Percolation

Léo Gayral

Ces notes sont basées sur le cours de Pierre-François Rodriguez. On pourra se référer aux ouvrages *Introduction to Bernoulli percolation* (Duminil-Copin, 2018) et *Percolation* (Grimmett, 1999) pour des lectures complémentaires.

Table des matières

Introduction

Le modèle de percolation permet de décrire des phénomènes physiques, comme les transitions de phase, dans un cadre mathématique rigoureux. De façon générale, un modèle de percolation s'intéresse à un sous-graphe aléatoire d'un graphe (V, E) fixé. Par la suite, on considèrera le réseau $\left(\mathbb{Z}^d, E^d\right)$ pour $d \geq 2$, où $E^d = \left\{\{x, y\} \in \mathbb{Z}^{2d},\ \|x - y\|_1 = 1\right\}$.

1 Généralités

Définition 1 (Percolation sur $\mathbb{Z}^d$ de paramètre $p \in [0, 1]$) **:**
On définit les variables aléatoires $U_e \underset{e \in E^d}{\overset{\text{iid}}{\sim}} \mathcal{U}([0, 1])$. On définit alors l'ensemble aléatoire $E_p = \left\{e \in E^d,\ U_e < p\right\}$ et le sous-graphe aléatoire $G_p := \left(\mathbb{Z}^d, E_p\right)$ du réseau $\mathbb{Z}^d$. On identifiera parfois E_p à sa fonction indicatrice aléatoire dans $E^d \to \{0, 1\}$.

De façon imagée, G_p correspond au réseau $\mathbb{Z}^d$ usuel dans lequel chaque arrête est conservée indépendamment des autres avec probabilité p.

Définition 2 (Cluster) **:**
On définit $\mathcal{C}_p(x)$ la composante connexe de $x \in G_p$, aussi appelée son *cluster* par la suite.

Par la suite, à moins que le contexte le nécessite, on ne précisera pas le paramètre p.

Lemme 3 :
Les ensembles $I(x) := \{\omega \in \Omega,\ |\mathcal{C}(x)| = \infty\}$ et $I := \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} I(x)$ sont mesurables.

$I(x)$ est l'évènement où la composante de x dans G est infinie, et I est l'évènement où une des composantes de G est infinie.

Démonstration. Si les $I(x)$ sont mesurables, alors I l'est aussi en tant qu'union dénombrable. il suffit donc de montrer que $I(x)$ est un évènement. Par invariance par translation, il suffit de faire la démonstration pour $x = 0$.

Par compacité, $\mathcal{C}(0)$ est infinie ssi il existe des chemins auto-évitants partant de 0 de longueurs arbitrairement grandes. Pour chaque longueur $n \in \mathbb{N}$, le nombre de tels chemins est finis. Chacun de ces chemins ne dépend que d'un nombre fini de variables aléatoires, sa présence dans G est donc un évènement mesurable. Autrement dit :

$$I(0) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\pi \text{ de longueur } n} \{\omega \in \Omega,\ \pi \subset G_p(\omega)\}$$

d'où $I(0) \in \mathcal{F}$ mesurable. $\square$

Lemme 4 :

On pose $\Theta(p) = \mathbb{P}(|\mathcal{C}_p(0)| = \infty)$ la probabilité qu'un cluster donné soit infini dans G_p.

L'application $\Theta : [0,1] \to [0,1]$ est croissante.

Démonstration. Ce résultat découle du couplage monotone $G_p \subset G_{p'}$ lorsque $p < p'$. $\square$

Proposition 5 :

On a toujours $\mathbb{P}(I_p) \in \{0,1\}$, et $\mathbb{P}(I_p) = 1$ ssi $\Theta(p) > 0$.

Démonstration. On pose $C_n = [\![-n, n]\!]^d$ le cube de côté $2n+1$ centré en 0. On définit alors $K_n = \left\{e \in E^d,\, e \cap C_n \neq \emptyset\right\}$ les arrêtes intérieures et adjacentes à C_n.

Notons que $I_p \in \sigma\left(\mathbb{1}_{e \in G_p}, e \in E^d \backslash K_n\right)$ pour $n > 0$ fixé. En effet, l'existence d'une composante infinie ne dépend pas du comportement dans C_n. On a donc $I_p \in \bigcap\limits_{n>0} \sigma\left(\mathbb{1}_{e \in G_p}, e \in E^d \backslash K_n\right)$ donc par le théorème du 0-1 de Kolmogorov, $\mathbb{P}(I_p) \in \{0,1\}$.

En outre, $\Theta(p) \leq \mathbb{P}(I_p) \leq \sum\limits_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(|\mathcal{C}_p(x)| = \infty) = \sum\limits_{x \in \mathbb{Z}^d} \Theta(p)$ d'où l'équivalence désirée. $\square$

Théorème 6 (Existence d'une transition de phase) **:**

Pour tout $d \geq 2$, on a une probabilité critique $0 < p_c(d) < 1$ telle que $\Theta(p) = 0$ lorsque $p < p_c$ et $\Theta(p) > 0$ lorsque $p > p_c$.

Démonstration. On a déjà établi la croissance de Θ, dont découle l'existence d'une probabilité critique $p_c = \sup\{p,\, \Theta(p) = 0\} = \inf\{p,\, \Theta(p) > 0\}$.

Montrons maintenant que $p_c \geq \frac{1}{2d-1}$. Supposons $p < \frac{1}{2d-1}$. Dans ce cas, on majore le nombre de chemins auto-évitants de longueur n par $2d \times (2d-1)^{n-1}$, autrement dit le nombre de chemins sans rebroussements. On a alors :

$$\begin{array}{rcl}
\Theta(p) & = & \mathbb{P}(I_p(0)) \\
& \leq & \mathbb{P}(\text{Il existe un chemin auto-évitant de longueur } n \text{ dans } G_p) \\
& \leq & \mathbb{P}(\text{Il existe un chemin sans rebroussements de longueur } n \text{ dans } G_p) \\
& \leq & \frac{2d}{2d-1} \times (2d-1)^n p^n \\
& \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} & 0
\end{array}$$

d'où le résultat souhaité.

Désormais, montrons que $p_c < 1$. Par inclusion de G_p^2 dans G_p^d, il suffit de le montrer pour $d = 2$. On va ici utiliser un argument de contour inspiré de Peierls (1936).

Considérons le graphe dual de $\mathbb{Z}^2$, et la percolation G' induite dans ce graphe par G_p : à rotations près, les arrêtes présentes dans G' sont les arrêtes absentes de G_p, et les sommets sont ceux de $\mathbb{Z}^2$ translatés de $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. En conséquence, $G' \overset{\mathrm{d}}{=} G_{1-p}$.

Remarquons que si le cluster $\mathcal{C}_p(0)$ est fini, borné, alors il existe un cycle dans G' qui le contourne, on parle de circuit dual fermé. Ainsi :

$$\begin{aligned} 1 - \Theta(p) &= \mathbb{P}(|\mathcal{C}_p(0)| < \infty)\,, \\ &\leq \sum_{n \geq 4} \mathbb{P}(\text{il existe un cycle dual à } n \text{ arêtes dans } G')\,. \end{aligned}$$

Un tel cycle peut toujours être initialisé à sa traversée la plus « à gauche » de l'axe horizontal, qui peut donc occuper au plus n positions étant donné la longueur du cycle. Chaque tel cycle est en outre un exemple de chemin auto-évitant dans G'. On a donc la majoration :

$$\mathbb{P}(\text{il existe un cycle dual à } n \text{ arêtes}) \leq n \times 2d(2d-1)^{n-1} \times (1-p)^n\,.$$

Comme $d = 2$ ici, on a $1 - \Theta(p) \leq \frac{4}{3} \sum_{n \in \mathbb{N}} n(3(1-p))^n$. Or $\sum_{n \in \mathbb{N}} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ lorsque $|x| < 1$, ce qui est ici le cas dès que $p > \frac{2}{3}$. Finalement :

$$\Theta(p) \geq 1 - \frac{4(1-p)}{(3p-2)^2} \underset{p \to 1^-}{\longrightarrow} 1\,.$$

On a établi la continuité à gauche de Θ en 1. En particulier, à partir d'un rang dont on pourrait obtenir une majoration, $\Theta(p) > 0$ et donc $p_c < 1$. $\square$

2 Techniques de base

Par la suite, on confondra parfois la notion de variables aléatoires sur notre percolation et celle de fonctions sur les sous-graphes de $\mathbb{Z}^d$. En se plaçant sur l'espace $\Omega = \{0,1\}^{E^d}$ muni de la tribu cylindrique, on a une bijection canonique entre les sous-graphes de $\mathbb{Z}^d$ et Ω. En particulier, l'inclusion $G \subset G'$ entre graphes équivaut à la majoration terme à terme $\omega \leq \omega'$.

2.1 Inégalité FKG

Définition 7 (États communiquants au sein d'un graphe) **:**

Dans un graphe $G = (V, E)$, on dit que x et y communiquent, et on note $x \leftrightarrow y$, lorsqu'il existe un chemin de x à y.

Pour $F \subset E$, on note $x \overset{F}{\leftrightarrow} y$ lorsqu'il existe un chemin de x à y n'utilisant que des arrêtes dans F. Pour $S \subset V$, on note $x \overset{S}{\leftrightarrow} y$ lorsqu'il existe un chemin de x à y ne passant que pas des sommets dans S. En particulier, cela nécessite $x, y \in S$.

On considère les évènements $A = \{x \leftrightarrow y\}$ et $B = \{u \leftrightarrow v\}$ dans le graphe G_p. On s'attend à ce que $\mathbb{P}(\leftrightarrow y | u \leftrightarrow v) \geq \mathbb{P}(x \leftrightarrow y)$. Le théorème suivant, parfois connu sous le nom de théorème de Harris, formalise cette intuition.

Théorème 8 (Inégalité de Fortwin-Kasteleyn-Ginibre, 1971) **:**

Soient $X, Y \in L^2$ des variables croissantes sur la percolation :

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega,\, \omega \leq \omega' \Rightarrow X(\omega') \geq X(\omega)\,.$$

Alors $\mathbb{E}[XY] \geq \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

Démonstration. Supposons d'abord que X et Y sont fonctions d'un nombre fini d'arêtes $(e_i)_{i \leq n}$.

Raisonnons par induction. Pour $n = 0$, X et Y sont constantes donc on a égalité. Pour $n = 1$, comme X et Y sont croissantes et ne dépendent que d'une arête, on a toujours *moralement* une inclusion d'un graphe dans l'autre, selon si $\omega(e_1) \leq \omega'(e_1)$ ou bien $\omega(e_1) \geq \omega'(e_1)$. En conséquence, pour tous $\omega, \omega' \in \Omega$, $(X(\omega) - X(\omega'))(Y(\omega) - Y(\omega')) \geq 0$. En passant à l'espérance double, pour deux copies indépendantes de X et Y, associées aux paramètres ω et ω', on obtient le résultat.

Supposons le résultat vrai pour toute famille de $n-1$ arêtes, et toutes les fonctions croissantes $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ sur cette famille. Posons $\mathcal{F} = \sigma(e_1 \dots e_{n-1})$, $\tilde{X} = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ et de même pour $\tilde{Y}$. On obtient ainsi deux fonctions de l'arête e_n. En utilisant directement le cas à une arête, on a $\mathbb{E}\left[\tilde{X}\tilde{Y}\right] \geq \mathbb{E}\left[\tilde{X}\right]\mathbb{E}\left[\tilde{Y}\right] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

En outre, on peut voir X et Y comme des fonctions dans $\{0,1\}^n \to \mathbb{R}$. Définissons la variable $X_0(\omega(e_1),\ldots,\omega(e_{n-1})) = X(\omega(e_1),\ldots,\omega(e_{n-1}),0)$ et de même X_1, Y_0 et Y_1. On obtient ainsi quatre variables croissantes, fonctions de $n-1$ arêtes. On a alors $\mathbb{E}[X_0Y_0] \geq \mathbb{E}[X_0]\mathbb{E}[Y_0]$. En remarquant que $X = X_{\omega(e_n)}$ et de même pour Y, on peut enfin emboiter ces différentes inégalités pour obtenir celle souhaitée.

