifie aisément que S_n est une martingale discrète à valeurs dans un Banach. Par inégalité de Doob, on a donc :

$$\mathbb{E}[T_M^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{m \geq M} \mathbb{E}\left[\|S_n - S_M\|_{W_{\alpha,p}}^p\right].$$

Par le théorème de Fubini, à m fixé :

$$\mathbb{E}\left[\|S_n - S_M\|_{W_{\alpha,p}}^p\right] = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{1}{|t-s|^{1+\alpha p}} \mathbb{E}\left[\left|\sum_{m=M+1}^{n} X_m(h_m(t) - h_m(s))\right|^p\right] \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,.$$

Il ne reste alors plus qu'une gaussienne centrée dans l'espérance, de variance σ^2, dont le moment d'ordre p est proportionnel à σ^p. Reste donc à estimer σ^2 pour conclure. Comme on somme des gaussiennes *indépendantes*, on a :

$$\sigma^2 = \mathbb{E}\left[\left|\sum_{m=M+1}^{n} X_m(h_m(t) - h_m(s))\right|^2\right] = \sum_{m=M+1}^{n} (h_m(t) - h_m(s))^2 \,.$$

et cette somme de termes positifs est majorable en remplaçant n par ∞. Mises bout-à-bout, ces majorations aboutissent en :

$$\mathbb{E}[T_M^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{|t-s|^{1+\alpha p}} \sqrt{\sum_{m=M+1}^{\infty} (h_m(t) - h_m(s))^2}^{\,p} \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \,.$$

Remarquons alors que, en tant que primitive, on a $h_m(t) = \left\langle \overset{\bullet}{h}_m, \mathbb{1}_{[0,t]} \right\rangle_{L^2}$. Autrement dit, pour $s < t$, on peut écrire $h_m(t) - h_m(s) = \left\langle \overset{\bullet}{h}_m, \mathbb{1}_{]s,t]} \right\rangle_{L^2}^2$. Quitte à commencer la somme au rang 1, par la formule de Parseval, $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \left\langle \overset{\bullet}{h}_m, \mathbb{1}_{]s,t]} \right\rangle_{L^2}^2 = \left\|\mathbb{1}_{]s,t]}\right\|_{L^2}^2 = t - s$. La somme des carrés converge donc vers 0, et est dominée par $t-s$. On s'intéresse à l'intégrabilité de :

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{|t-s|^{1+\alpha p}} \sqrt{|t-s|}^{\,p} \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \,.$$

Ce terme est élevé à la puissance $\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)p - 1$, et donc est intégrable ssi $\alpha < \frac{1}{2}$.

Dans ce cas, par convergence dominée, T_M converge vers 0 dans L^p, donc en probabilités, et on conclut par le lemme ci-après. □

Lemme 15 :

Notons $T_M = \sup\limits_{n \geq M} \|S_n - S_M\|_{W_{\alpha,p}}$, et $\omega_M = \sup\limits_{n \geq M} T_n$.

Si $T_M \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, alors (S_n) converge p.s.

Démonstration. Par inégalité triangulaire, si $T_M \leq \varepsilon$, alors $\omega_M \leq 2\varepsilon$.

Comme T_M converge en probabilité vers 0, par l'inclusion sus-citée, c'est aussi le cas de ω_M. Quitte à extraire, on a la convergence presque-sûre vers 0 pour une sous-suite.

En outre, la suite ω est monotone, décroissante. On en déduit donc que, presque-sûrement, $\omega_M \to 0$, et donc que sous cet évènement, S est une suite de Cauchy, converge. □

Corollaire 16 :

Le processus B est un mouvement brownien.

Démonstration. La convergence précédente nous garantit que les sous-familles finies de B sont des vecteurs gaussiens, en tant que limites en lois de vecteurs gaussiens, donc B est un processus gaussien. En outre :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[B_t B_s] &= \sum_{m,k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[X_m X_k] h_m(t) h_k(s) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}} h_m(t) h_m(s) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \left\langle \overset{\bullet}{h}_m, \mathbb{1}_{[0,t]} \right\rangle_{L^2} \left\langle \overset{\bullet}{h}_m, \mathbb{1}_{[0,s]} \right\rangle_{L^2} \\
&= \left\langle \mathbb{1}_{[0,t]}, \mathbb{1}_{[0,s]} \right\rangle_{L^2} \\
&= \min(s,t)\,.
\end{aligned}$$

On a la bonne covariance, donc B est bien un mouvement brownien. □

Définition 17 (Transformée de Fourier d'une mesure) **:**

Soit μ une mesure sur un Banach W, et W^* son dual topologique. Pour $z \in W^*$, on pose $\Phi_\mu(z) = \int\limits_W e^{i\langle z,\omega\rangle_W}\, \mathrm{d}\mu(\omega)$.

Théorème 18 :

L'application $\mu \mapsto \Phi_\mu$ est une injection.

Remarque 19 :

Identifions désormais le Hilbert H à son dual H^*. On a une injection naturelle $e : H \to W$ avec l'identité. Notons $I : L^2 \to H$ l'opérateur d'intégration, qui a une fonction associe sa primitive. Comment se comporte l'application duale $e^* : W^* \to H$ après identification ?

Soit par exemple $\varepsilon_a \in W^*$ qui correspond à l'évaluation en a des fonctions de W. Dans ce cas, $\langle e^*(\varepsilon_a), h\rangle_W = \langle \varepsilon_a, e(h)\rangle_W = h(a) = \left\langle \overset{\bullet}{h}, \mathbb{1}_{[0,a]} \right\rangle_{L^2} = \left\langle h, I\big(\mathbb{1}_{[0,a]}\big)\right\rangle_H$. On a donc autrement dit $e^*(\varepsilon_a) = I\big(\mathbb{1}_{[0,a]}\big) = t \wedge a$.

Théorème 20 :

On a $\mathbb{E}\big[e^{i\langle z,B\rangle_W}\big] = \exp\big(-\frac{1}{2}\|e^*(z)\|_H^2\big)$.

Démonstration. On exprime B comme somme des $X_n \times e(h_n)$, dans W. Par convergence dominée :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[e^{i\langle z,B\rangle_W}\big] &= \lim \prod_{n=1}^{N} \mathbb{E}\big[e^{iX_n\langle z,e(h_n)\rangle}\big] \\
&= \lim \prod_{n=1}^{N} \exp\big(-\tfrac{1}{2}\langle z, e(h_m)\rangle^2\big) \\
&= \exp\left(-\tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \langle z, e(h_m)\rangle_W^2\right) \\
&= \exp\left(-\tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \langle e^*(z), h_m\rangle_H^2\right),
\end{aligned}$$

et on conclut par la formule de Parseval. □

En particulier, on vérifie que $\mathbb{E}\left[e^{iB(a)}\right] = e^{-\frac{1}{2}a^2}$.

1.4 Intégrale de Wiener

Les polynômes sont inclus dans H, et denses dans $\mathcal{C}^0$ par le théorème de Stone-Weierstrass. En conséquence, H est dense dans les espaces W, donc inversement l'image $e^*(W^*)$ est dense dans H.

Soit alors $\delta : e^*(W^*) \to L^2$ telle que $\delta(e^*(z)) = \langle z, B\rangle_W$. On a ainsi $\langle z, B\rangle \sim \mathcal{N}\big(0, \|e^*(z)\|_H^2\big)$. La norme de cette variable aléatoire (centrée) dans L^2 est égale à la norme du terme de gauche dans H.

Par densité, on peut donc prolonger δ en une isométrie de H dans L^2. Ce faisant, on nomme intégrale de Wiener cette extension.

Remarquons en particulier que $\delta\big(I\big(\mathbb{1}_{[0,a]}\big)\big) = \delta(a \wedge \cdot) = \langle \varepsilon_a, B\rangle = B(a) = \int \mathbb{1}_{[0,a]} \,\mathrm{d}B_s$. Plus largement, pour tout $h \in H$, on a $\delta(h) = \int \dot{h}(s) \,\mathrm{d}B_s$. Ceci justifie en qui l'intégrale de Wiener peut être vue comme un cas particulier de la formule d'Itô.

2 Formule de Cameron-Martin

Remarque 21 :
Soient $X \sim \mathcal{N}(m, 1)$ et $Y \sim \imath, \infty$. On vérifie que $\mathbb{E}[\varphi(X)] = \mathbb{E}[\varphi(Y)L(Y)]$ avec la fonction $L(y) = e^{ym - y^2/2}$. Autrement dit, $\mathbb{P}_X \ll \mathbb{P}_Y$, et L et $\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_X}{\mathrm{d}\mathbb{P}_Y} = L$.