Pour passer au cas général, on considère une énumération $(e_n)_{n\geq 0}$ de E^d et $\mathcal{F}_n$ la filtration induite. Dans ce cas, les variables $X_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$ et Y_n vérifient l'inégalité $\mathbb{E}[X_nY_n] \geq \mathbb{E}[X_n]\mathbb{E}[Y_n]$. Par construction, (X_n) et (Y_n) sont des martingales L^2, donc par théorèmes de convergence :

$$\mathbb{E}[XY] = \langle X, Y\rangle_{L^2} = \lim \mathbb{E}[X_nY_n] \geq \lim \mathbb{E}[X_n]\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]\,.$$

□

Remarque 9 :
On obtient la même inégalité en considérant deux variables décroissantes. Si une des deux variables est croissante, et l'autre décroissante, alors on a l'inégalité inverse.

Corollaire 10 (Évènements croissants) **:**
Un évènement $A \in \mathcal{F}$ est croissant lorsque sa fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ l'est. Lorsque deux évènements A et B sont croissants, on a $P(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

De même, si A et B sont décroissants, alors $\mathbb{P}(A\cap B) \geq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

2.2 Inégalité BK

Définition 11 :
Pour $H \subset E^d$ on définit l'évènement $O_H = \{\omega,\, H \subset E_p(\omega)\}$.

Autrement dit, pour tout graphe H, O_H est l'ensemble des graphes qui le contiennent.

Définition 12 (Occurrences disjointes) **:**
Soient $A, B \in \mathcal{F}$ des évènements croissants. On introduit la notion de *disjoint occurrence* :

$$A \circ B := \{\omega \in \Omega,\, \exists H_A \sqcup H_B \subset E_p,\, O_{H_A} \subset A,\, O_{H_B} \subset B\}\,.$$

Informellement, $A \circ B$ est l'ensemble des graphes pour lesquels l'évènement croissant A est satisfait par une partie H_A et B par H_B, avec H_A et H_B sans arrêtes en commun.

Théorème 13 (Inégalité de Berg-Kesten, 1985) **:**

Si A et B sont croissants et dépendent d'un nombre fini d'arêtes, alors $\mathbb{P}(A \circ B) \leq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Démonstration. Voir *Percolation*, Grimmett. $\square$

Corollaire 14 :

On a $\mathbb{P}(\{x \leftrightarrow y\} \circ \{u \leftrightarrow v\}) \leq \mathbb{P}(x \leftrightarrow y)\mathbb{P}(u \leftrightarrow v)$.

L'évènement $\{x \leftrightarrow y\} \circ \{u \leftrightarrow v\}$ s'interprète comme l'ensemble des graphes où on peut relier par deux chemins disjoints $x \leftrightarrow y$ et $u \leftrightarrow v$, sans utiliser d'arêtes en commun.

Démonstration. A priori, ces évènements dépendent d'une infinité de variables car un chemin reliant x et y peut être arbitrairement long.

Considérons une famille croissante de sous-ensembles de E^d, de sorte que $\bigcup E^{(n)} = E^d$. On pose $A_n = \left\{x \overset{E^{(n)}}{\leftrightarrow} y\right\}$ et de même pour B_n. On peut utiliser le théorème sur les évènements A_n et B_n, puis passer à la limite $n \to \infty$.

Il est clair qu'on a la convergence monotone de $A_n \to A$, $B_n \to B$ et $A_n \circ B_n \to A \circ B$ de façon purement ensembliste. Pour tout $\omega \in A \circ B$ par exemple, les chemins $x \leftrightarrow y$ et $u \leftrightarrow v$ considérés ne dépendent que d'un nombre fini d'arêtes, incluses dans $E^{(n)}$ à partir d'un rang, donc à partir d'un rang on a $\omega \in A^{(n)} \circ B^{(n)}$. $\square$

Remarque 15 :

L'opérateur $\circ$ est commutative et associative. On peut donc généraliser le théorème précédent à toute famille finie d'évènements croissants.

Remarque 16 (Reimer, 1997) **:**

On peut en réalité voir les inégalité FKG et BK comme des cas particuliers d'une inégalité plus générale, qui s'applique à des évènements quelconques : l'inégalité de Reimer.

Définition 17 (Bord intérieur) **:**

Soit $S \subset \mathbb{Z}^d$. On définit le bord intérieur de S par $\partial S = \{x \in S, \exists y \notin S, \|x - y\|_1 = 1\}$.

Corollaire 18 :

Soit $S \subset \mathbb{Z}^d$ fini, tel que $0 \in S$ et $x \notin S$. Alors $\mathbb{P}(0 \leftrightarrow x) \leq \sum_{y \in \partial S} \mathbb{P}\left(0 \overset{S}{\longleftrightarrow} y\right)\mathbb{P}(y \leftrightarrow x)$.

Démonstration avec BK. Soit $n \geq 1$ tel que $S \cup \{x\} \subset B_n := [\![-n, n]\!]^d$. Alors on a l'inclusion $\left\{0 \overset{B_n}{\leftrightarrow} x\right\} \subset \bigcup_{y \in \partial S} \left\{0 \overset{S}{\leftrightarrow} y\right\} \circ \left\{y \overset{B_n}{\leftrightarrow} x\right\}$, où y est le premier point de ∂S atteint par le chemin de 0 à x. On peut appliquer le théorème à chaque terme de droite, puis passer à la limite $n \to \infty$ dans l'inégalité pour conclure. $\square$

Démonstration sans BK. On considère l'ensemble aléatoire $C = \left\{y \in S,\, 0 \overset{S}{\leftrightarrow} y\right\}$, le cluster de 0 dans $G_p \cap S$.

Lorsque $0 \leftrightarrow x$, on peut en particulier prendre un chemin de 0 à x qui se déplace dans le cluster restreint C, puis en sort sans y revenir. On a donc $\{0 \leftrightarrow x\} = \bigcup_{y \in \partial S} \left\{0 \overset{C}{\leftrightarrow} y\right\} \cap \left\{y \overset{\mathbb{Z}^d \setminus C}{\leftrightarrow} x\right\}$. On en déduit alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(0 \leftrightarrow x) &\leq \sum_{y \in \partial S} \sum_{D \subset S} \mathbb{P}\left(0 \overset{D}{\leftrightarrow} y,\, y \overset{\mathbb{Z}^d \setminus D}{\leftrightarrow} x,\, C = D\right) \\
&= \sum_{y \in \partial S} \sum_{D \subset S} \mathbb{P}\left(0 \overset{D}{\leftrightarrow} y,\, C = D\right) \mathbb{P}\left(y \overset{\mathbb{Z}^d \setminus D}{\leftrightarrow} x\right) \\
&\leq \sum_{y \in \partial S} \mathbb{P}(x \leftrightarrow y) \sum_{D \subset S} \mathbb{P}\left(0 \overset{C}{\leftrightarrow} y,\, C = D\right) \\
&= \sum_{y \in \partial S} \mathbb{P}(x \leftrightarrow y) \mathbb{P}\left(0 \overset{S}{\leftrightarrow} y\right),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire le résultat souhaité. □

2.3 Formule de Russo

Définition 19 (Arête pivot) **:**

Pour une arête e et un graphe $\omega \in \Omega$, on définit $\pi_e(\omega) \in \Omega$ comme le graphe ω où on a inversé l'état de l'arrête e, en l'ajoutant si elle était absente ou en la retirant si elle était présente.

Naturellement, π_e est une involution bimesurable sur Ω.

L'arête $e \in E^d$ est pivot pour $A \in \mathcal{F}$ dans la configuration $\omega \in \Omega$ lorsque $\mathbb{1}_A(\omega) \neq \mathbb{1}_A(\pi_e(\omega))$.

Définition 20 :

On définit l'évènement $\mathrm{Piv}_e(A) = \partial_e A = \{\omega,\, e \text{ pivot de } A\}$, l'ensemble des graphes pour lesquels e est pivot pour A.

Lorsque e est pivot pour un évènement croissant A dans la configuration ω, cela signifie que A que A se réalise ssi $\omega(e) = 1$.

Théorème 21 (Formule de Margulis-Russo, 1974-1978) **:**

Soit A un évènement croissant à support fini $E \subset E^d$. Dans ce cas :

$$\partial_p \mathbb{P}_p(A) = \mathbb{E}_p[N(A)] = \sum_{e \in E} \mathbb{P}_p(\partial_e A)$$

où $N(A)$ est le nombre d'arêtes pivot pour A dans la configuration ω.

Démonstration. Il est clair que $p \mapsto \mathbb{P}_p(A)$ est une fonction polynômiale en p, donc l'application est en particulier dérivable, l'énoncé considéré à un sens.

On peut énumérer $E = (e_i)_{1\leq i\leq n}$. Comme l'évènement A dépend de ces n arêtes, il existe $f : [0,1]^n \to [0,1]$ telle que $\mathbb{1}_A(\omega) = f(\omega(e_1), \dots, \omega(e_n))$. En se plaçant dans notre couplage $(G_p)_{p\in[0,1]}$ croissant, on a alors $\mathbb{P}_p(A) = \mathbb{E}\left[f\left(\mathbb{1}_{U_{e_1}\leq p}, \dots, \mathbb{1}_{U_{e_n}\leq p}\right)\right]$. On peut généraliser cette expression en :

$$F(p_1, \dots, p_n) = \mathbb{E}\left[f\left(\mathbb{1}_{U_{e_1}\leq p_1}, \dots, \mathbb{1}_{U_{e_n}\leq p_n}\right)\right] \in \mathbb{R}[p_1, \dots, p_n] .$$

On a en particulier $\mathbb{P}_p(A) = F(p, \dots, p)$ et donc $\partial_p \mathbb{P}_p(A) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i F(p, \dots, p)$.

Montrons que $\partial_i F(p, \dots, p) = \mathbb{P}_p(\partial_{e_i} A)$. Soit $\delta > 0$. Par croissance de la propriété, on a $F(p, \dots, p+\delta, \dots, p) \geq F(p, \dots, p)$. En outre, pour tout choix de valeurs $(U_{e_i})_{1\leq i\leq n}$, f ne peut passer de 0 à 1 que lorsque l'arrête e_i est un pivot de A dans les graphes considérés. Plus précisément, pour que f change de valeur, il faut que e_i soit absent du graphe pour le paramètre p mais présent pour le paramètre $p+\delta$. Autrement dit :

$$\begin{aligned} F(\dots, p+\delta, \dots) - F(\dots, p, \dots) &= \mathbb{E}\left[f\left(\mathbb{1}_{\dots, \mathbb{1}_{U_{e_i}\leq p+\delta}, \dots}\right) - f\left(\mathbb{1}_{\dots, \mathbb{1}_{U_{e_i}\leq p}, \dots}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{p<U_i\leq p+\delta} \times \mathbb{1}_{e_i \text{ pivot pour } A \text{ dans } G_p}\right] . \end{aligned}$$

Le fait que e_i soit pivot dans G_p dépend de toutes les autres arêtes, donc des variables $(U_j)_{j\neq i}$, mais est indépendant de U_i, donc :

$$F(\dots, p+\delta, \dots) - F(\dots, p, \dots) = \mathbb{P}(p < U_i \leq p+\delta)\mathbb{P}_p(\partial_{e_i} A) = \delta \mathbb{P}_p(\partial_{e_i} A) ,$$

d'où le résultat souhaité. $\square$

Remarque 22 (Démonstration alternative) **:**

On peut également montrer le résultat précédent par calcul brutal, en explicitant le polynôme $\mathbb{P}_p(A)$ puis en calculant sa dérivée.

Remarque 23 (Cas infini) **:**

Lorsque A dépend d'un nombre infini d'arêtes, en suivant le même schéma de preuve, on obtient $\varliminf_{\delta\to 0^+} \frac{\mathbb{P}_{p+\delta}(A) - \mathbb{P}_p(A)}{\delta} \geq \mathbb{E}_p[N(A)]$.

Remarque 24 (Inégalité de croissance) **:**

Soit A un évènement croissant à support fini E. Comme on l'a dit, les évènements $\{e \in G_p\}$ et $\partial_e A$ sont indépendants, donc $\mathbb{P}_p(\partial_e A) = \frac{1}{p}\mathbb{P}_p(\partial_e A \cap \{e \in G_p\}) = \frac{1}{1-p}\mathbb{P}_p(\partial_e A \cap \{e \notin G_p\})$. Par la formule de Russo, $\partial_p \mathbb{P}_p(A) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_p(\partial_e A \cap A) = \mathbb{P}_p(A) \times \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_p(\partial_e A | A)$. Autrement dit, $\partial_p[\ln(\mathbb{P}_p(A))] = \frac{1}{p}\mathbb{E}_p[N(A)|A]$.