Théorème 22 (Cameron-Martin) **:**
Si $h \in H$ est dans l'espace de Cameron-Martin, alors la loi de $B + h$ est absolument continue par rapport à celle de B. Plus précisément, pour toute fonction F positive mesurable :

$$\mathbb{E}[F(B+h)] = \mathbb{E}\left[F(B)\exp\left(\delta(h) - \frac{\|h\|_H^2}{2}\right)\right],$$

où $\delta(h)$ est l'intégrale de Wiener de h.

Démonstration. Soit $T_h : w \mapsto w + h$ une bijection sur W. Comme l'application T_h est une bijection bimesurable, d'inverse T_{-h}, on veut de façon équivalente montrer que la mesure image $T_{-h}(L\,\mathrm{d}\mu)$ est égale à μ, avec $L = e^{\delta(h) - \frac{\|h\|_H^2}{2}}$. Une nouvelle façon de réécrire le résultat attendu est donc :

$$\mathbb{E}\left[e^{i\langle z, T_{-h}(B)\rangle} L\right] = e^{-\frac{1}{2}\|e^*(z)\|_H^2},$$

et ce pour tout $z \in W^*$.

On peut réécrire le terme de gauche sous la forme :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{i\langle z,B\rangle - i\langle z,h\rangle} e^{\delta h(B)} - \frac{\|h\|_H^2}{2}\right] &= \mathbb{E}[\exp(i\delta(e^*(z) - ih)(B))]e^{-i\langle z,h\rangle - \frac{1}{2}\|h\|^2} \\
&= \exp\left(-\tfrac{1}{2}\|e^*(z) - ih\|_H^2 - i\langle z,h\rangle - \tfrac{1}{2}\|h\|^2\right) \\
&= \exp\left(-\tfrac{1}{2}\|e^*(z)\|_H^2\right),
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. $\square$

Corollaire 23 :
On a vu que $T_h(\mu)$ est absolument continue par rapport à μ. En conséquence, lorsque $F = G$ est vérifiée μ-p.s., on a pour toute fonction $h \in H$ l'égalité $F(\cdot + h) = G(\cdot + h)$ vérifiée μ-p.s. également. Autrement dit, pour de telles fonctions, on peut donner un sens à $\frac{F(w+\varepsilon h) - F(w)}{\varepsilon}$.

2.1 Fonctions cylindriques

Définition 24 (Fonctions cylindriques) **:**

On note S l'ensemble des fonctions $F : W \to \mathbb{R}$ qu'on peut écrire sous la forme $f(\delta h_1, \ldots, \delta h_n)$, avec $h_i \in H$ des fonctions dans l'espace de Cameron-Martin, et $f \in Schwartz(\mathbb{R}^n)$ une fonction infiniment dérivable, à décroissance rapide en l'infini.

Remarque 25 :

Rappelons que, si ε_t correspond à l'évaluation d'une fonction en t, alors $e^*(\varepsilon_t) = (x \mapsto t \wedge x)$. En particulier, $\langle e^*(\varepsilon_t), B\rangle_H = B(t)$. On a donc $B(t) = \delta(t \wedge \cdot)$.

Lemme 26 :

L'espace S est dense dans $L^p(W, \mu)$.

Démonstration. Soit $D_n = \left\{\frac{k}{2^n}, 0 \leq k \leq 2^n\right\}$. On définit les tribus $\mathcal{F}_n = \sigma(B_t, t \in D_n)$, qui forment une filtration croissante. En particulier, par continuité de B, la limite de cette filtration est $\mathcal{F} = \sigma(B)$.

Si $F \in L^p$ pour $p > 1$, alors $F_n = \mathbb{E}[F|\mathcal{F}_n]$ est une martingale fermée, qui converge vers F dans L^p et presque-sûrement. On a $F_n = \psi_n(B_t, t \in D_n)$. Notons μ_n la loi induite par μ sur D_n. On a naturellement $\mu(|\psi_n|^p) = \mathbb{E}[|F_n|^p] \leq \mathbb{E}[|F|^p] < \infty$ par inégalité de Jensen.

On utilise alors la densité en dimension finie des espaces de Schwartz dans les L^p, avec $f_n : \mathbb{R}^{2^n} \to \mathbb{R}$ régulière à décroissance rapide, qui approche ψ_n à ε près. Autrement dit, $\mathbb{E}[|f_n(B_t, t \in D_n) - F|^p]^{\frac{1}{p}} \leq 2\varepsilon$ à partir d'un rang, d'où la densité voulue. □

Définition 27 :

Soit $F \in S$. On définit son gradient comme $\nabla F = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(\delta h_1, \ldots, \delta h_n) \times h_i \in H$. Autrement dit, ce gradient est défini comme l'élément de H tel que, pour tout $h \in H$, on a l'égalité $\langle \nabla F, h\rangle_H = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(\delta h_1, \ldots, \delta h_n) \times \langle h_i, h\rangle_H$.

Remarque 28 :

Lorsque $k \in H$, on a $\delta h(w + k) = \delta h(w) + \langle h, k\rangle_H$.

Lemme 29 :

Si $F \in S$, alors $\langle \nabla F, h\rangle_H = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{F(w+\varepsilon h)-F(w)}{\varepsilon}$.

Démonstration. On a $F(w+\varepsilon h) = f(\delta h_1(w + \varepsilon h), \ldots, \delta h_n(w + \varepsilon_h)) = f(\delta h_1(w) + \varepsilon\langle h, k\rangle_H, \ldots)$. Quitte à prendre la dérivée selon ε, on obtient le résultat souhaité. □

Remarque 30 :

Soit $F = B(t) = \delta(t \wedge \cdot)$. Alors $\nabla F = t \wedge \cdot$. En conséquence, $\langle \nabla F, h \rangle_H = \int_0^t \cdot h(s)\,\mathrm{d}s = h(t)$.

Lemme 31 :

Soient $F, G \in S$ et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors d'une part $\nabla(FG) = F\nabla(G) + G\nabla(F)$, et d'autre part $\nabla(\varphi(F)) = \varphi'(F)\nabla(F)$.

Remarque 32 :

En fait, ∇F est une variable aléatoire, à valeurs dans H. En conséquence, pour tout ω, on a $\nabla F(\omega) \in H$, qui admet une fonction $s \mapsto \dot{\nabla}_s F(\omega)$ telle que :

$$\langle \nabla F(\omega), h \rangle_H = \int_0^1 \dot{\nabla}_s F(\omega) \dot{h}(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

En conséquence, on a ainsi une application $\dot{\nabla} F : W \to L^2$, et donc $\nabla F : W \to H$.

2.2 Produit tensoriel d'espaces de Banach

Définition 33 :

Soit X un Banach, et (E, μ) un espace mesuré.

On a $f \in L^p(E \to X, \mu)$ lorsque $\int_E \|f(e)\|_X^p\,\mathrm{d}\mu(x) < \infty$.

Remarque 34 :

Soient X et Y deux Banach, et X^* et Y^* les espaces duaux. Naturellement, $x \otimes y$ peut être vue comme une forme bilinéaire sur $X^* \times Y^*$, via $(x \otimes y)(f, g) = \langle f, x \rangle_X \langle g, y \rangle_Y = f(x)g(y)$.

En particulier, dans le cas où $X = L^2(E, \mu)$ et $Y = L^2(F, \nu)$ s'identifient à leurs espaces duaux, on a $(x \otimes y)(f, g) = \int_X \int_Y x(s)y(t) \times f(s)g(t)\,\mathrm{d}\mu(s)\,\mathrm{d}\nu(t)$.

Définition 35 :

On note $X \otimes Y$ le complété de l'espace engendré par les $x \otimes y$, pour la norme :

$$\|z\|_{X \otimes Y} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\|_X \|y_i\|_Y,\ n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in X,\ y_1, \ldots y_n \in Y,\ z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\}.$$

Théorème 36 :
Rappelons que X est réflexif lorsque $(X^*)^* = X$. Supposons X et Y réflexifs. On a alors $W^* = (X \otimes Y)^* = X^* \otimes Y^*$. En outre, $\|w^*\|_{W^*} = \sup_{\|w\|=1} |\langle w^*, w\rangle| = \sup_{\|x\|_X = \|y\|_Y = 1} |\langle w^*, x \otimes y\rangle|$.

Théorème 37 :
Soit X un espace de Banach. On a un isomorphisme naturel entre $L^p(E \to \mathbb{R}, \mu) \otimes X$ et $L^p(E \to X, \mu)$. Si $X = L^p(F \to \mathbb{R}, \nu)$, alors cet isomorphisme correspond à $L^p(E \times F, \mu \otimes \nu)$.

Revenons-en au cas particulier qui nous intéresse.