Comme $\mathbb{E}_p[N(A)|A] \leq |E| = n$, pour $p < q$ on a alors l'inégalité :

$$\mathbb{P}_q(A) = \mathbb{P}_p(A) \exp\left(\int_p^q \frac{1}{r}\mathbb{E}_r[N(A)|A]dr\right) \leq \mathbb{P}_p(A) \times \left(\frac{q}{p}\right)^n.$$

3 Régime sous-critique

Soit $p < p_c(d)$ pour $d \geq 2$. On souhaite étudier les queues du rayon de $\mathcal{C}_p(0)$.

Définition 25 (Boule, sphère pour la norme ∞) **:**
On a déjà introduit la boule $B_n = [\![-n, n]\!]^d$ de rayon n. On considère $S_n = B_n \backslash B_{n-1}$ la sphère associée. Remarquons que les sphères partitionnent l'espace, $\mathbb{Z}^d = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$.

Définition 26 (Rayon de la composante de 0) **:**
Soit l'évènement $A_n = \{0 \leftrightarrow S_n\} = \{\mathcal{C}(0) \cap S_n \neq \emptyset\} = \left\{ \sup_{x\in\mathcal{C}(0)} \|x\|_\infty \geq n \right\}$.

La famille (A_n) est décroissante pour l'inclusion, et à la limite on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{|\mathcal{C}(0)| = \infty\}$.

Théorème 27 :
Si $p < p_c$ alors il existe $c(p,d) > 0$ telle que $\mathbb{P}_p(A_n) \leq e^{-cn}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'autre part, il existe $c'(d) > 0$ telle que, pour tout $p > p_c$, on a $\Theta(p) \geq c' \times (p - p_c)$.

Démonstration. Posons ici $\Theta_n(p) = \mathbb{P}_p(A_n)$. C'est une suite d'applications croissantes, qui converge simplement vers Θ, de façon décroissante.

Pour tout ensemble $S \subset \mathbb{Z}^d$, on définit $\Delta S = \big\{\{x,y\} \in E^d,\ x \in S,\ y \notin S\big\}$ l'ensemble des arêtes à cheval entre S et S^c. On définit alors $\varphi_p(S) = p \sum_{\{x,y\}\in\Delta S} \mathbb{P}_p\Big(0 \overset{S}{\leftrightarrow} x\Big)$. En particulier, si $0 \notin S$, alors $\varphi_p(S) = 0$. L'application $p \mapsto \varphi_p(S)$ est croissante pour tout choix de S. On introduit un nouveau seuil critique, défini par $\widetilde{p_c} = \sup\big\{p \in [0,1],\ \exists S \subset \mathbb{Z}^d \text{ fini},\ 0 \in S,\ \varphi_p(S) < 1\big\}$. On va désormais utiliser les deux lemmes ci-dessous, pour montrer que $p_c = \widetilde{p_c}$ en particulier.

Si $p < \widetilde{p_c}$, alors par le premier lemme, on a $\Theta_n(p) \leq e^{-cn} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier, à la limite, $\Theta(p) = 0$, d'où $p \leq p_c$. Il en découle $\widetilde{p_c} \leq p_c < 1$, et le premier point sous réserve d'égalité. Notons au passage que, avec $S = \{0\}$, on vérifie que $\widetilde{p_c} > 0$.

Montrons désormais que $\Theta_n(p) \geq c'(d)(p - \widetilde{p_c})$ pour $p > \widetilde{p_c}$. Si on a cette minoration, alors en particulier $\Theta(p) \geq c'(d)(p - \widetilde{p_c}) > 0$ à a limite, donc $p_c = \widetilde{p_c}$, d'où finalement le résultat souhaité. Pour un tel p, pour tout $S \subset \mathbb{Z}^d$ fini contenant 0, on a $\varphi_p(S) \geq 1$. Par le second lemme :

$$\Theta_n'(p) = \frac{\mathbb{E}_p[\varphi_p(\mathcal{S})]}{p(1-p)} = \frac{\mathbb{E}_p[\varphi_p(\mathcal{S})\mathbb{1}_{0\in\mathcal{S}}]}{p(1-p)} \geq \frac{\mathbb{P}_p(0 \in \mathcal{S})}{p(1-p)} = \frac{1-\Theta_n(p)}{p(1-p)},$$

et donc $\partial_p\Big[\ln\Big(\frac{1}{1-\Theta_n(p)}\Big)\Big] \leq \partial_p\Big[\ln\Big(\frac{p}{1-p}\Big)\Big]$. En intégrant l'inégalité, $\Theta_n(p) \geq \frac{p-\widetilde{p_c}}{\widetilde{p_c}(1-\widetilde{p_c})}$. On a donc bien la propriété souhaitée avec $c'(d) = \frac{1}{\widetilde{p_c}(1-\widetilde{p_c})}$, bien défini car on a établi $0 < \widetilde{p_c} < 1$ a priori. $\square$

Lemme 28 :

Soit $S \subset \mathbb{Z}^d$ fini, contenant 0, tel que $\varphi_p(S) < 1$.

Alors il existe $c(p,d) > 0$ telle que $\Theta_n(p) \leq e^{-cn}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Pour un tel S, on a un rayon L tel que $S \subset B_{L-1}$. En conséquence, pour $k > 0$, par le corollaire de BK, on a :

$$\Theta_{kL}(p) \leq p \sum_{\{x,y\} \in \Delta S} \mathbb{P}_p\left(0 \overset{S}{\leftrightarrow} x\right) \mathbb{P}_p(y \leftrightarrow S_{kL}) \,.$$

Quitte à translater par y, chaque facteur de droite est majorable par $\Theta_{(k-1)L}(p)$, donc $\Theta_{kL}(p) \leq \varphi_p(S)\Theta_{(k-1)L}(p)$, et par induction $\Theta_{kL}(p) \leq \varphi_p(S)^k$. On en déduit une constante $c(p,d) > 0$ telle que $\Theta_n(p) \leq e^{-cn}$ lorsque $n = kL$. Par décroissance de la suite $(\Theta_n(p))_{n\in\mathbb{N}}$, quitte à prendre une constante plus faible, on peut étendre le résultat à tout rang $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Lemme 29 :

Pour $n \geq 1$, posons $\mathcal{S} = \{z \in B_n,\, z \not\leftrightarrow S_n\}$. Par définition, on a $A_n = \{0 \notin \mathcal{S}\}$. Alors :

$$\partial_p \Theta_n(p) = \frac{1}{p(1-p)} \mathbb{E}_p[\varphi_p(\mathcal{S})] \,.$$

Démonstration. Posons $E_n = \big\{\{x,y\} \in E^d,\, x, y \in B_n\big\}$. On applique alors la formule de Russo :

$$\begin{aligned}
\Theta_n'(p) &= \sum_{e \in E_n} \mathbb{P}_p(\partial_e A_n) \\
&= \frac{1}{1-p} \sum_{e \in E_n} \mathbb{P}_p(\partial_e A_n,\, e \notin G_p) \\
&= \frac{1}{1-p} \sum_{\{x,y\} \in E_n} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow x,\, 0 \not\leftrightarrow S_n,\, y \leftrightarrow S_n) \\
&= \frac{1}{1-p} \sum_{S \subset B_n} \sum_{\{x,y\} \in \Delta S} \mathbb{P}_p\left(0 \overset{S}{\leftrightarrow} x, \mathcal{S} = S\right) \\
&= \frac{1}{1-p} \sum_{S \subset B_n} \left(\sum_{\{x,y\} \in \Delta S} \mathbb{P}_p\left(0 \overset{S}{\leftrightarrow} x\right)\right) \mathbb{P}_p(\mathcal{S} = S) \\
&= \frac{1}{1-p} \sum_{S \subset B_n} \frac{\varphi_p(S)}{p} \mathbb{P}_p(\mathcal{S} = S) \\
&= \frac{1}{p(1-p)} \mathbb{E}_p[\varphi_p(\mathcal{S})] \,.
\end{aligned}$$

$\square$

Remarque 30 :

On utilise ici une preuve récente de Hugo Duminil-Copin et Vincent Tassion. Pour des preuves plus classiques – et compliquées – comme celles de Menshikov ou Aizenman et Basky, on pourra se référer au Grimmet.

Corollaire 31 :

Soit $0 < p < p_c$. Alors $\mathbb{E}_p[|\mathcal{C}(0)|] < \infty$.

Démonstration. Posons $M = \sup\{\|x\|_\infty, \, x \in \mathcal{C}(0)\}$ finie presque-sûrement. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p[|\mathcal{C}(0)|] &= \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}_p[|\mathcal{C}(0)|\mathbb{1}_{M=n}] \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (2n+1)^d \mathbb{P}_p(M=n) \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (2n+1)^d \mathbb{P}_p(A_n) \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (2n+1)^d e^{-cn} \\ &< \infty \,. \end{aligned}$$

□

Remarque 32 :

On aurait pu définir $\widehat{p_c} = \sup\{p, \, \mathbb{E}_p\{|\mathcal{C}(0)|\} < \infty\}$, puis constater que $\widehat{p_c} = p_c$.

Remarque 33 :

On a une minoration linéaire sur Θ après p_c.

Lorsque $p > p_c$, on sait que pour $d \geq 19$ (Hara, Slade, 1994), il existe une constante $c'(d)$ tel que $\Theta(p) - \Theta(p_c) \leq c' \times (p - p_c)$. Le résultat a plus récemment été étendu à $d \geq 11$, et on s'attend actuellement à ce qu'il soit vrai pour $d \geq 7$.

D'autre part, pour $d = 2$ (Kester, Zhang, 1987), il existe $c > 0$ et $0 < b < 1$ telles que $c(p-p_c)^b \geq \Theta(p) - \Theta(p_c)$.

Lemme 34 (Fekete) **:**

Soit (a_n) une suite sous-additive : $\forall m, n \in \mathbb{N}\,, a_{n+m} \leq a_n + a_m$. Alors la suite $\left(\frac{a_n}{n}\right)$ converge, et on a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$.

Corollaire 35 :

Pour $p < p_c$, on a $\frac{\ln(\mathbb{P}_p(A_n))}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\psi(p) < 0$.

$\xi = \frac{1}{\psi}$ est appelée la longueur de corrélation, c'est la distance typique dont on doit s'éloigner de 0 pour « remarquer » la décroissance exponentielle de $\Theta_n(p)$.

Démonstration. Si la limite existe, la majoration du théorème nous garantit son signe. On va donc exhiber une suite sous-additive pour appliquer le lemme de Fekete. En utilisant l'inégalité

BK, on a $\mathbb{P}(A_{n+m}) \leq \sum_{x\in S_n} \mathbb{P}(0 \leftrightarrow x)\mathbb{P}(x \leftrightarrow S_{n+m}) \leq |S_n| \times \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(A_m)$.

Posons alors $g(n) = \ln\big(c(d)n^{d-1}\big)$, avec $c(d)$ telle que $|S_n| \leq c(d)n^{d-1}$. Lorsque $m \leq n$, on a :

$$g(n+m) - g(n) \leq g(2n) - g(n) \leq (d-1)\ln(2) =: c'(d)\,.$$

Posons $a_n = \ln(\mathbb{P}_p(A_n)) + g(n) + c'(d)$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} a_{n+m} & \leq & \ln(\mathbb{P}_p(A_{n+m})) + g(n) + 2c'(d) \\ & \leq & \ln(\mathbb{P}_p(A_n)) + \ln(\mathbb{P}_p(A_m)) + g(m) + g(n) + 2c'(d) \\ & = & a_n + a_m\,. \end{array}$$

Par le lemme de Fekete, $\left(\frac{a_n}{n}\right)$ converge, or $g(n)+c'(d) = o(n)$ d'où la convergence souhaitée. □

4 Régime sur-critique

Si $p > p_c$, il existe p.s. un cluster infini. On s'intéresse ici à l'unicité de cette composante.

4.1 Unicité du cluster infini

Lemme 36 (Ergodicité de la mesure $\mathbb{P}$ sous l'action de t_x) **:**

Pour $x \in \mathbb{Z}^d$, on pose t_x la translation qui translate toutes les arrêtes de G. Cette opérateur agit sur l'espace probabilisé Ω, en laissant invariante la mesure $\mathbb{P}$. Soit $A \in \mathcal{F}$ un évènement invariant par translation ($\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A \circ t_x$). Alors $\mathbb{P}_p(A) \in \{0,1\}$.