Théorème 38 :
Soit $F \in S$. Alors on a les propriétés suivantes, équivalentes :

1. $\nabla F \in L^p(W \to H, \mu)$,
2. $\mathbb{E}[\|\nabla F\|_H^p] < \infty$,
3. $\mathbb{E}\left[\left\|\dot{\nabla} F\right\|_{L^2}^p\right] < \infty$.

Démonstration. Remarquons que $L^p(W \to H, \mu)$ s'identifie à $L^p(W, \mu) \otimes H$, et donc par dualité, pour $1 < p < \infty$, $(L^p(W, \mu) \otimes H)^*$ s'identifie à $L^q(W, \mu) \otimes H$. Il en découle que :

$$\|w\|_{L^p(W \to X)} = \sup\{|\langle w, G \otimes h\rangle|,\ G \in L^q(W, \mu),\ h \in H,\ \mathbb{E}[|G|^q] = \|h\|_H = 1\}.$$

On un tel choix de h et G, on peut écrire :

$$\langle \nabla F, h \otimes G\rangle = \mathbb{E}[\langle \nabla F, h\rangle_H G].$$

On conclut alors par un calcul direct. Ainsi, si $F = f(\delta k)$, et donc $\nabla F = f'(\delta k) k$:

$$|\mathbb{E}[\langle \nabla F, h\rangle_H G]| = |\mathbb{E}[f'(\delta k) G]| \times |\langle k, h\rangle_H| \leq \|f'\|_\infty \|k\|_H,$$

par inégalité de Cauchy-Schwarz. Ceci conclut la preuve. □

Définition 39 (Opérateur fermable) **:**
Un opérateur T est dit fermable lorsque, si $x_n \to 0$ et $T(x_n) \to \eta$, on a forcément $\eta = 0$.

Théorème 40 (Formule d'intégration par parties) **:**
Soient $F, G \in S$, et $h \in H$. On a :

$$\mathbb{E}[FG\delta h] = \mathbb{E}[G\langle \nabla F, h\rangle_H] + \mathbb{E}[F\langle \nabla G, h\rangle_H].$$

Démonstration. Par la formule de Cameron-Martin :

$$\mathbb{E}[F(B+\varepsilon h)G(B+\varepsilon h)] = \mathbb{E}\left[FGe^{\varepsilon\delta h - \frac{\varepsilon^2}{2}\|h\|_H^2}\right].$$

Si on dérive selon ε, puis qu'on évalue en $\varepsilon = 0$, on obtient précisément le résultat attendu. $\square$

Proposition 41 :

L'opérateur $\nabla : S \subset L^p(W,\mu) \to L^p(W \to H, \mu)$ est fermable.

Démonstration. Soit $F_n \xrightarrow{L^p} 0$, tel que $\nabla F_n \xrightarrow{L^p(W\to H)} \eta$. On a $\eta = 0$ ssi, pour tous $h \in H$ et $G \in L^q(W)$, $\langle \eta, h \otimes G\rangle = \mathbb{E}[\langle \eta, h\rangle_H G] = 0$. Cette espérance est en outre égale à la limite des $\mathbb{E}[\langle \nabla F_n, h\rangle G] = \mathbb{E}[F_n(G\delta h - \langle \nabla G, h\rangle)]$, qui converge vers 0 car $F_n \to 0$. $\square$

Corollaire 42 :

On peut donc définir $\mathbb{D}_{q,1}$ comme le complété de S pour la norme :

$$\|F\|_{p,1} = \|F\|_{L^p(W)} + \|\nabla F\|_{L^p(W\to H)}.$$

Théorème 43 :

Si $F_n \xrightarrow{L^p(W)} F$, et que $\sup \|\nabla F_n\|_{L^p(W\to H)} < \infty$, alors à la limite on a $F \in \mathbb{D}_{p,1}$.

Théorème 44 :

Si $F \in \mathbb{D}_{p,1}$ et $G \in \mathbb{D}_{q,1}$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, Alors $FG \in \mathbb{D}_{r,1}$, et $\nabla(FG) = F\nabla G + G\nabla F$.

2.3 Gradient et échelle temporelle

Naturellement, $\nabla_s(B(t)) = t \wedge s$. Donc $\nabla_s(\dot{B}(t)) = \mathbb{1}_{[0,t]}(s)$. Plus largement, si on considère $t_1 < \cdots < t_n = t$, on a $\dot{\nabla}_s f(B(t_1), \ldots, B(t_n))$ nulle en dehors de $[0,t]$. On aimerait donc établir un lien entre le fait pour ∇F d'être nul en dehors d'un intervalle de temps et la mesurabilité selon une tribu associée.

Remarque 45 :

Soient $\dot{\Pi}_t = \mathbb{1}_{[0,t]}$, et $\Pi_t : H \to H$ défini via $\Pi_t(h) = I'\left(\dot{\Pi}_t\dot{h}\right)$. Ainsi :

$$\Pi_t(s \wedge \cdot) = I'(\mathbb{1}[0,t])\mathbb{1}_{[0,s]} = (s \wedge t) \wedge \cdot\,.$$

Théorème 46 :

Soit $F \in \mathbb{D}_{p,1}$. On note $\mathcal{F}_t = \sigma(w(s),\, s \leq t)$.

Alors $\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_t] \in \mathbb{D}_{p,1}$, et $\nabla\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_t] = \Pi_t(\mathbb{E}[\nabla F|\mathcal{F}_t])$.

En particulier, si $F \in \mathcal{F}_t$, on a $\overset{\bullet}{\nabla} F$ qui a son support dans $[0, t]$.

Démonstration. On s'intéresse ici au cas particulier où $F = f(B(t_1), B(t_2))$ avec $t_1 < t < t_2$. On a donc :

$$\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[f(B(t_1), B(t) + (B(t_2) - B(t)))|\mathcal{F}_t] = \int f(B(t_1), B(t) + x) p_{t_2 - t}(x) \, \mathrm{d}x \,,$$

où p_{t_2-t} est la densité de $B(t_2) - B(t)$. La fonction $\widetilde{f}(u, v) = \int f(u, v + x) p_{t_2-t}(x) \, \mathrm{d}x$ est dans l'espace de Schwarz en tant que convolution. En outre :

$$\nabla \mathbb{E}[F|\mathcal{F}_t] = \nabla \widetilde{f}(B(t_1), B(t)) = \partial_1 \widetilde{f}(B(t_1), t) \times (t_1 \wedge \cdot) + \partial_2 \widetilde{f}(B(t_1), t) \times (t \wedge \cdot) \,.$$

Par un calcul analogue, en partant de l'autre terme, on obtient la même expression mais avec des $\widetilde{\partial_i f}$. Compte tenu de la définition de $f \mapsto \widetilde{f}$, cette opération commute avec les dérivations partielles, ce qui conclut la preuve. □

Remarque 47 :

On veut désormais établir un lien entre l'intégrale de Wiener et le gradient, lorsque $\overset{\bullet}{u} \in L^2$.

Supposons pour l'instant $\overset{\bullet}{u}_s = \sum_{j=1}^{n} \overset{\bullet}{u}_i \mathbb{1}_{]a_i, b_i]}(s)$, avec $\overset{\bullet}{u}_i \in \mathcal{F}_{a_i}$, et $b_i \leq a_{i+1} < b_{i+1}$. On a alors $\int \overset{\bullet}{u}_s \, \mathrm{d}B_s = \sum_{i=1}^{n} \overset{\bullet}{u}_i (B(b_i) - B(a_i))$. Il faut alors que, pour tout s, le gradient $\nabla \overset{\bullet}{u}_s$ existe et soit intégrable. On prend ainsi $\overset{\bullet}{u}$ adapté, tel que :

$$\mathbb{E}\left[\int \overset{\bullet}{u}_s^{\,2} \, \mathrm{d}s\right] + \mathbb{E}\left[\int \left|\overset{\bullet}{\nabla}_r \overset{\bullet}{u}_s\right|^2 \mathrm{d}r \, \mathrm{d}s\right] < \infty \,.$$

Le terme de droite est une réécriture de l'intégrale de $\left\|\nabla \overset{\bullet}{u}_s\right\|_H^2 \mathrm{d}s$.

Définition 48 (Divergence) **:**

On a vu $\nabla : \mathbb{D}_{p,1} \subset L^p(W \to \mathbb{R}, \mu) \to L^p(W \to H, \mu)$ comme une application linéaire continue, entre deux espaces de Banach. Par dualité, on peut définir le gradient dual ∇^*, la divergence, définie sur un sous-espace de $L^q(W \to H, \mu)$.