Démonstration. On va montrer $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A)^2$. On peut approcher A à ε près par B à support fini, de sorte que $\mathbb{P}(A\Delta B) \leq \varepsilon$. Dans ce cas, pour x assez grand, $B + x$ et B ne dépendent d'aucune arête en commun, et t_x préserve la mesure, donc $\mathbb{P}(B \cap \{B+x\}) = \mathbb{P}(B)^2$. Alors :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\cap A) = \mathbb{P}(A\cap\{A+x\}) \leq \mathbb{P}(B\cap\{B+x\}) + 2\varepsilon \leq (\mathbb{P}(A)+\varepsilon)^2 + 2\varepsilon\,,$$

d'où le résultat pour $\varepsilon \to 0$. □

Théorème 37 (Burton, Keane, 1989) **:**

Si $p > p_c$ et $d \geq 2$ alors G_p a un unique cluster infini presque-sûrement.

Démonstration. Notons N le nombre de clusters infinis. La variable N est bien mesurable, car les évènements $\{N \geq k\}$ le sont : il suffit de vérifier qu'on a k composantes arbitrairement grandes, qui ne se rencontrent jamais sur les boules B_n, ce qui peut s'exprimer avec des unions et intersections dénombrables d'évènements à support fini.

En outre, la variable N est invariante sous l'action de toute translation. Par ergodicité, $N \in \overline{\mathbb{N}^*}$ est constante presque-sûrement.

Pour $B \subset \mathbb{Z}^d$ fini, on pose M_B le nombre de clusters infinis qui rencontrent B. $N_{B,0}$ est le nombre de clusters infinis dans G_p où on retire les arrêtes dont les deux extrémités sont dans B. On définit de même $N_{B,1}$ le nombre de clusters infinis dans G_p où on garde toutes les arrêtes de B. Naturellement, $N_{B,1} \leq N \leq N_{B,0}$. $N_{B,0}$ a la loi de N_B pour la mesure conditionnelle $\mathbb{P}_p(\cdot|\{\omega|_B = 0\})$, et il en va de façon analogue pour $N_{B,1}$.

Montrons désormais que pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, on a $\mathbb{P}(N = k) < 1$, et donc $\mathbb{P}(N = k) = 0$. Supposons par contradiction que $\mathbb{P}(N = k) = 1$. Comme $N_{B,1}$ a la loi conditionnée d'une variable constante presque-sûrement, on en déduit $\mathbb{P}(N_{B,1} = k) = 1$ et il en va de même pour $N_{B,0}$. On a donc $N_{B,0} = N_{B,1}$ presque-sûrement. Si deux composantes infinies disjointes traversaient B ($M_B \geq 2$), alors elles seraient en réalité une même composante dans $N_{B,1}$, disjointes dans $N_{B,0}$, d'où $N_{B,0} > N_{B,1}$. Autrement dit, $\mathbb{P}(M_B \geq 2) = 0$. En considérant la suite de boules B_n, par limite croissante, on a $\mathbb{P}(N \geq 2) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse. On s'est ramené à $N \in \{1, \infty\}$.

D'après l'étude de cas ci-après, $N < \infty$ presque-sûrement, ce qui conclut la preuve. $\square$

4.2 Étude du cas $N = \infty$

Définition 38 (Trifurcation) **:**
Le sommet $x \in \mathbb{Z}^d$ est une trifurcation de G lorsque :
— x appartient à un cluster infini,
— x est l'extrémité de précisément 3 arêtes de G,
— si on retire ces 3 arêtes de G, on sépare le cluster en 3 clusters infinis disjoints.

Définition 39 :
Soit $T_x = \{x \text{ est une trifurcation}\}$. Par invariance par translation, on a $\mathbb{P}(T_x) = \mathbb{P}(T_0)$.

Lemme 40 :
Si $N = \infty$, alors $\mathbb{P}(T_0) > 0$.

Démonstration. Soit $M_{B,0}$ le nombre de clusters infinis qui atteignent B, une fois qu'on a retiré toutes les arêtes intérieures. Si on appelle $\omega^0 \in \Omega$ ce graphe, on a $M_{B,0}(\omega) = M_B(\omega^0) \geq M_B(\omega)$.

Si $B_n = [\![-n, n]\!]^d$, alors $\mathbb{P}(M_{B_n} \geq 3) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(N \geq 3) = 1$ par hypothèse. Soit donc n assez grand, pour lequel $\mathbb{P}(M_{B,0} \geq 3) \geq \frac{1}{2}$.

Pour tout $\omega \in \{M_{B,0} \geq 3\}$, on a trois sommets $x, y, z \in S_n$ sur la sphère reliés aux 3 clusters infinis disjoints dans ω^0. On peut ainsi définir une application $\omega \mapsto X(\omega)$, de même pour Y et Z. Vérifier que ces applications sont mesurables n'est pas trivial, mais découle du nombre fini de valeurs possibles, et du fait que on peut voir X comme limite de variables qui ont, elles, un support fini. On peut donc voir X, Y et Z comme des variables aléatoires, fonctions des arêtes *extérieures* à B.

Pour tous triplet de points $x, y, z \in S_n$ distincts, on peut choisir trois chemins $0 \longrightarrow x$, $0 \longrightarrow y$ et $0 \longrightarrow z$, tous trois à sommets intermédiaires inclus dans B_{n-1}, sans autre sommet en commun que 0. On définit alors l'évènement $I_{x,y,z}$ pour lequel les trois chemins précédents sont dans le graphe, mais aucune autre arête interne de B. Si on pose $E(B) = \big\{\{x, y\} \in E^d,\ x, y \in B\big\}$ les arêtes intérieures à B, alors $\mathbb{P}(I_{x,y,z}) \geq \min(p, 1-p)^{|E(B)|} > 0$. Cet évènement dépend des arêtes *intérieures* à B, quelles que soient les valeurs de x, y, z fixés.

En particulier, $\mathbb{P}(T_0) \geq \mathbb{P}(\{M_{B,0} \geq 3\} \cap I_{X,Y,Z}) \geq \mathbb{P}(M_{B,0} \geq 3) \times \min\limits_{x\neq y\neq z\in S^n} \mathbb{P}(I_{x,y,z}) > 0.$ $\square$

Pour conclure l'étude du cas $N = \infty$, on va formaliser l'idée intuitive qui dit que $\mathbb{Z}^d$ est trop « petit » pour contenir un arbre 3-régulier infini, c'est-à-dire notre composante infinie et toutes ses trifurcations.

Définition 41 (Partitions compatibles) **:**

Soit Y un ensemble fini tel que $|Y| \geq 3$. Une 3-partition de Y est un triplet $\pi = \{P_1, P_2, P_3\}$ de parties non vides, tel que $Y = P_1 \sqcup P_2 \sqcup P_3$.

Deux 3-partitions π et π' sont *compatibles* si, quitte à choisir un ordre sur les éléments de π et de π', on a $P_2' \sqcup P_3' \subset P_1$ – ou de façon équivalente $P_2 \sqcup P_3 \subset P_1'$.

Lemme 42 :

Soit $\mathcal{P}$ une famille de 3-partitions de Y compatibles. Alors $|\mathcal{P}| \leq |Y| - 2$.

Démonstration. Si $|Y| = 3$, il n'existe qu'une 3-partition de Y, donc $\mathcal{P} \leq 1$.

Supposons le résultat vrai pour tout ensemble Z de cardinal $3 \leq |Z| < |Y|$, et $|Y| > 3$. En particulier en choisissant un $y \in Y$, on a $Y = \{y\} \sqcup Z$.

Soit $\mathcal{P}' = \{\pi \in \mathcal{P},\ \{y\} \notin \pi\}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}$ pour lesquels $\{y\}$ n'est pas un des 3 ensembles de la partition. Tout élément $\pi \in \mathcal{P}'$ induit une 3-partition de Z en retirant y, qu'on note π'.

L'ensemble $\{\pi',\ \pi \in \mathcal{P}\}$ est une famille de 3-partitions de Z. En utilisant la compatibilité entre $\pi, \widetilde{\pi} \in \mathcal{P}'$, on constate directement la compatibilité entre π' et $\widetilde{\pi}'$. En conséquence, on a $|\mathcal{P}'| \leq |Z| - 2 = |Y| - 3$.

Il reste à vérifier que $|\mathcal{P} \backslash \mathcal{P}'| \leq 1$. Si $\{\{y\}, A_2, A_3\}$ et $\{\{y\}, B_2, B_3\}$ étaient compatibles, on aurait donc nécessairement $A_2 \sqcup A_3 \subset B_2$, par exemple, et donc $\{y\} \sqcup B_3 \subset A_3$, une contradiction, donc on a au plus une seule telle 3-partition dans $\mathcal{P}$. □

Proposition 43 :

On a $\mathbb{P}(N = \infty) < 1$.

Démonstration. Supposons $\mathbb{P}(N = \infty) = 1$. Pour tout $\omega \in \{N = \infty\}$, on considère un cluster $K(\omega)$ de $G(\omega) \cap B_n$. Si $x \in K \cap B_{n-1}$ est une trifurcation, l'effacement de x partitionne $K \cap S_n$ en 3 composantes non vides.

On peut vérifier que deux trifurcations $x \neq y \in K$ induisent des 3-partitions compatibles. On a donc $\sum_{x \in K \cap B_{n-1}} \mathbb{1}_{T_x} \leq |K \cap S_n| - 2 < |K \cap S_n|$. Quitte à sommer sur les clusters de B_n, on a finalement :

$$\sum_{x \in B_{n-1}} \mathbb{1}_{T_x} < |S_n|\,.$$

En passant à l'espérance, $c(n-1)^d \mathbb{P}(T_0) \leq c' n^{d-1}$. Autrement dit, on a $\mathbb{P}(T_0) = O\big(\frac{1}{n}\big)$, donc cette probabilité est nulle.

Ceci contredit le premier lemme, donc l'hypothèse $\mathbb{P}(N = \infty) = 1$ est fausse. □

4.3 Conséquences de l'unicité

Théorème 44 :
L'application $\Theta : p \mapsto \mathbb{P}_p(|\mathcal{C}(0)| = \infty)$ est continue sur $[0,1] \backslash \{p_c\}$.

Démonstration. Si $p < p_c$, l'application est évidemment constante, égale à 0.

On a $\Theta = \inf_{n \in \mathbb{N}} \Theta_n$ une limite décroissante d'applications continues, donc elle est semi-continue supérieurement : $\forall p \in [0,1]$, $\forall \delta > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall p' \in [p-\eta, p+\eta] \cap [0,1]$, $\Theta(p') \leq \Theta(p) + \delta$. Par croissance, Θ est donc continue à droite sur $[0,1]$.

Pour la continuité à gauche quand $p > p_c$, on va utiliser le couplage. En effet, les évènements $C_p = \{|\mathcal{C}_p(0)| = \infty\}$ forment une famille croissante d'évènements emboités. Si $\bigcup_{p'<p} C_{p'} = C_p$ presque-sûrement, alors on aura le résultat voulu par convergence monotone.

Quitte à travailler presque-sûrement, on peut supposer que pour $\alpha = \frac{p_c+p}{2}$, le graphe G_α a un unique cluster infini, que $B = \{N_\alpha = 1\}$ est réalisé. Soit $\omega \in C_p \bigcap_{p'<p} C_{p'}^c \cap B$. Par inclusion de graphes, a fortiori $G_p(\omega)$ a une unique composante infinie, qui contient 0 puisque C_p est réalisé. On a donc en particulier un chemin π de 0 à la composante infinie de $\mathcal{C}_\alpha$. En conséquence, dès que $p' > \frac{p+\max\left(\alpha, \max_{e\in\pi} U_e\right)}{2}$, le chemin π est dans $G_{p'}$, ce qui contredit $C_{p'}$. Ceci implique que le terme de droite est égal à p, donc que $\max_{e\in\pi} U_e = p$ précisément. On a donc l'inclusion :

$$\omega \in C_p \bigcap_{p'<p} C_{p'}^c \cap B \subset \bigcup_{e \in E^d} \{U_e = p\},$$

et l'évènement à droite est de probabilité nulle, d'où le résultat. □

5 Cas de la dimension 2

Lemme 45 ($\sqrt{\ }$-trick) **:**
Soient des évènements $A_1, \ldots, A_n$ croissants, tels que $\mathbb{P}(A_1) = \max_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$. On a alors :

$$\mathbb{P}_p(A_1) \geq 1 - \left(1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Démonstration. On utilise FKG sur la famille d'évènements décroissants $(A_i^c)_{1\leq i\leq n}$:

$$1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i^c\right) \geq \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i^c) = (1 - \mathbb{P}(A_1))^n.$$

□

Proposition 46 (Argument de Zhang, 1988) **:**
On a $\Theta\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. En conséquence, $p_c(2) \geq \frac{1}{2}$.

Démonstration. Soit $T_n = [\![0, n]\!]^2$. On pose $A^l(n)$, $A^r(n)$, $A^t(n)$ et $A^b(n)$ (pour *left*, *right*, *top* et *bottom*) les évènements croissants pour lesquels un sommet de la face de T_n en question est relié à l'infini par un chemin auto-évitant qui ne visite aucun autre sommet de T_n.

Lorsque $A'(n) := A^l(n) \cup A^r(n) \cup A^t(n) \cup A^b(n)$ est réalisé, quitte à considérer le dernier passage en T_{n+1} du chemin en question, on réaliser $A'(n+1)$. En conséquence, $\mathbb{1}_{A'(n)}$ est croissante.

Supposons que $\Theta\left(\frac{1}{2}\right) > 0$. Presque-sûrement, on a un unique cluster infini C. Quitte à translater de $(-n, -n)$, on a $\mathbb{P}(A'(2n)) = \mathbb{P}(B_n \cap C \neq \emptyset) \longrightarrow 1$. Par convergence monotone, on a donc $\mathbb{1}_{A'(n)}(\omega) = 1$ à partir d'un rang, presque-sûrement.

Pour ε fixé, on a un rang N à partir duquel la probabilité est minorée par $\mathbb{P}(A'(n)) \geq 1 - \varepsilon$.

En tant que translations et rotations les uns des autres, les quatre évènements croissants $A^i(n)$, avec $i \in \{l, r, t, b\}$, ont la même probabilité. Par le lemme précédent, on en déduit $\mathbb{P}(A^i(n)) \geq 1 - \sqrt[4]{1 - P(A'(n))} \geq 1 - \sqrt[4]{\varepsilon}$. On suppose par la suite que $\mathbb{P}(A^i(n)) > \frac{7}{8}$.

Sur le réseau dual $\mathbb{Z}^d + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, on pivote d'un quart de tour et on inverse toutes les arêtes de G_p pour obtenir une percolation loi G_{1-p}. Dans le cas $\frac{1}{2}$, ici, les deux percolations ont la même loi. On définit les variables A_d comme précédemment, mais pour l'existence de chemins dans la percolation duale. On a donc de même $\mathbb{P}(A_d^i(N)) > \frac{7}{8}$.

Soit maintenant $A = A^l(N) \cap A^r(N) \cap A_d^t(N) \cap A_d^b(N)$. On a $\mathbb{P}(A) > \frac{1}{2} > 0$. Par construction, l'évènement A ne dépend que des arêtes *externes* à T_n. Par unicité de la composante infinie, quand A est réalisé, les composantes infinies à gauche et à droite de T_n doivent être reliées, par un chemin qui ne peut contourner T_n ni dessus ni dessous, puisque $A_d^t(N)$ et $A_d^b(N)$ sont réalisés. A fortiori, T_n doit au moins avoir une arrête interne.

Notons $D = \{\omega, \forall e \in T_n^2, e \notin G_p\}$. Autrement dit, D est l'évènement pour lequel T_n n'a aucune arête interne. Alors D est de probabilité positive, indépendant de A, et on a donc :

$$\mathbb{P}(N \geq 2) \geq \mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(D) > 0\,,$$

donc une contradiction, d'où $\Theta\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. $\square$

Proposition 47 :
On a $p_c(2) \leq \frac{1}{2}$.

Démonstration. Soit $C(n) = (\llbracket 0, n+1 \rrbracket \times \llbracket 0, n \rrbracket, E)$ où E est l'ensemble des arêtes de E^2 internes à $C(n)$, *sauf* entre deux sommets x et y aux extrémités gauche ou droite du rectangle, tels que $x_1 = y_1 \in \{0, n+1\}$. On nomme ces rangées L (*left*) et R (*right*).

On définit le graphe dual $C_d(n) = \left(\llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket -1, n \rrbracket + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), E_d\right)$ où les sommets sont les centres de faces de $\mathbb{Z}^2$, reliés si les faces sont adjacentes, *sauf* lorsqu'ils sont dans la rangée du bas ($x_2 = y_2 = -\frac{1}{2}$) ou du haut ($x_2 = y_2 = n + \frac{1}{2}$). On nomme ces rangées T (*top*) et B (*bottom*).

Toute arête de $C_d(n)$ est une rotation d'une arête de $C(n)$. Par un argument topologique, si on considère un chemin de L à R dans $C(n)$ et de T à B dans $C_d(n)$, alors ces chemins se croisent, ils ont une arrête « en commun ».

On définit A_n comme l'évènement de l'existence d'un chemin entre L et R dans $G_p \cap C(n)$. On définit également B_n l'existence d'un chemin entre T et B dans $G_p^d \cap C_d(n)$ – rappelons que la percolation duale vérifie $G_p^d \overset{\mathrm{d}}{=} G_{1-p}$ ici. L'argument topologique précédent garantit que $A_n \cap B_n = \emptyset$. Plus précisément, on a même $\Omega = A_n \sqcup B_n$, autrement dit s'il n'y a pas de chemin L à R, c'est qu'il y a un « barrage », donc un chemin dual de T à B.

Pour tout paramètre p, on a $1 = \mathbb{P}_p(A_n) + \mathbb{P}_p(B_n)$. En outre, par dualité, quitte à faire une rotation qui préserve la mesure, on a $\mathbb{P}_p(B_n) = \mathbb{P}_{1-p}(A_n)$. Pour $p = \frac{1}{2}$ on a en particulier $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A_n) = \frac{1}{2}$.

Si on avait $p_c > \frac{1}{2}$, alors quitte à distinguer les n valeurs possibles prises par un chemin de L à R le long de l'axe vertical $x = 0$, on aurait la majoration $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A_n) \leq n\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(0 \leftrightarrow S_n) \leq ne^{-cn} \longrightarrow 0$, d'où une contradiction. $\square$

Théorème 48 (Kester) **:**
Pour le réseau carré $\mathbb{Z}^2$ muni de la percolation par arêtes, on a $p_c(2) = \frac{1}{2}$.

Remarque 49 :
Dans le cas général, on a la continuité à droite de Θ, et la continuité à gauche ailleurs qu'en p_c, donc la continuité de Θ est équivalente au fait que $\Theta(p_c) = 0$.

6 Théorème de renormalisation

On va s'intéresser ici à l'étude de propriétés au voisinage à droite de p_c, en se ramenant à un régime perturbatif avec $p \longrightarrow 1$.

Définition 50 (Cluster croisant) **:**
Soit $B_n = [\![-n, n]\!]^d$. On considère $\mathcal{C}$ un cluster de $G_p \cap B_n$.

On dit que $\mathcal{C}$ est un cluster *croisant* si il relie les faces opposées deux à deux ; autrement dit si pour tout $1 \leq i \leq d$, on a $x, y \in \mathcal{C}$ tels que $x_i = -n$ et $y_i = n$.

En particulier, si $\mathcal{C}$ est croisant, alors $\text{diam}(\mathcal{C}) := \sup_{x,y \in \mathcal{C}} \|x - y\|_\infty = 2n$.

Définition 51 (Bonne boite) **:**
Soient $0 < p < 1$, $d \geq 2$ et $\varepsilon > 0$. On dit que B_n est ε-bonne dans la configuration $\omega \in \Omega$ lorsqu'il existe un cluster $\mathcal{C}$ de $G_p \cap B_n$ tel que :

1. $\mathcal{C}$ est croisant,
2. $\mathcal{C}$ est l'unique cluster de $G_p \cap B_n$ de diamètre n ou plus,
3. $|\mathcal{C}| \geq (1 - \varepsilon)\Theta(p)|B_n|$.

La troisième condition provient du fait que $\mathbb{E}\left[\sum_{x \in B_n} \mathbb{1}_{|\mathcal{C}(x)| = \infty}\right] = |B_n|\Theta(p)$, donc on veut informellement que $\mathcal{C}$ soit proche de la restriction de la composante infinie dans B_n.

Dans ce cas, on peut associer sans ambiguïté son unique cluster croisant à toute bonne boite.

Définition 52 :
On peut étendre la définition précédente aux boites $B_x(n) := nx + B_n = n \times B_x(1)$.

On introduit alors les variables $X_{\varepsilon,x}(n) = \mathbb{1}_{B_x(n) \text{ est } \varepsilon\text{-bonne}}$.

Lemme 53 :
Soient x et y tels que $y = x + e_i$ (où e_i est un vecteur de la base canonique).

Lorsque $X_{\varepsilon,x} = X_{\varepsilon,y} = 1$, notons $\mathcal{C}_x$ et $\mathcal{C}_y$ les clusters croisants associés. Alors $\mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y \neq \emptyset$.

Démonstration. On a $B_x(n) \cap B_y(n) = x + [\![-n, n]\!]^{i-1} \times [\![0, n]\!] \times [\![-n, n]\!]^{d-i}$. Comme $\mathcal{C}_y$ relie les deux faces de $B_y(n)$ sur la i-ième coordonnée, on a un chemin dans $\mathcal{C}_y \cap B_x(n)$ de diamètre au moins n, donc inclus dans $\mathcal{C}_x$. $\square$

Corollaire 54 :
Plus généralement, pour tout chemin $s : [\![1, k]\!] \to \mathbb{Z}^d$, si $X_{\varepsilon,s(i)} = 1$ pour tout $1 \leq i \leq k$, alors l'union $\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{C}_{s(i)}$ est connexe.

6.1 Théorèmes de couplage, de renormalisation

Définition 55 (Variables C-dépendantes) **:**

La famille $(Z_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ est C-dépendante si, pour deux parties quelconques $A, A' \subset Z^d$ telles que $d(A, A') := \inf_{x\in A,\, x'\in A'} \|x - x'\|_1 \geq C$, les familles $(Z_x)_{x\in A}$ et $(Z_x)_{x\in A'}$ sont indépendantes.

Proposition 56 :

Les variables $(X_{\varepsilon,x})_{x\in\mathbb{Z}^d}$ sont $3d$-dépendantes.

Démonstration. Si $\|x - y\|_1 \geq 3d$, alors en particulier $\|x - y\|_\infty \geq 3$ et donc $B_x(n) \cap B_y(n) = \emptyset$. Ainsi, si $d(A, A') \geq 3d$, les familles $(X_{\varepsilon,x})_{x\in A}$ et $(X_{\varepsilon,y})_{y\in A'}$ ne dépendent d'aucune arête en commun, donc elles sont indépendantes. $\square$

Les théorèmes suivants visent à formaliser le fait que, lorsque $p > p_c$, quitte à prendre $n(p)$ assez grand, les variables $(X_{\varepsilon,x})_{x\in\mathbb{Z}^d}$ dominent des variables iid $(Z_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$, avec $\mathbb{P}(Z_x = 1)$ proche de 1.

Théorème 57 (Liggett, Schonmann, Stacey, 1997) **:**

Soient $d \geq 2$ et $k > 0$ fixés. Dans ce cas, il existe un seuil $0 < c < 1$ et une fonction $\varphi :]c, 1[\to [0, 1]$ croissante, avec $\varphi(1^-) = 1$, qui satisfait la propriété suivante.

Pour toute famille $(Y_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ de variables k-dépendantes, à valeurs dans $\{0, 1\}$, si on a une minoration $\inf\{\mathbb{P}(Y_x = 1),\, x \in \mathbb{Z}^d\} = \delta > c$, alors il existe une mesure $\mathbb{Q}$ sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d} \times \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, un couplage, tel que en notant (X_x^1) et (X_x^2) les coordonnées canoniques :

1. $\mathbb{Q}$-presque-sûrement, $\forall x \in \mathbb{Z}^d$, $X_x^1 \geq X_x^2$,
2. $X^1 \overset{\mathrm{d}}{=} Y$,
3. $X_x^2 \overset{\mathrm{iid}}{\sim} \mathcal{B}(\varphi(\delta))$.