On pose $Dom_q(\nabla^*) = \{U : W \to H, \exists C_p(U), \forall F \in \mathbb{D}_{q,1}, |\mathbb{E}[\langle \nabla F, U\rangle_H]| \leq C_p(U) \times \|F\|_{L^q}\}$. Dans ce cas, on peut étendre l'application $F \in \mathbb{D}_{q,1} \mapsto \langle \nabla F, U\rangle_H \in L^1(W \to R, \mu)$ par densité. On obtient ainsi une forme linéaire sur L^q, donc on peut définir un élément $\nabla^* U \in L^p$ associé. En outre, on a $\mathbb{E}[\langle \nabla F, U\rangle_H] = \mathbb{E}[F\nabla^* U]$.

Remarque 49 :

Soit en particulier $U : W \to H$ constante, égale à $h \in H$. Par ce qui précède, on a alors $\mathbb{E}[F\delta h] = \mathbb{E}[\langle \nabla F, h\rangle] = \mathbb{E}[F\nabla^* h]$. Ainsi, $\nabla^* h = \delta h$ dans ce cas, donc la divergence coïncide avec l'intégrale de Wiener. On notera désormais δ au lieu de ∇^*.

Par la formule d'Itô, on a $\delta h = \int \dot{h} \, \mathrm{d}B_s$. En partant du processus $U : W \to H$, et $\dot{U} : W \to L^2$, a-t-on $\delta U = \int \dot{U} \, \mathrm{d}B_s$?

Théorème 50 :

Soient $U \in Dom_p(\delta)$, et $a \in L^q(W \to \mathbb{R}, \mu) \cap \mathbb{D}_{q,1}$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.

Alors $aU \in Dom_r(\delta)$, et $\delta(aU) = a\delta(U) - \langle \nabla a, U\rangle_H$.

Démonstration. Commençons par vérifier que l'expression proposée pour $\delta(aU)$ est bien dans L^r. On a $\mathbb{E}[|a\delta(U)|^r]^{\frac{1}{r}} \leq \mathbb{E}[|a|^q]^{\frac{1}{q}}\mathbb{E}[|\delta(U)|^p]^{\frac{1}{p}}$. De même, $\mathbb{E}[|\langle \nabla a, U\rangle_H|^r]^{\frac{1}{r}} \leq \mathbb{E}[\|\nabla a\|_H^q]^{\frac{1}{q}}\mathbb{E}[\|U\|_H^p]^{\frac{1}{p}}$.

Considérons r^* tel que $\frac{1}{r^*} + \frac{1}{r} = 1$. En prenant $F \in L^r$ une fonction dans l'espace de Schwartz, on a :

$$\mathbb{E}[F\delta(aU)] = \mathbb{E}[\langle \nabla F, aU\rangle_H] = \mathbb{E}\left[\int \dot{\nabla}_s(F) a\dot{U}_s \, \mathrm{d}s\right],$$

or $\dot{\nabla}_s(F)a = \dot{\nabla}_s(aF) - F\dot{\nabla}_s(a)$ donc $\mathbb{E}[F\delta(aU)] = \mathbb{E}[\langle \nabla(aF), U\rangle_H] - \mathbb{E}[F\langle \nabla a, U\rangle_H]$. En outre, avec une IPP supplémentaire, le terme de gauche devient $\mathbb{E}[aF\delta(U)]$. Par identification, on a donc bien $\delta(aU) = a\delta(U) - \langle \nabla a, U\rangle_H$. □

Remarque 51 :

Soit $U \in \mathbb{D}_{2,1}^a(H)$, avec une dérivée $\dot{U} : W \to L^2$ telle que $U_t(\omega) = \int_0^t \dot{U}_s(\omega) \, \mathrm{d}s$. Il est équivalent de prendre $U \in D_{2,1}^a(H)$ et d'exiger $\dot{U}$ adapté avec $\mathbb{E}\left[\int_0^1 \dot{U}_s(\omega)^2 \, \mathrm{d}s\right] < \infty$.

Auquel cas, l'intégrale $\int \overset{\bullet}{U}_s \, \mathrm{d}B_s$ est bien définie au sens d'Itô.

Théorème 52 :
On a $\delta(U) = \int\limits_0^1 \overset{\bullet}{U}_s \, \mathrm{d}B_s$.

Démonstration. Par densité, il suffit de montrer la relation lorsque $\overset{\bullet}{U}_s = \overset{\bullet}{U}_a \mathbb{1}_{]a,b]}(s)$, en supposant $U_a \in \mathbb{D}_{2,1}$ et $U_a \in \mathcal{F}_a$.

Dans ce cas, on a $U = \overset{\bullet}{U}_a(b \wedge \cdot - a \wedge \cdot)$, avec U_a une variable aléatoire et le terme de droite une fonction dans H, déterministe. En conséquence, $\delta(U) = \overset{\bullet}{U}_a \delta(b \wedge \cdot - a \wedge \cdot) - \left\langle \nabla \overset{\bullet}{U}_a, b \wedge \cdot - a \wedge \cdot \right\rangle_H$. On a :

$$\delta(b \wedge \cdot - a \wedge \cdot) = B(b) - B(a) = \int\limits_a^b \mathrm{d}B_s \,,$$

d'où $\overset{\bullet}{U}_a \delta(b \wedge \cdot - a \wedge \cdot) = \int\limits_a^b \overset{\bullet}{U}_a \, \mathrm{d}B_s = \int\limits_0^1 \overset{\bullet}{U}_s \, \mathrm{d}B_s$. D'autre part :

$$\left\langle \nabla \left(\overset{\bullet}{U}_a \right), b \wedge \cdot - a \wedge \cdot \right\rangle_H = \int\limits_0^1 \overset{\bullet}{\nabla}_s \overset{\bullet}{U}_a \mathbb{1}_{]a,b]}(s) \, \mathrm{d}s = 0 \,,$$

ce qui conclut la preuve. □

3 Chaos de Wiener

3.1 Opérateurs compacts

Définition 53 (Opérateur compact) **:**
Soit $A : H_1 \to H_2$ un opérateur entre espaces de Hilbert. On dit que A est compact si l'image de $B_{H_1}(0,1)$ par A est relativement compacte dans H_2.

Théorème 54 :
Soit A compact. Il existe des bases hilbertiennes (e_n) de H_1 et (f_n) de H_2, et une suite (λ_n) de coefficients diagonaux, avec 0 comme seul point d'accumulation, et $A(x) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \langle x, e_n \rangle_{H_1} f_n$.

Définition 55 (Opérateur à trace) **:**
L'opérateur $A : H \to H$ est à trace lorsque $\sum \left| \langle A(e_n), e_n \rangle_{H_1} \right| < \infty$, auquel cas sa trace est définie comme $\mathrm{trace}(A) = \sum \langle A(e_n), e_n \rangle_{H_1}$, autrement dit lorsque $\sum \lambda_n < \infty$.

Définition 56 (Opérateur Hilbert-Schmidt) **:**

L'opérateur $A : H \to H$ vérifie ici : $\|A\|_{HS}^2 := \sum \|A(e_n)\|_H^2 < \infty$, ce qui revient à exiger $\sum \lambda_n^2 < \infty$.

Remarque 57 :

On a A un opérateur HS ssi A^*A est à trace, et alors $\mathrm{trace}(A^*A) = \|A\|_{HS}^2$.

Théorème 58 :

Un opérateur A est à trace ssi il existe A_1 et A_2 des opérateurs HS tels que $A = A_1 \circ A_2$.

Théorème 59 :

Supposons $H = L^2(E \to \mathbb{R}, m)$. Dans ce cas, $A : H \to H$ est HS ssi il existe un noyau $A : E^2 \to \mathbb{R}$ mesurable, tel que $\int\int A(x,y)^2 \,\mathrm{d}m(x)\,\mathrm{d}m(y) < \infty$. Dans ce cas, on a l'application $A(f) : x \mapsto \int K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}m(y)$.

Remarque 60 :

Soit A un tel opérateur HS. Calculons la trace de A^2 :

$$\mathrm{trace}\big(A^2\big) = \sum \langle A(e_n), A^*(e_n)\rangle_H = \sum_{n,p} \langle A(e_n), e_p\rangle \langle A^*(e_n), e_p\rangle\,.$$

En outre, $\langle A(e_n), e_p\rangle = \int\int A(x,y) e_n(y) e_p(x)\,\mathrm{d}m(x)\,\mathrm{d}m(y) = \langle A, e_p \otimes e_n\rangle_{L^2(E^2, m\otimes m)}$. On vérifie par un calcul que A^* est aussi un opérateur à noyau $A^*(x,y) = A(y,x)$, donc on a maintenant $\langle A^*(e_n), e_p\rangle = \langle A^*, e_p \otimes e_n\rangle = \langle A, e_n \otimes e_p\rangle$. Or la famille $(e_n \otimes e_p)_{n,p}$ forme une base hilbertienne de $L^2(E^2)$. Finalement :

$$\mathrm{trace}\big(A^2\big) = \langle A, A^*\rangle_{L^2(E^2)} = \int\int A(x,y)A(y,x)\,\mathrm{d}m(x)\,\mathrm{d}m(y)\,.$$

Revenons-en à notre contexte initial.

Théorème 61 :

Pour $U \in \mathbb{D}_{2,1}(H)$, on a $\mathbb{E}[\delta(U)^2] = \mathbb{E}\big[\|U\|_H^2\big] + \mathbb{E}[\mathrm{trace}(\nabla U \circ \nabla U)]$.

Démonstration. On a les applications $U : W \to H$, $\nabla U : W \to H \otimes H$, via l'expression $\nabla U(\omega) : (s,r) \mapsto \nabla_r U_s(\omega)$. On a également $\dot{\nabla}\big(\dot{U}\big) : W \to L^2 \otimes L^2$, et :

$$\nabla_t U_v(\omega) = \int_0^t \mathrm{d}s \int_0^v \mathrm{d}r \dot{\nabla}_r \dot{U}_s\,.$$

Dans une base hilbertienne (h_m) de H, on décompose $U = \sum \langle U, h_n\rangle h_n$. On a en outre $\mathbb{E}[\delta(U)^2] = \mathbb{E}[\langle \nabla(\delta U), U\rangle_H]$. Or $\delta U = \sum \langle U, h_n\rangle \delta(h_n) - \langle \nabla(\langle U, h_n\rangle_H), h_n\rangle$. En utilisant les lemmes techniques ci-après, on a donc $\nabla(\delta U) = \sum \nabla(\langle U, h_n\rangle)\delta(h_n) + \langle U, h_n\rangle h_n - \nabla\big(\langle \nabla U, h_n \otimes h_n\rangle_{H\otimes H}\big)$. Ainsi, l'espérance de $\delta(U)^2$ s'écrit sous la forme :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k,n} \langle U, h_k\rangle\langle \nabla\langle U, h_n\rangle, h_k\rangle \delta h_n + \langle U, h_n\rangle\langle U, h_k\rangle\langle h_n, h_k\rangle - \langle U, h_k\rangle\langle \nabla\langle \nabla U, h_n \otimes h_n\rangle, h_k\rangle\right].$$

Si on somme le terme central, on obtient en fait $\mathbb{E}\left[\sum_n \langle U, h_n\rangle^2\right] = \mathbb{E}\big[\|U\|_H^2\big]$. Pour le terme de gauche, par IPP, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k,n} \langle \nabla(\langle U, h_k\rangle\langle \nabla U, h_n \otimes h_k\rangle), h_n\rangle\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n,k} \langle \nabla U, h_n \otimes h_k\rangle\langle \nabla U, h_k \otimes h_n\rangle\right] + (\cdots),$$

où le terme $(\cdots)$ vient en fait compenser le terme de droite. Finalement, par la formule de Parseval, ce terme restant correspond à $\mathbb{E}[\mathrm{trace}_H(\nabla U \circ \nabla U)]$. $\square$

Remarque 62 :

Comme $U \in \mathbb{D}_{2,1}$, on a $\mathbb{E}\big[\|U\|_H^2 + \|\nabla U\|_{H\otimes H}^2\big] < \infty$. Quitte à réécrire le terme de droite, on a $\mathbb{E}\left[\int\int \dot{\nabla}_r\left(\dot{U}_s\right)^2 \mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\right] < \infty$. En d'autres termes, $\dot{\nabla}\left(\dot{U}\right) : H \to H$ est un opérateur HS, de noyau $(r, s) \mapsto \dot{\nabla}_r\left(\dot{U}_s\right)$, et ce μ-presque-sûrement.

Dans le cas où U est adapté, on a $\dot{\nabla}_r\left(\dot{U}_s\right) = 0$ lorsque $r > s$. Par définition de la trace, on a $\mathrm{trace}\left(\dot{\nabla}\dot{U} \circ \dot{\nabla}\dot{U}\right) = \int\int \dot{\nabla}_r \dot{U}_s \times \dot{\nabla}_s \dot{U}_r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s = 0$.

Lemme 63 :

Soient $V \in \mathbb{D}_{2,1}(H)$, $x \in H$ et $h \in H$. Alors :

$$\langle \nabla(\langle V, x\rangle_H), h\rangle_H = \langle \nabla(V), x \otimes h\rangle_{H\otimes H}.$$

Lemme 64 (Lemme de Schwarz) **:**

Soit $F \in \mathbb{D}_{2,2}$. Pour toutes fonctions $h, k \in H$ on a :

$$\left\langle \nabla^2 F, h \otimes k\right\rangle_{H\otimes H} = \left\langle \nabla^2 F, k \otimes h\right\rangle_{H\otimes H}$$

Démonstration. Par densité, il suffit de le vérifier pour les fonctions cylindriques. Dans ce cas, $\langle \nabla F, h\rangle = \sum \partial_j f(\delta h_1, \ldots, \delta h_n)\langle h_j, h\rangle$. Dans ce cas, en développant les calculs, on conclut à partir du lemme précédent. $\square$

Remarque 65 (Intégrale de Stratonovich) **:**

Considérons une subdivision π de l'intervalle unité. On peut définir le processus B^π comme l'interpolation affine du MB B. On peut alors intégrer $\overset{\bullet}{U}$ contre B^π, via la relation :

$$\int \overset{\bullet}{U}_s \, \mathrm{d}B^\pi_s = \sum \frac{B_{t_{i+1}} - B_{t_i}}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \overset{\bullet}{U}_s \, \mathrm{d}s \, .$$

Considérons $S^\pi(U) = \sum \frac{1}{t_{i+1}-t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} U_s \, \mathrm{d}s \delta\big(\mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}[}\big)$. Ainsi :

$$\delta(S^\pi(U)) = \delta\left(\sum \frac{B_{t_{i+1}} - B_{t_i}}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \overset{\bullet}{U}_s \, \mathrm{d}s \right) + \sum \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \overset{\bullet}{\nabla}_r \overset{\bullet}{U}_s \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}s \, .$$

Le terme de gauche converge assez naturellement vers $\delta\left(\overset{\bullet}{U}\right) = \int \overset{\bullet}{U}_s \, \mathrm{d}B_s$, et on obtient ainsi le terme correspondant à Itô. Le terme de droite correspond à un terme perturbatif.

3.2 Chaos de Wiener

Définition 66 :
Soit $h \in H$. Posons $\Lambda_h = \exp\left(\delta h - \frac{1}{2}\|h\|_H^2\right) = \exp\left(\int_0^1 \overset{\bullet}{h}_s \, \mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^1 \overset{\bullet}{h}_s^{\,2} \, \mathrm{d}s\right)$.

On note $\mathcal{E} = \mathrm{Vect}(\Lambda_h, \, h \in H)$.

Lemme 67 :
On a $\overline{E} = L^2(W \to \mathbb{R}, \mu)$, où μ est la mesure de Wiener.

Lemme 68 :
Le processus $(\Lambda_h(t))_{0 \le t \le 1}$ est une martingale, et $\mathrm{d}\Lambda_h(s) = \Lambda_h(s)\overset{\bullet}{h}_s \, \mathrm{d}B_s$. On a en particulier $\Lambda_h(t) = 1 + \int_0^t \Lambda_h(s)\overset{\bullet}{h}_s \, \mathrm{d}B_s$.

Notons que $\Lambda_h(1) = \Lambda_h$, et que $\nabla\Lambda_h = \Lambda_h h$.

Remarque 69 (Intégrales itérées) **:**
Soit $\overset{\bullet}{f} \in L^2([0,1] \to \mathbb{R}, \mathrm{d}s)$. On peut naturellement définir $J_1\left(\overset{\bullet}{f}\right) = \int_0^1 \overset{\bullet}{f}(s) \, \mathrm{d}B_s$.

Définissons $C_n(t)$ comme l'ensemble des $(t_1, \dots, t_n) \in [0,1]^n$ tels que $t_1 \le \dots \le t_n \le t \le 1$. Pour $f \in L^2(C_n(1) \to \mathbb{R})$ on pose $J_n(f) = \int_0^1 \mathrm{d}B_{t_n} \int_0^{t_n} \mathrm{d}B_{t_{n-1}} \cdots \int_0^{t_2} \mathrm{d}B_{t_1} f(t)$.

Théorème 70 :
Soient $f \in L^2(C_n)$ et $g \in L^2(C_m)$. Alors $\mathbb{E}[J_n(f)J_m(g)] = \delta_{m,n} \int_{C_n} f(t)g(t) \, \mathrm{d}t$.