Démonstration. Notons $C_d(k) = B_{\|\cdot\|_1}(0, k)$. Pour $(\alpha, \rho) \in]0, 1[^2$ on considère le système :

$$\begin{cases} (1-\alpha)\alpha^{|C_d(k)|} \geq 1 - \delta\,, \\ (1-\alpha)(1-\rho)^{|C_d(k)|} \geq 1 - \delta\,. \end{cases}$$

Posons $c(d, k) = 1 - \sup_{\alpha\in[0,1]} \left((1-\alpha)\alpha^{|C_d(k)|}\right) \in]0, 1[$. Dès que $\delta > c(d, k)$, le système admet des solutions. En outre, on peut s'arranger pour avoir $\alpha(\delta) \underset{\delta\to 1^-}{\longrightarrow} 1$ de façon croissante, et de même pour $\rho(\delta)$. On pose alors $\varphi(\delta) = \alpha(\delta)\rho(\delta)$, qui est bien croissante avec $\varphi(1^-) = 1$.

Soit désormais une famille de variables Y qui satisfait les hypothèses pour un certain $\delta > c$. On pose les variables $Z_x \overset{\mathrm{iid}}{\sim} \mathcal{B}(\rho)$, indépendantes de Y.

Admettons pour l'instant l'existence d'un couplage auxiliaire pour ZY, tel que :

1. $\forall x \in \mathbb{Z}^d$, $X_x^1 \overset{\mathrm{p.s.}}{\geq} X_x^2$,
2. $X^1 \overset{\mathrm{d}}{=} ZY$,
3. $X_x^2 \overset{\mathrm{iid}}{\sim} \mathcal{B}(\varphi)$.

Quitte à enrichir l'espace, on peut de plus augmenter le couplage avec un troisième processus X^3, de sorte que $(X^1, X^3) \stackrel{\mathrm{d}}{=} (ZY, Y)$. On obtient alors le couplage souhaité avec le couple (X^2, X^3), puisque $X^3 \geq X^1 \geq X^2$.

Pour obtenir cet autre couplage, admettons que, pour tout rang $j \in \mathbb{N}$, toute suite injective $x_1, \ldots, x_{j+1} \in \mathbb{Z}^d$ et tout $z \in \{0,1\}^{j+1}$, lorsque $\mathbb{P}\big(ZY_{x_1} = z_1, \ldots, ZY_{x_j} = z_j\big) > 0$, on a la minoration :

$$\mathbb{P}\big(Y_{x_{j+1}} = 1 | ZY_{x_1} = z_1, \ldots, ZY_{x_j} = z_j\big) \geq \alpha \, .$$

Dans ce cas, par indépendance de Z, on a :

$$\mathbb{P}\big(Z_{x_{j+1}} Y_{x_{j+1}} = 1 | ZY_{x_1} = z_1, \ldots\big) = \rho \times \mathbb{P}\big(Y_{x_{j+1}} = 1 | \ldots, ZY_{x_j} = z_j\big) \geq \rho\alpha = \varphi \, .$$

On peut donc définir $g_j(z_1, \ldots, z_j) := \mathbb{P}(Y_{j+1} = 1 | Z_1 Y_1 = z_1, \ldots) \geq \varphi$. En partant d'une famille $U_x \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{U}([0,1])$, on pose $V_x^2 = \mathbb{1}_{U_x < \alpha\rho}$, $V_{x_1}^1 = \mathbb{1}_{U_{x_1} < g_0}$, et par induction $V_{x_{j+1}}^1 = \mathbb{1}_{U_{x_{j+1}} < g_j\left(V_{x_1}^1, \ldots, V_{x_j}^1\right)}$. Dans ce cas, on a bien le couplage voulu sur $V^1 \stackrel{\mathrm{d}}{=} ZY$ et V^2, et on a $V^1 \geq V^2$ car $g_j \geq \varphi$.

Reste donc à montrer que $\mathbb{P}\big(Y_{x_{j+1}} = 1 | \ldots\big) \geq \alpha$. On procède ici par induction sur j. Si $j = 0$, on a naturellement $g_0 \geq \delta$ par hypothèse initiale, et $\delta \geq \alpha$.

Supposons maintenant le résultat est vrai jusqu'au rang $J-1$ pour toute famille. Dans ce cas, on découpe $[\![1, J]\!] = N^0 \sqcup N^1 \sqcup M$ en trois parties, avec $N^0 = \{i \leq J, \, \|x_i - x_{J+1}\|_1 \leq k, \, z_i = 0\}$, $N^1 = \{i \leq J, \, \|x_i - x_{J+1}\|_1 \leq k, \, z_i = 1\}$, et $M = \{i \leq J, \, \|x_i - x_{J+1}\|_1 > k\}$. On définit alors les évènements $A_0 = \bigcap_{i \in N^0} \{Z_{x_i} Y_{x_i} = 0\}$, $A_1 = \bigcap_{i \in N^0} \{Z_{x_i} Y_{x_i} = 1\}$, $A = \bigcap_{i \in N^0} \{Z_{x_i} Y_{x_i} = z_i\}$ et enfin $B_0 = \bigcap_{i \in N^0} \{Z_{x_i} = 0\} \subset A_0$.

Par hypothèse, les familles $Y_{x_{J+1}}$ et $(Y_x)_{x \in M}$ sont indépendantes, donc $Y_{x_{J+1}}$ est indépendante de A. On a donc :

$$\begin{array}{rcl}
g_{J+1}(z_1, \ldots, z_J) & = & \mathbb{P}\big(Y_{x_{J+1}} = 1 | A \cap A_0 \cap A_1\big) \\
& = & 1 - \frac{\mathbb{P}\left(\left\{Y_{x_{J+1}} = 0\right\} \cap A \cap A_0 \cap A_1\right)}{\mathbb{P}(A \cap A_0 \cap A_1)} \\
& \geq & 1 - \frac{\mathbb{P}\left(\left\{Y_{x_{J+1}} = 0\right\} \cap A\right)}{\mathbb{P}(A \cap B_0 \cap A_1)} \\
& = & 1 - \frac{\mathbb{P}\left(\left\{Y_{x_{J+1}} = 0\right\}\right)}{(1-\rho)^{|N_0|}} \times \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A \cap A_1)} \\
& \geq & 1 - \frac{1-\delta}{(1-\rho)^{|N_0|}} \times \frac{1}{\mathbb{P}(A_1 | A)} \, .
\end{array}$$

Utilisons désormais l'hypothèse de récurrence pour minorer $\mathbb{P}(A_1 | A)$. Pour commencer, si $N^1 = \{y_1, \ldots, y_r\} \neq \emptyset$, remarquons que par indépendance des Z entre eux et avec Y, on peut de façon équivalente invoquer le résultat pour des conditionnements par des valeurs de Y plutôt que de ZY. On a ainsi : $\mathbb{P}(A_1 | A) = \prod_{l=1}^{r} \mathbb{P}(Y_{y_l} = 1 | A, \, Y_{y_m} = 1, \, 1 \leq m \leq l) \geq \alpha^{|N_1|}$. Dans le cas où $N_1 = \emptyset$, on a $A_1 = \Omega$ tout entier, donc $\mathbb{P}(A_1 | A) = 1 = \alpha^0 = \alpha^{|N_1|}$.

En réinjectant ce résultat dans l'inégalité précédente, on trouve $g_{J+1} \geq 1 - \frac{1-\delta}{(1-\rho)^{|N_0|} \alpha^{|N_1|}}$.

Comme (ρ,α) est solution du système initial, on a $1-\rho \geq \left(\frac{1-\delta}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{|C_d(k)|}}$ et $\alpha \geq \left(\frac{1-\delta}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{|C_d(k)|}}$ donc :

$$(1-\rho)^{|N_0|}\alpha^{|N_1|} \geq \left(\frac{1-\delta}{1-\alpha}\right)^{\frac{|N_0|+|N_1|}{|C_d(k)|}} \geq \frac{1-\delta}{1-\alpha}\,.$$

En injectant cette minoration-là dans l'inégalité, on a enfin $g_{J+1} \geq 1 - \frac{1-\delta}{\frac{1-\delta}{1-\alpha}} = \alpha$. □

Remarque 58 :

En particulier, si δ est proche de 1, alors $\varphi(\delta)$ aussi.

Théorème 59 (Théorème de renormalisation) **:**

Lorsque $p > p_c$, on a $\mathbb{P}_p(X_{\varepsilon,0}(n) = 1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

Démonstration. Voir infra. □

Remarque 60 :

La famille $(X_{\varepsilon,x}(n))_{x\in\mathbb{Z}^d}$ peut être vue comme une percolation du réseau $\mathbb{Z}^d$ par *sites*, par sommets.

Cette percolation n'est pas indépendante, à n fixé. Cependant, pour $n \to \infty$, en appliquant le couplage précédent, on va pouvoir minorer cette percolation par une percolation par sites indépendante, de probabilité $\varphi(\mathbb{P}(X_\varepsilon(n) = 1))$.

6.2 Application du théorème de renormalisation

Appliquons les théorèmes précédents à l'étude du nombre maximal de croisements LR disjoints.

Définition 61 (Croisements LR) **:**

Un croisement LR (*left-right*) dans B_n est un chemin dans $G_p \cap B_n$ d'un point x tel que $x_1 = -n$ à un point y tel que $y_1 = n$.

Définition 62 (Nombre de croisements) **:**

On pose $\Lambda_n(\omega)$ le nombre maximal de croisements LR dans B_n sans arêtes en commun.

Définition 63 (Intérieur d'un évènement) **:**

Soient $r \geq 1$ et $\omega \in \Omega = \{0,1\}^{E^d}$. On pose $S_r(\omega) = \{\omega' \in \Omega,\ \|\omega - \omega'\|_1 \leq r\}$ l'ensemble des graphes égaux à ω à au plus r changements près.

Pour un évènement A, on pose $I_r(A) = \{\omega \in \Omega,\ S_r(\omega) \subset A\}$ l'intérieur de A.

Lemme 64 (Aizenman, Chayes, Fröhlich, Russo, 1983) **:**

Soit $d \geq 2$. Si l'évènement A est croissant à support fini, alors pour $0 < p_1 < p_2 < 1$, on a :

$$1 - \mathbb{P}_{p_2}(I_r(A)) \leq \left(\frac{p_2}{p_2 - p_1}\right)^r (1 - \mathbb{P}_{p_1}(A)) \,.$$

En particulier, lorsque $\mathbb{P}_{p_1}(A) \approx 1$, alors $\mathbb{P}_{p_2}(I_r(A))$ aussi.

Démonstration. Lorsque $G_{p_2}(\omega) \notin I_r(A)$, par définition de $I_r(A)$, il existe en particulier une famille d'arêtes $B(\omega) \subset G_{p_2}(\omega)$ telle que $|B| \leq r$ et le graphe privé de ces arêtes $G_{p_2} \backslash B$ n'est pas dans A.

Notons qu'en général, pour aboutir à $G_{p_2} \notin I_r(A)$, le graphe à distance au plus r de G_{p_2} qui n'est pas dans A n'est pas nécessairement un $G_{p_2} \backslash B$ *inclus* dans G_{p_2}. C'est ici l'hypothèse de croissance sur A qui nous garantit ce point.

En utilisant le couplage $(G_p)_{p\in[0,1]}$ par des lois uniformes, on peut obtenir le graphe G_{p_1} en *retirant* chaque arête présente dans G_{p_2} avec probabilité $\mathbb{P}(U > p_1 | U \leq p_2) = \frac{p_2-p_1}{p_2}$, et ce indépendamment de la famille d'évènements $\big(\{e \in G_{p_2}\},\, e \in E^d\big)$.

Conditionnellement à l'évènement $G_{p_2} \notin I_r(A)$, on peut en particulier réaliser $G_{p_1} \notin A$ lorsque $G_{p_1} = G_{p_2} \backslash B$, ce qui arrive avec probabilité $\left(\frac{p_2-p_1}{p_2}\right)^{|B|} \geq \left(\frac{p_2-p_1}{p_2}\right)^{r}$. On en déduit le résultat souhaité.

Notons que l'hypothèse de support fini sur A sert ici à garantir qu'on conditionne par un évènement de probabilité positive. □

Théorème 65 (*Max-flow min-cut theorem*) **:**

Si A_n est l'évènement de l'existence d'un croisement LR dans B_n, alors $I_r(A_n)$ est l'existence d'au moins $r+1$ croisements LR sans arêtes en commun dans B_n.