Démonstration. Par construction, on a $J_n(f) = \int_0^1 J_{n-1}(f(\cdot, t_n)) \, \mathrm{d}B_{t_n}$. On montre désormais $\mathbb{E}[J_1(f)J_1(g)] = \mathbb{E}\left[\int f(s) \, \mathrm{d}B_s \int g(s) \, \mathrm{d}B_s\right] = \int f(s)g(s) \, \mathrm{d}s$. De façon analogue, pour $m > 1$, $\mathbb{E}[J_1(f)J_m(g)] = \mathbb{E}\left[\int f(s)J_{m-1}(g(\cdot, s)) \, \mathrm{d}s\right] = \int f(s)\mathbb{E}[J_{m-1}(g(\cdot, s))] \, \mathrm{d}s = 0$. Finalement, on montre :

$$\mathbb{E}[J_n(f)J_m(g)] = \int \mathbb{E}[J_{n-1}(f(\cdot, s))J_{m-1}(g(\cdot, s))] \, \mathrm{d}s \,,$$

d'où le résultat par induction. $\square$

Définition 71 :

Soit $L_s^2([0,1]^n)$ l'espace des fonctions symétriques de carré intégrable, invariantes par permutation. Pour de telles fonctions, on a naturellement $\int\limits_{[0,1]^n} f(s)\,\mathrm{d}s = n! \int\limits_{C_n(1)} f(s)\,\mathrm{d}s$.

Pour une telle fonction, on pose alors $J_n^s(f) = n! J_n(f \mathbb{1}_{C_n})$. Plus largement, pour $f \in L^2$, on peut symétriser f en $f^s(t) = \frac{1}{n!}\sum\limits_{\sigma} f\left(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)}\right)$. On pose enfin $J_n^s(f) = J_n^s(f^s)$.

Remarque 72 :

Soient $f, g \in L_s^2$. Notons que $\langle f, g\rangle_{L^2([0,1]^n)} = n!\langle f, g\rangle_{L^2(C_n)}$.

Théorème 73 :

Soient $f \in L_s^2([0,1]^n)$ et $g \in L_s^2([0,1]^m)$. On a $\mathbb{E}[J_n^s(f) J_m^s(g)] = \delta_{m,n} \times n!\langle f, g\rangle_{L^2([0,1]^n)}$.

Théorème 74 :

Soit $h \in H$. On a $\Lambda_h = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} J_n\left(\dot{h}^{\otimes n} \mathbb{1}_{C_n}\right) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} J_n^s\left(\dot{h}^{\otimes n}\right)$.

Démonstration. La fonction $\dot{h}^{\otimes n}(t_1, \dots, t_n) = \prod\limits_{j=1}^{n} \dot{h}(t_j)$, est clairement dans L_s^2, puisqu'on a $\left\|\dot{h}^{\otimes n}\right\|_{L^2([0,1]^n)} = \left\|\dot{h}\right\|_{L^2([0,1])}^n$.

On sait que $\Lambda_h(t) = 1 + \int\limits_0^1 \Lambda_h(s)\dot{h}_s\,\mathrm{d}B_s$. On peut réinjecter cette expression dans elle même :

$$\Lambda_h = 1 + \int_0^1 \dot{h}_s\,\mathrm{d}B_s + \int_0^1 \mathrm{d}B_s \int_0^s \mathrm{d}B_r \Lambda_h(r)\dot{h}_r\dot{h}_s = 1 + J_1\left(\dot{h}\right) + (\cdots).$$

et on peut itérer. Pour montrer la convergence dans L^2 des sommes partielles, il suffit de montrer que le terme de reste tend vers 0 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int\limits_{C_n} \Lambda_h(t_n)\dot{h}^{\otimes n}(t)\,\mathrm{d}B_{t_1}\dots\mathrm{d}B_{t_n}\right)^2\right] &= \int\limits_{C_n} \mathbb{E}\left[\Lambda_h(t_n)^2\right]\dot{h}^{\otimes n}(t)^2\,\mathrm{d}t \\
&\le \int\limits_{C_n} \mathbb{E}[\Lambda_{2h}(t_n)]e^{\|h\|_H^2}\dot{h}^{\otimes n}(t)^2\,\mathrm{d}t \\
&\le e^{\|h\|_H^2} \times \frac{\|h\|_H^{2n}}{n!} \\
&\to 0\,,
\end{aligned}$$

d'où la convergence de la série. □

Remarque 75 :

Notons que $\nabla\Lambda_h = \Lambda_h h$, donc $\dot{\nabla}\Lambda_h = \Lambda_h \dot{h}$. En itérant l'opérateur de gradient, on a alors $\dot{\nabla}^n \Lambda_h = \Lambda_h \dot{h}^{\otimes n}$. Ainsi, on peut réécrire le théorème précédent sous la forme :

$$\Lambda_h = \mathbb{E}[\Lambda_h] + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} J_n^s\left(\mathbb{E}\left[\dot{\nabla}^n \Lambda_h\right]\right).$$

Corollaire 76 (Décomposition en chaos) **:**

Pour toute fonction $F \in L^2(W \to \mathbb{R}, \mu)$, on a :

$$F = \mathbb{E}[F] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} J_n^s\left(\mathbb{E}\left[\dot{\nabla}^n F\right]\right).$$

Démonstration. On a montré la propriété pour les fonctions Λ_h. On peut étendre le résultat à $F \in \mathcal{E}$ par linéarité de la relation. Pour conclure par densité, on va par la suite montrer la continuité de $F \mapsto \mathbb{E}\left[\dot{\nabla}^n F\right]$. □

3.3 Espace de Fock

Définition 77 :

Soit $F_\mu(H) = \mathbb{R} \bigoplus_{j=1}^{\infty} H^{\otimes j}$, muni de la norme $\|h\|_F^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|h_n\|_{H^{\otimes n}}^2$.

Théorème 78 :

Soit $\upsilon : \mathcal{E} \to F_\mu(H)$, définie par $\upsilon(F) = \left(\mathbb{E}\left[\dot{\nabla}^n F\right]\right)_{n\geq 0}$, avec la convention $\nabla^0 F = F$. Cette application linéaire est une isométrie, donc se prolonge à $L^2(W \to \mathbb{R}, \mu)$.

Démonstration. Soit $F \in \mathcal{E}$. On a :

$$\mathbb{E}\left[F^2\right] = \mathbb{E}\left[(F - \mathbb{E}[F])^2\right] + \mathbb{E}[F]^2 = \mathbb{E}[F]^2 + \mathbb{E}\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} J_n^s\left(\mathbb{E}\left[\dot{\nabla}^n F\right]\right)\right)^2\right].$$

Par orthogonalité de la famille, on a donc :

$$\mathbb{E}\left[F^2\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!^2} \mathbb{E}\left[J_n^s\left(\left[\dot{\nabla}^n F\right]\right)^2\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\|\mathbb{E}\left[\dot{\nabla}^n F\right]\right\|_{L^2([0,1]^n)}^2 = \|\upsilon(F)\|_{F_\mu(H)}.$$

□

Corollaire 79 (Décomposition en chaos) **:**
Avec ces nouvelles notations, on peut réécrire $F \in L^2(W \to \mathbb{R}, \mu)$ en :

$$F = \mathbb{E}[F] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} J_k^s\left(\upsilon(\dot{F})_k\right).$$

Remarque 80 :
Soit par exemple $F(B) = B_1^2$. On a $\mathbb{E}[F] = 1$. Or $\dot{\nabla}_s(F) = B_1 \mathbb{1}_{[0,1]}(s)$, d'où $\mathbb{E}\left[\dot{\nabla}_s(F)\right] = 0$. On a alors $\dot{\nabla}_s \dot{\nabla}_t(F) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t)\mathbb{1}_{[0,1]}(s) = 1$, puis le gradient s'annule aux rangs suivants. Le théorème nous donne donc $B_1^2 = 1 + \frac{1}{2} J_2^s(1)$.

En prenant le problème à l'envers, via l'intégrale d'Itô, on vérifie le résultat car :

$$J_2^s(1) = 2J_2(\mathbb{1}_{C_2}) = 2\int_0^1 \int_0^t \mathrm{d}B_s \, \mathrm{d}B_t = 2\int_0^t B_t \, \mathrm{d}B_t = B_1^2 - 1\,.$$

Théorème 81 :
Notons $\delta^n = (\nabla^n)^*$ l'opérateur adjoint de ∇^n.

Pour $F \in L^2$, on a $F = \mathbb{E}[F] + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \delta^n(\upsilon(F)_n)$.

Démonstration. Considérons pour commencer $F = \Lambda_h$. Dans ce cas, on a une factorisation $\Lambda_h(\omega + \tau k) = \exp\big(\delta h(\omega + \tau k) - \|h\|^2/2\big) = \Lambda_h(\omega) \times \exp(\tau\langle k, h\rangle)$, donc $f : \tau \mapsto \Lambda_h(\omega + \tau k)$ est analytique.

On a $f(\tau) = \sum_{n \geq 0} \frac{\tau^n}{n!} f^{(n)}(0)$. Notons que $f'(0) = \langle \nabla \Lambda_h(\omega), k\rangle_H = \Lambda_h(\omega)\langle h, k\rangle_H$. Par récurrence, on a plus largement $f^{(n)}(0) = \langle \nabla^n \Lambda_h, k^{\otimes n}\rangle_H$. Ainsi, $f(\tau) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \langle \nabla^n F, k^{\otimes n}\rangle_{H^{\otimes n}}$. En passant à l'espérance :

$$\mathbb{E}[F(\omega + \tau k)] = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\tau^n}{n!} \mathbb{E}\big[\langle \nabla^n F, k^{\otimes n}\rangle_{H^{\otimes n}}\big]\,.$$

Par la formule de Cameron-Martin, on a :

$$\mathbb{E}[F(\omega + \tau k)] = \mathbb{E}[F\Lambda_{\tau k}] = \mathbb{E}\left[F \times \left(1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\tau^n}{n!} J_n^s\left(\dot{k}^{\otimes n}\right)\right)\right] = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\tau^n}{n!} \mathbb{E}\left[F J_n^s\left(\dot{k}^{\otimes n}\right)\right].$$

En identifiant les coefficients dans les deux développements en série entière, on en déduit que pour toute fonction $F = \Lambda_h$, et donc par densité-linéarité pour toute fonction $F \in L^2$, on a :

$$\mathbb{E}\big[F \delta^n k^{\otimes n}\big] = \mathbb{E}\left[F J_n^s\left(\dot{k}^{\otimes n}\right)\right],$$

et donc finalement $\delta^n k^{\otimes n} = J_n^s\left(\dot{k}^{\otimes n}\right)$. $\square$

Remarque 82 :

Rappelons les notations $\Pi_t : h \in H \mapsto I'\left(\dot{h}\mathbb{1}_{[0,t]}\right) \in H$, et $\dot{\Pi}_t : \dot{h} \in L^2 \mapsto \dot{h}\mathbb{1}_{[0,t]}$.

On pose alors P_{Π_t} sur $F_\mu(H)$, qui envoie $\bigotimes h_j$ sur $\bigotimes \Pi_t h_j$.

Ainsi, $P_{\Pi_t}\left(\dot{f}(s,r)\right) = \dot{f}(s,r)\mathbb{1}_{[0,t]}(s)\mathbb{1}_{[0,t]}(r)$.

Théorème 83 :

Soit $F \in L^2$. Soit $\mathcal{F}_t$ issu de la filtration canonique du MB B. On a :

$$\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[F] + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}\delta^n(P_{\Pi_t}\upsilon(F)_n)\,.$$

Idée. On exploite ici $\mathbb{E}[\Lambda_h|\mathcal{F}_t] = \Lambda_h(t)$. L'essentiel de la preuve est identique à ce qui précède, avec des projections orthogonales judicieusement placées. $\square$

Théorème 84 (Formule de Clark-Ocone) **:**

Soit $F \in L^2$. On a $F = \mathbb{E}[F] + \int_0^1 \mathbb{E}\left[\dot{\nabla}_s F\middle|\mathcal{F}_s\right] \mathrm{d}B_s$.

Idée. On commence par montrer que $F \mapsto \left(s \mapsto \mathbb{E}\left[\dot{\nabla}_s F\middle|\mathcal{F}_s\right]\right)$ est une application linéaire bien définie sur $\mathcal{E} \to L^2(W \times [0,1] \to \mathbb{R}, \mu \otimes \mathrm{Leb})$, et s'étend par continuité à L^2 tout entier.

Dans un second temps, on montre la formule sur $\mathcal{E}$, à nouveau via $\Lambda_h(1) = 1 + \int_0^1 \Lambda_h(s)\dot{h}_s\,\mathrm{d}B_s$, et $\mathbb{E}\left[\dot{\nabla}_s\Lambda_h(1)\middle|\mathcal{F}_s\right] = \dot{h}(s)\mathbb{E}[\Lambda_h|\mathcal{F}_s] = h(s)\Lambda_h(s)$. $\square$

Théorème 85 :

Soit $\dot{h}_n \in L_s^2([0,1]^n)$. On a :

$$\dot{\nabla}_r J_r^s\left(\dot{h}_n\right) = nJ_{n-1}^s\left(\dot{h}_n(\cdot,r)\right).$$

Démonstration. Partons de $\Lambda_{\tau h} = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\tau^n}{n!} J_n^s\left(\dot{h}^{\otimes n}\right)$. En conséquence :

$$\nabla\Lambda_{\tau h} = \sum_{n\geq 1} \frac{\tau^n}{n!}\nabla J_n^s\left(\dot{h}^{\otimes n}\right).$$

Mais dans le même temps, comme $\nabla \Lambda_{\tau h} = \tau h \Lambda_{\tau h} = \tau h + \sum_{n\geq 1} \frac{\tau^{n+1}}{n!} J_n^s\left(\overset{\bullet}{h}^{\otimes n}\right) h$. On peut alors conclure en identifiant les coefficients dans les deux séries. $\square$

Théorème 86 :

Soit $U(t) = \sum_{n\geq 0} \delta^n(h_n(\cdot, t)) = \sum_{n\geq 0} J_n^s\left(\overset{\bullet}{h}_n(\cdot, t)\right)$, avec $h_n \in H^{\otimes(n+1)}$ symétrique en ses n premières variables. Dans ce cas, avec $\widetilde{h}_n$ le symétrisé de h_n, on a :

$$\delta U = \sum_{n\geq 0} \delta^{n+1}\left(\widetilde{h_n}\right).$$

Théorème 87 (Formule de multiplication des intégrales itérées) **:**

Soient $\overset{\bullet}{f} \in L^2([0,1]^n)$ et $\overset{\bullet}{g} \in L^2([0,1]^m)$. On a :

$$J_n^s\left(\overset{\bullet}{f}\right) J_m^s\left(\overset{\bullet}{g}\right) = \sum_{j=0}^{n\wedge m} \frac{n!m!}{j!(n-j)!(m-j)!} J_{n+m-2j}^s\left(\overset{\bullet}{f} \otimes^j \overset{\bullet}{g}\right),$$

où $\overset{\bullet}{f} \otimes_j \overset{\bullet}{g}\big(t_1, \ldots, t_{n-j}, t'_1, \ldots, t'_{m-j}\big) = \int_{[0,1]^j} \overset{\bullet}{f}(t_1, \ldots, t_{n-j}, s_1, \ldots, s_j)\overset{\bullet}{g}\big(t'_1, \ldots, t'_{m-j}, s_1, \ldots, s_j\big)\,\mathrm{d}s$ est une fonction symétrique où on intègre contre j variables en commun entre $\overset{\bullet}{f}$ et $\overset{\bullet}{g}$.

4 Opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck

4.1 Cas de la dimension 1

Remarque 88 (Formule de Mehler) **:**

Commençons par illustrer l'opérateur en dimension 1.

On considère le processus X solution de $\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}B_t - X_t\,\mathrm{d}t$, initialisé en x_0. On a en fait $X_t = e^{-t}x_0 + \sqrt{2}\int_0^t e^{s-t}\,\mathrm{d}B_s$. On peut vérifier que $X_t \sim \mathcal{N}(e^{-t}x_0, 1-e^{-2t})$. En conséquence, $X_t \rightharpoonup \mathcal{N}(0,1)$.

Soit f régulière. On a $f(X_t) = f(x) + \int_0^t f'(X_s)\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\,\mathrm{d}\langle X,X\rangle_s$. Si on définit :

$$P_t f(x) := \mathbb{E}[f(X_t(x))]\,,$$

on obtient un semi-groupe d'opérateur $P_t f(x) = f(x) + \int_0^t P_s(Lf)(x)\,\mathrm{d}s$, avec le générateur $Lf(x) = f''(x) - xf'(x)$.

Lemme 89 :

Dans la base de $L^2(\mathbb{R}\to\mathbb{R},\mu)$ (où μ est la loi normale centrée réduite) formée par les polynômes d'Hermite, on a $Lf = \sum\langle f, H_n\rangle \times nH_n$. Autrement dit, ces polynômes sont les fonctions propres de L.

Lemme 90 :

Si la condition initiale est $X_0 \sim \mu := \mathcal{N}(0,1)$, alors c'est aussi le cas de tout X_t, la mesure est stationnaire.

On peut noter P_t^* qui à une mesure initiale $X_0 \sim \nu$ associe la loi $P_t^*\nu \overset{\mathrm{d}}{=} X_t$.

On a vu que $P_t^*\nu$ tend en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$. On aimerait quantifier cette vitesse de convergence.