Idée. De façon informelle, réaliser $I_r(A_n)$, c'est pouvoir retirer r arêtes de G_p en restant dans A_n, en gardant un croisement LR. Si on retire r arêtes critiques, au sens où elles sont chacune sur un croisement disjoint des autres, c'est donc qu'on en avait au moins $r+1$ à l'origine. □

Lemme 66 :

Pour $d = 2$, on pose G_p^s la percolation par sites de $\mathbb{Z}^2$, où on garde chaque sommet avec probabilité p indépendamment. On note $\mathbb{P}_p^s$ la mesure de probabilité associée.

On pose A_n l'évènement (croissant, à support fini) pour lequel il existe un croisement LR dans B_n. Alors il existe $0 < \alpha < 1$ tel que, pour tous $p > \alpha$ et $n \geq 1$, on a $\mathbb{P}_p^s(A_n) \geq 1 - e^{-\rho(p)n}$, avec $\rho(p) \underset{p\to 1^-}{\longrightarrow} \infty$ de façon croissante.

Démonstration. Définissons une autre percolation par site, sur le réseau $\mathbb{Z}^2$ où on relie x et y lorsque $\|x-y\|_\infty = 1$. Visuellement, on ajoute les diagonales des tuiles au quadrillage du réseau $\mathbb{Z}^2$ usuel. On note $\widetilde{\mathbb{P}_p^s}$ la mesure de probabilité associée. La percolation par sites indépendants de paramètre $1-p$ sur ce réseau est la percolation duale de G_p^s sur $\mathbb{Z}^2$.

Notons c_n le nombre de chemins auto-évitants qui empruntent n arêtes. Comme $c_{n+m} \leq c_n c_m$, on en déduit $c_n \leq e^{cn}$ pour une certaine constante $c > 0$ (qui dépend du réseau considéré).

Tout chemin auto-évitant de 0 à la sphère S_n doit nécessairement passer par n sommets au moins (et même $n+1$, en comptant 0 qui doit être dans $\widetilde{G_p^s}$).

On a donc $\widetilde{\mathbb{P}_p^s}(0 \leftrightarrow S_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} c_k \times p^k \leq \sum_{k=n}^{s} \left(\frac{p}{e^c}\right)^k$. Lorsque $p < p_0 := \frac{e^c}{2}$ on obtient alors $\widetilde{\mathbb{P}_p^s}(0 \leftrightarrow S_n) \leq 2\left(\frac{p}{e^c}\right)^n \leq e^{-c'(p)\times n}$, et $c'(p) \sim -\ln(p) \underset{p\to 0^+}{\longrightarrow} \infty$.

Revenons désormais dans la percolation G_p^s. Pour qu'il n'y ait pas de croisement LR dans G_p^s, à rotation près, il faut en particulier qu'il y ait un croisement LR dans $\widetilde{G_{1-p}^s}$. Un tel croisement est défini par son point de départ du côté gauche, parmi $(2n+1)$ possibles, et par un chemin auto-évitant de 0 vers S_{2n}. En conséquence, si $p > \alpha = 1 - p_0$, on a finalement :

$$\mathbb{P}_p^s(A_n^c) \le (2n+1)\widetilde{\mathbb{P}_{1-p}^c}(0 \leftrightarrow S_{2n}) \le (2n+1)e^{-2c'n} \le e^{-\rho(p)\times n},$$

d'où le résultat souhaité. □

Théorème 67 :

Soient $p > p_c$ et $d \ge 3$. Alors il existe $\beta(p) > 0$ et $\gamma(p) > 0$ tels que, pour tout $n \ge 1$, on a $\mathbb{P}_p\big(\Lambda_n \ge \beta n^{d-1}\big) \ge 1 - e^{-\gamma n^{d-1}}$.

Démonstration. Rappelons que la famille $(X_{\varepsilon,x}(n))$ est $3d$-dépendante pour la norme $\|.\|_1$. La valeur de ε ne nous importe pas ici, on fixe donc $\varepsilon = \frac{1}{2}$ par la suite.

En utilisant le théorème de couplage, il existe $\delta > 0$ tel que $\varphi(\delta) > \alpha$, où α est le seuil issu du lemme précédent. Comme $p > p_c$, on peut intercaler $p' = \frac{p+p_c}{2}$ entre p_c et p. En appliquant le théorème de renormalisation à $G_{p'}$, il existe un rang $N \ge 1$ à partir duquel $\mathbb{P}_{p'}(X_{\varepsilon,x}(n) = 1) > \delta$.

Soit $n = KN$ pour un $K \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k = (k_3, \dots, k_d) \in \mathcal{K} := [\![-K, K]\!]^{d-2}$, on définit $S(k) = [\![-K, K]\!]^2 \times \{k\}$ la tranche de B_K associée. On pose R_k l'évènement pour lequel il existe un croisement LR de B_K inclus dans $S(k)$, pour la percolation par sites $(X_{\varepsilon,x}(n))_{x\in\mathbb{Z}^d}$.

Par le théorème de couplage, on a un percolation bidimensionnelle par sites indépendants de paramètre $\varphi(\delta) > \alpha$ incluse dans la tranche $\mathbb{Z}^2 \times \{k\}$. Comme R_k est un évènement croissant, on a donc :

$$\mathbb{P}_{p'}(R_k) \ge \mathbb{P}^s_{\varphi(\delta)}(A_K) \ge 1 - e^{-\rho n} \ge 1 - e^{-gK},$$

pour une constante $g > 0$ adaptée.

Par définition d'une bonne boite et du processus $(X_{\varepsilon,x}(n))$, conditionnellement à l'évènement R_k, l'ensemble $N \times S(k) + B_N = N \times (S(k) + B_1)$ contient un croisement LR de B_n.

Chaque évènement R_k ne dépend que des sommets x dans la tranche $\mathbb{Z}^2 \times \{k\}$. Les variables R_k ne sont pas directement indépendantes, mais les percolations par sites issues du couplage le sont. En conséquence :

$$\mathbb{P}_{p'}(\Lambda_n = 0) \le \mathbb{P}_{p'}\left(\bigcap_{k\in\mathcal{K}} R_k^c\right) \le \mathbb{P}^s_{\varphi(\delta)}(A_K^c)^{|\mathcal{K}|} \le e^{-cK^{d-1}},$$

car $|\mathcal{K}| \ge c' \times K^{d-2}$.

D'après le théorème de *max-flow min-cut* combiné avec le lemme qui le précède, on a alors $\mathbb{P}_p\big(\Lambda_n < \beta n^{d-1}\big) \le \left(\frac{p}{p-p'}\right)^{\beta n^{d-1}} \mathbb{P}_{p'}(\Lambda_n = 0) \le \exp\Big(-\Big[\frac{c}{N^{d-1}} - \beta \ln\Big(\frac{2p}{p-p_c}\Big)\Big] n^{d-1}\Big)$. Pour β assez faible, on a bien $\gamma = \frac{c}{N^{d-1}} - \beta \ln\Big(\frac{2p}{p-p_c}\Big) > 0$.

Le résultat est établi ici pour tout n sous la forme KN, et avec un peu plus de travail, on peut finalement l'étendre à tout entier n, par monotonie. □

6.3 Démonstration du théorème de renormalisation

Définition 68 (Probabilité critique d'une partie) **:**
Soit $F \subset \mathbb{Z}^d$ connexe infini. On pose :

$$p_c(F) = \sup\{p \in [0,1],\ \mathbb{P}(F \cap G_p \text{ a une composante infinie}) = 0\}\,.$$

Proposition 69 :
Si $p_c(F) < 1$, alors pour tout $\eta > 0$ on a $K \geq 1$ tel que :

$$p_c(2K \times F + B(K)) \leq p_c\big(\mathbb{Z}^d\big) + \eta\,.$$

Démonstration. Voir *Percolation*, Grimmett, théorème 7.2. □

Corollaire 70 :
Pour $p > p_c\big(\mathbb{Z}^d\big)$, il existe $L(p) \geq 1$ telle que $p_c\big(\mathbb{N}^2 \times [\![0, L]\!]^{d-2}\big) < p$.

Lemme 71 :
Soient $d \geq 3$ et $p > p_c$.

On pose $S_n(L) = [\![-n, n]\!]^2 \times [\![0, L]\!]^{d-2}$ et $T_n(L) = [\![-n, n]\!]^{d-1} \times [\![0, L]\!]$.

Alors il existe $L(p, d) \geq 1$ et $\delta > 0$ tels que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x, y \in S_n(L)$ (resp. $T_n(L)$), on a $\mathbb{P}_p\Big(x \overset{S_n(L)}{\longleftrightarrow} y\Big) \geq \delta$ (resp. $T_n(L)$).

Démonstration. On considère le L issu du corollaire précédent, et $\widetilde{p_c} = p_c\big(\mathbb{N}^2 \times [\![0, L]\!]^{d-2}\big) < p$. On intercale $p' = \frac{p + \widetilde{p_c}}{2}$ entre les deux. Ce genre de méthodes, qui consiste à se garder une marge de manœuvre avec $p' < p$, est appelée *sprinkling*.

Pour $m \geq 1$, on définit $U_m(L) = [\![0, m]\!]^2 \times [\![0, L]\!]^{d-2}$. Les quatre faces du carré $[\![0, m]\!]^2$ induisent quatre ensembles $H_1(m) = \{x \in U_m(L),\ x_1 = 0\}$, $H_2(m) = \{x \in U_m(L),\ x_1 = m\}$, $H_3(m) = \{x \in U_m(L),\ x_2 = 0\}$ et $H_4(m) = \{x \in U_m(L),\ x_2 = m\}$.

On note en outre $x_{1,3} = (0, 0, 0, \ldots)$, $x_{3,2} = (m, 0, 0, \ldots)$, $x_{2,4} = (m, m, 0, \ldots)$ et finalement $x_{4,1} = (0, m, 0, \ldots)$.

Notons ici $\Theta(p)$ la probabilité que la composante de 0 soit infinie dans $G_p \cap \mathbb{N}^2 \times [\![0, L]\!]^{d-2}$. Comme $p' > \widetilde{p_c}$, pour tout $m \geq 1$, on a alors :

$$0 < \Theta(p') \leq \mathbb{P}_{p'}\Big(0 \overset{U_m(L)}{\longleftrightarrow} H_2(m) \cup H_4(m)\Big) \leq \mathbb{P}_{p'}\Big(0 \overset{U_m(L)}{\longleftrightarrow} H_2(m)\Big) + \mathbb{P}_{p'}\Big(0 \overset{U_m(L)}{\longleftrightarrow} H_4(m)\Big)\,.$$

Par symétrie selon les coordonnées, $\mathbb{P}_{p'}\Big(0 \overset{U_m(L)}{\leftrightarrow} H_2(m)\Big) \geq \frac{\Theta(p')}{2}$. Par invariance par rotations, avec $A_{i,j} = \Big\{x_{i,j} \overset{U_m(L)}{\leftrightarrow} H_k(m)\Big\}$ où H_k est une des « faces » opposées à $x_{i,j}$, on a la minoration $\mathbb{P}_{p'}(A_{1,3}) = \mathbb{P}_{p'}(A_{3,2}) = \mathbb{P}_{p'}(A_{2,4}) = \mathbb{P}_{p'}(A_{4,1}) \geq \frac{\Theta}{2}$.

Par l'inégalité de FKG, $\mathbb{P}_p(A_{1,3} \cap A_{3,2} \cap A_{2,4} \cap A_{4,1}) \geq \left(\frac{\Theta}{2}\right)^4$. Sous cet évènement, on a des chemins $\pi_{i,j}$ qui relient les sommets aux « faces » correspondantes. Soulignons que, comme on travaille ici en strictement plus de 2 dimensions, ces chemins ne s'intersectent pas nécessairement.