Définition 91 (Distance de Kantorovitch-Rubinstein) **:**

On définit cette distance, aussi connue comme la distance de Wasserstein-1, comme suit. Soient $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$ deux variables réelles. On pose :

$$d_{\mathrm{KR}}(\mathbb{P}_X,\mathbb{P}_Y) = \inf_{X\sim\mathbb{P}_X, Y\sim\mathbb{P}_Y} \mathbb{E}[|X'-Y'|]\,.$$

Théorème 92 :

Notons Lip_1 l'ensemble des fonctions 1-lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.

On a $d_{\mathrm{KR}}(\mathbb{P}_X, \mathbb{P}_Y) = \sup\limits_{f \in Lip_1} \mathbb{E}[f(X)] - \mathbb{E}[f(Y)]$.

Ce faisant, on s'affranchit du problème du couplage entre X et Y.

4.2 Méthode de Stein (1972)

On cherche ici à calculer, ou à majorer, la distance $d_{\mathrm{KR}}(\cdot, \mu)$ à la gaussienne centrée réduite.

Notons que $P_t f(x) - P_s f(x) = \int\limits_s^t \partial_r P_r f(x) \,\mathrm{d}r = \int\limits_s^t P_r[Lf](x) \,\mathrm{d}r = \int\limits_s^t L(P_r f)(x) \,\mathrm{d}r$. En passant à la limite $s \to 0$ et $t \to \infty$, on a $\int f(y) \,\mathrm{d}\mu(y) - f(x) = \int\limits_0^\infty LP_r f(x) \,\mathrm{đ}$. En intégrant la variable x contre la loi ν on a alors :

$$\mathbb{E}_\mu[f] - \mathbb{E}_\nu[f] = \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_0^\infty L[P_t f](x) \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}\nu(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} L\left(x \mapsto \int\limits_0^\infty P_t f(x) \,\mathrm{d}t\right)(x) \,\mathrm{d}\nu(x)\,.$$

On aimerait trouver un espace raisonnable dans lequel vit $\psi_f : x \mapsto \int\limits_0^\infty P_t f(x) \,\mathrm{d}t$, pour majorer notre distance.

Lemme 93 :

Si $f \in L^{1+\varepsilon}$, alors $P_t f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(P_t f)^{(k)}(x) = \left(\frac{e^{-t}}{\beta_t}\right)^k \int f(e^{-t}x + \beta_t y) H_k(y) \,\mathrm{d}\mu(y)$, avec $\beta_t = \sqrt{1 - e^{-2t}}$.

Démonstration. Par le changement de variable $z = y + \frac{e^{-t}}{\beta_t} h$, on a :

$$\int f\big(e^{-t}(x+h) + \beta_t y\big) \,\mathrm{d}\mu(y) = \int f\big(e^{-t}x + \beta_t z\big) \exp\left(\frac{e^{-t}}{\beta_t} \ln(z) - \frac{1}{2} \frac{e^{-2t}}{\beta_t^2} h^2\right) \mathrm{d}\mu(z)\,.$$

On peut alors dériver sous l'intégrale pour faire apparaître les polynômes d'Hermite annoncés. □

Si on pousse les calculs, on remarque qu'on manque de régularité pour contrôler cette intégrale. On peut introduire une distance alternative :

$$d'_{\mathrm{KR}}(\mu, \nu) = \sup_{f \in \mathcal{C}_b^2} \mathbb{E}_\mu[f] - \mathbb{E}_\nu[f]\,.$$

Cette distance induit la même topologie, la même notion de convergence, mais permet un contrôle plus explicite de la vitesse de convergence.

En partant d'une fonction $f \in \mathcal{C}_b^2$, on obtient naturellement $f \in L^{1+\varepsilon}$ donc ψ_f est infiniment dérivable. En particulier, ψ'' est Lipschitz :

$$|\psi''(x) - \psi''(z)| \leq \int\limits_0^\infty \frac{e^{-2t}}{\beta_t^2} \int\limits_{\mathbb{R}} \left| f'\big(e^{-t}x + \beta_t y\big) - f'\big(e^{-t}z + \beta_t y\big) \right| \mathrm{d}\mu(y) \,\mathrm{d}t \leq \|f''\|_\infty |x - z| \times Cte\,.$$

4.3 Cas général

Étant donné un gradient D, on peut définir le générateur $L = -D^*D$, et en déduire un semi-groupe (P_t) et un processus X.

On veut désormais reproduire la démarche précédente pour des variables à valeurs dans l'espace de Wiener W. On pourrait éventuellement utiliser une formule de Mehler, ou définir $L = -\delta\nabla$. On va utiliser ici la décomposition en Chaos.

Définition 94 :

Soit $Dom(L) = \left\{ F \in L^2(W \to \mathbb{R}),\ \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 \left\| J_n\left(\overset{\bullet}{h}_n\right)\right\|_{L^2}^2 < \infty \right\}$.

Sur ce domaine, on définit l'opérateur $LF = -\sum_{n=1}^{\infty} nJ_n\left(\overset{\bullet}{h}_n\right)$.

Remarque 95 :

L'opérateur L est inversible, avec $L^{-1} : L_0^2 = \{F \in L^2,\ \mathbb{E}[F] = 0\} \to L^2$.

On avait précédemment $\partial_t[P_tF] = LP_tF$. On définit P pour préserver cette propriété.

Définition 96 :

Soit $P_tF = \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-nt}J_n\left(\overset{\bullet}{h}_n\right)$.

Lemme 97 :

On a naturellement $P_tP_s = P_{t+s}$. On a $\nabla P_tF = e^{-t}P_t\nabla F$.

Proposition 98 (Formule de Mehler) **:**

On a $P_tF(\omega) = \int F(e^{-t}\omega + \beta_t\eta)\,\mathrm{d}\mu(\eta)$, où μ est maintenant la mesure de Wiener.

Démonstration. Il suffit de le montrer pour les fonctions $F = \Lambda_h$ pour conclure par des passages à la limite dans le cas général. Dans ce cas, $P_t\Lambda_h(\omega) = \sum e^{-nt}J_n\left(\overset{\bullet}{h}^{\otimes n}\right)(\omega)$. Pour le terme intégral, notons que :

$$\Lambda_h\left(e^{-t}\omega + \beta_t\eta\right) = \exp\left(e^{-t}\delta h(\omega) - \frac{1}{2}\left\|e^{-t}h\right\|_H^2\right)\exp\left(\beta_t\delta h(\eta) - \frac{1}{2}\|\beta_t h\|_H^2\right) = \Lambda_{e^{-t}h}(\omega)\Lambda_{\beta_t h}(\eta)\,.$$

On conclut alors par calcul explicite. □

Remarque 99 (Expression de L) **:**

Supposons que $\nabla F \in e^*(W^*)$ est de norme finie, et que $\nabla^{(2)}F \in e^*(W^*) \otimes e^*(W^*)$ est également de norme finie.

Dans ce cas, l'opérateur est à trace (théorème de Goodman). On a alors :

$$LF(\omega) = -\left\langle [e^*]^{-1}(\nabla F), \omega \right\rangle_W + \mathrm{trace}\left(\nabla^{(2)} F\right).$$

5 Théorème du quatrième moment

Théorème 100 :

Soit $F_n = \int\limits_{0<s<t<1} f_n(t,s)\,\mathrm{d}B_s\,\mathrm{d}B_t$.

Supposons que $\int\limits_{[0,1]^2} f_n(t,s)^2\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = 1 = \mathbb{E}[\mathcal{N}(0,1)^2]$, et que $\mathbb{E}[F_n^4] \longrightarrow 3 = \mathbb{E}[\mathcal{N}(0,1)^4]$.

Alors $F_n \rightharpoonup \mathcal{N}(0,1)$ converge en loi vers une gaussienne centrée réduite.

La réciproque est naturelle.

Il nous suffit de contrôler la distance $d'(F_n, \mathcal{N}(0,1))$ pour obtenir la convergence souhaitée. Pour ce faire, il suffit de montrer qu'on contrôle $\mathbb{E}[L\psi(F_n)]$, uniformément en Ψ.

Lemme 101 :

Soit $T = \delta^{(2)}(t)$, avec $t : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ symétrique.

On a $\mathbb{E}[T\varphi(T)] = \mathbb{E}[\varphi'(T)\langle \nabla T, \nabla L^{-1}T\rangle_H]$.

Démonstration. Remarquons que $T = LL^{-1}T = \delta\nabla L^{-1}T$. En réinjectant ceci dans le terme de gauche, on obtient $\mathbb{E}[\langle \nabla L^{-1}T, \nabla\varphi(T)\rangle_H]$ d'où le résultat attendu puisque le gradient de droite se développe en $\varphi'(T)\nabla T$. □

Il faut alors développer T en chaos, pour avoir une expression simple qu'on peut majorer.