Comme $p' < p$, on peut désormais raisonner comme suit. En conditionnant par la valeur de $G_{p'}$, puis en ajoutant indépendamment chaque arête absente avec probabilité $\frac{p-p'}{1-p'}$, on obtient le graphe G_p. En conséquence :

$$\mathbb{P}_p\left(x_{1,3} \overset{U_m(L)}{\longleftrightarrow} x_{3,2} \overset{U_m(L)}{\longleftrightarrow} x_{2,4} \overset{U_m(L)}{\longleftrightarrow} x_{4,1}\right) \geq \left(\frac{\Theta}{2}\right)^4 \left(\frac{p-p'}{1-p'}\right)^{4(d-2)L} = \delta_0 \,.$$

La puissance $4 \times (d-2)L$ vient du fait que, une fois chacun des évènements quatre évènements $A_{i,j}$ réalisé, il reste à relier le point d'arrivée de $\pi_{i,j}$ dans la face $H_k(m)$ à $x_{j,k}$, ce qui peut toujours se faire par un chemin de longueur $(d-2)L$ au plus, en ajoutant les éventuelles arêtes manquantes à $G_{p'}$ dans G_p.

On veut désormais minorer uniformément $\mathbb{P}_p\left(z \overset{S_n(L)}{\longleftrightarrow} 0\right)$ lorsque $z \in S_n(L)$. Sans perte de généralité, supposons $z_1 \leq z_2$.

Soient $U_1 = [\![0, z_1]\!] \times [\![z_2 - z_1, z_2]\!] \times [\![0, L]\!]^{d-2} \subset S_n(L)$ et $U_2 = U_{z_2 - z_1}(L) \subset S_n(L)$. Posons $z' = (z_1, z_2, 0, \dots) \in U_1$ et $y = (0, z_2 - z_1, 0, \dots) \in U_1 \cap U_2$.

Par l'inégalité FKG, on a alors :

$$\mathbb{P}_p\left(z \overset{S_n(L)}{\longleftrightarrow} 0\right) \geq \mathbb{P}_p(z \leftrightarrow z')\mathbb{P}_p\left(z' \overset{U_1}{\longleftrightarrow} y\right)\mathbb{P}_p\left(y \overset{U_2}{\longleftrightarrow} 0\right).$$

Pour le facteur de gauche, il suffit de choisir un chemin de z à z' de longueur au plus $(d-2)L$, présent dans G_p avec probabilité $p^{(d-2)L}$. Pour le facteur central, remarquons qu'à une translation près on passe de U_1 à $U_{z_1}(L)$, et que z' et y sont des coins de U_1, d'où une minoration par δ_0. Dans le terme de droite, y est déjà un des coins de $U_2 = U_{z_2 - z_1}(L)$, donc on peut aussi minorer ce facteur par δ_0.

Finalement, quitte à aller de x à $y \in S_n(L)$ en passant par 0, en utilisant une nouvelle fois FKG, on a la minoration souhaitée pour $\delta_S(p, d, L) = \delta_0^4 \times p^{2(d-2)L}$.

On veut désormais obtenir une inégalité similaire pour $\mathbb{P}_p\left(z \overset{T_n(L)}{\longleftrightarrow} 0\right)$.

Montrons alors le résultat par récurrence sur d. Si $d = 3$, $T_n(L) = S_n(L)$, donc on s'est ramené au cas précédent, avec un seuil $\delta_T(3) = \delta_S(3)$. Si $d > 3$, alors on peut d'abord fixer la coordonnée z_1, et annuler les autres coordonnées dans $\{z_1\} \times T_n^{d-1}(L)$, avec probabilité $\delta_T(d-1)$, puis annuler la coordonnée restante en conservant une des coordonnées nulles fixes, à nouveau avec probabilité $\delta_T(d-1)$. En conséquence, en fixant $\delta_T(d) = \delta_S(3)^{2^{d-3}}$, par l'inégalité de FKG, on peut garantir $\mathbb{P}_p\left(z \overset{T_n(L)}{\longleftrightarrow} 0\right) \geq \delta_T(d)$. On peut ainsi conclure dans le cas général. $\square$

Lemme 72 :

Il existe $\xi(p,d) > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $\alpha > 1$ et tous $x, y \in B_n$, on a :

$$\mathbb{P}_p(A(x,y)) := \mathbb{P}_p\left(x \leftrightarrow S_{\alpha n} \leftrightarrow y,\, x \overset{B_{\alpha n}}{\not\leftrightarrow} y\right) \le e^{-n(\alpha-1)\xi},$$

quitte à remplacer αn par $\lceil \alpha n \rceil$.

D'autre part, pour $m \le 2n$, posons $T_{m,n}$ l'évènement où B_n a un cluster croisant, mais aussi un *autre* cluster, de diamètre au moins m. Alors il existe $\mu(d,p) > 0$ tel que :

$$\mathbb{P}_p(T_{m,n}) \le d(2n+1)^d e^{-\mu m}.$$

Démonstration. Considérons L et δ donnés par le lemme précédent. On va découper la boite en tranches « indépendantes ». Posons $M = L+1$. Par division euclidienne, on a $\lceil \alpha n \rceil = n + KM + r$ avec $r < M$. Pour $x, y \in B_n$, on peut inclure l'évènement $A(x,y)$ dans :

$$A_K(x,y) = \{x \leftrightarrow S_{n+KM}\} \cap \{y \leftrightarrow S_{n+KM}\} \cap \left\{x \overset{B_{n+KM-1}}{\not\leftrightarrow} y\right\}.$$

La famille (A_k) est décroissante, donc $\mathbb{P}_p(A(x,y)) \le \prod_{k=1}^{K} \mathbb{P}_p(A_k(x,y)|A_{k-1}(x,y))$.

Il suffit donc de majorer $\mathbb{P}_p(A_{k+1}|A_k)$ indépendamment de k, x et y pour conclure. En effet, dans ce cas, on majore $\mathbb{P}_p(A(x,y))$ par une exponentielle de K, donc par une exponentielle de KM, asymptotiquement équivalent à $(1-\alpha)n$. Montrons $\mathbb{P}_p(A_{k+1}|A_k) = \frac{\mathbb{P}_p(A_{k+1})}{\mathbb{P}_p(A_k)} \le 1 - \delta^{d+2}$.

Soit $V_k(z)$ l'ensemble des sommets de S_{n+kM} reliés à z par des sommets intermédiaires dans B_{n+kM-1}. Sous A_k, on a $V_k(x)$ et $V_k(y)$ non vides, et $V_k(x) \cap V_k(y) = \emptyset$. Si A_k est réalisé, alors non seulement A_{k-1} est réalisé, mais en outre $u \overset{D_k}{\not\leftrightarrow} v$ pour tous $u \in V_{k-1}(x)$ et $v \in V_{k-1}(y)$, avec $D_k = B_{n+kM-1} \backslash B_{n+(k-1)M-1}$.

Notons que $V_{k-1}(x)$ dépend d'arêtes avec au moins un sommet dans $B_{n+(k-1)M-1}$ et de même pour l'évènement A_{k-1}. Quitte à conditionner par ces arêtes, on obtient finalement l'inégalité $\mathbb{P}_p(A_k) \le \mathbb{P}_p(A_{k-1}) \times \sup_{u,v \in S_{n+(k-1)M}} \mathbb{P}_p\left(u \overset{D_k}{\not\leftrightarrow} v\right)$.

Il reste donc à minorer uniformément $\mathbb{P}_p\left(u \overset{D_k}{\leftrightarrow} v\right) \ge \delta^{d+2}$ pour $u, v \in S_{n+(k-1)M}$. On peut en outre voir D_k comme l'union de d paires de tranches, qu'on identifie à $T_r(L)$, en fixant $r = n+kM-1$. On peut prendre $z_1 = (-r_k, \dots, -r_k)$, et ainsi de suite jusqu'à $z_{d+1} = (r_k, \dots, r_k)$. Ces points suffisent à relier toutes les tranches. On a alors $\mathbb{P}(z_1 \leftrightarrow z_2 \cdots \leftrightarrow z_{d+1}) \ge \delta^d$ par FKG. On peut en outre relier u et v à un des deux z_i touchant leur tranche respective avec probabilité δ à nouveau, d'où la minoration par δ^{d+2}.

Pour le second point du lemme, le raisonnement est similaire. Soit $H_r = \{x \in B_n,\, x_1 = r\}$, ce qui découpe B_n en $2n+1$ tranches. On pose $U_{i,j} = [\![i,j[\![\times [\![-n,n]\!]^{d-1}$. Et en particulier, on a $U_{-n,n+1} = B_n$. Si $x \neq y \in H_l$, posons $A_k = \left\{x \overset{B_n}{\leftrightarrow} H_{l+k}\right\} \cap \left\{y \overset{B_n}{\leftrightarrow} H_{l+k}\right\} \cap \left\{x \overset{U_{l,l+k}}{\not\leftrightarrow} y\right\}$.

Lorsque $T_{m,n}$ est réalisé, notons $\mathcal{C}$ le cluster croisant et $\mathcal{D}$ l'autre cluster. En particulier, on a $u, v \in \mathcal{D}$ à distance m. Ce diamètre peut être réalisé dans d directions différentes, donc :

$$\mathbb{P}_p(T_{m,n}) \leq d \times \sum_{l=-n}^{n-m} \sum_{x,y \in H_l} \mathbb{P}_p\left(x \overset{U_{l,l+k}}{\leftrightarrow} H_{l+n} \overset{U_{l,l+n}}{\leftrightarrow} y, x \overset{U_{l,l+n}}{\not\leftrightarrow} y\right)$$

et donc $\mathbb{P}_p(T_{m,n}) \leq d|B(n)|^2 \sup_{x,y \in H_{-n}} \mathbb{P}_p(A_n(x,y))$. On peut borner cette probabilité comme précédemment, indépendamment de x et y, via $n = KM + r$ et des inclusions imbriquées de A_{kM}, ce qui donne au final $\mathbb{P}_p(A_n(x,y)) \leq e^{-\mu n}$. $\square$

La seconde majoration nous donne le fait que la probabilité d'avoir un cluster croisant et un *autre* gros cluster tend vers 0. Plus fortement, ce lemme justifie qu'avec grande probabilité, les autres clusters de notre ε-bonne boite ont un diamètre de l'ordre de $\ln(n)$ au plus.

Pour montrer le théorème de renormalisation, il nous reste donc à justifier l'existence d'un gros cluster croisant avec grande probabilité.

Lemme 73 :

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_p(B_n \text{ a un cluster croisant de taille au moins } (1-\varepsilon)\Theta(p)|B(n)|) = 1\,.$$

Démonstration. Soit $\xi(p,d) > 0$ issu du premier point du lemme précédent. On pose également $\nu > 0$ tel que $\nu\xi > 2d$.

Soit K_n l'ensemble des sommets dans $B_{n-\nu\ln(n)}$ qui appartiennent à la composante infinie de G_p. Cet ensemble n'est pas nécessairement connexe. Soit I_n l'ensemble des sommets de B_n reliés à K_n.

On a $\mathbb{P}_p(I_n \text{ non connexe}) \leq \sum_{u,v \in B_{n-\nu\ln(n)}} \mathbb{P}_p\left(u \overset{K_n}{\not\leftrightarrow} v\right)$. En appliquant le lemme, on majore donc $\mathbb{P}_p(I_n \text{ non connexe}) \leq |B_n|^2 \exp\left(-(n-\nu\ln(n))\left(\frac{n}{n-\nu\ln(n)} - 1\right)\xi\right) = O\left(e^{(2d-\xi\nu)\ln(n)}\right)$. De plus, $|I_n| \geq |K_n| = \sum_{x \in B_{n-\nu\ln(n)}} \mathbb{1}_{x \in \mathcal{C}_\infty}$. Par un théorème ergodique de Von Neumann, on a la limite $\mathbb{P}\left(|I_n| \geq (1-\varepsilon)\Theta(p)\left|B_{n-\nu\ln(n)}\right|\right) \to 1$. Comme $\left|B_{n-\nu\ln(n)}\right| \sim |B_n|$, quitte à partir d'une valeur légèrement inférieure ε', on obtient la minoration voulue sur $|I_n|$ avec forte probabilité.

Il ne reste qu'à montrer que notre ensemble I_n est croisant avec forte probabilité pour conclure. Pour $1 \leq i \leq d$ et $\delta = \pm 1$, on pose $F_{i,\delta} = \{x \in B(n),\, x_i = \delta n\}$ les faces de B_n et $E_{i,\delta} = \{I_n \cap F_{i,\delta} \neq \emptyset\}$. Par construction, $\mathbb{P}_p\left(\bigcup_{i,\delta} E_{i,\delta}\right) \geq \mathbb{P}_p(|K_n| > 0) \to 1$.

En utilisant la $\sqrt{\cdot}$-trick, conséquence de FKG, on a $\mathbb{P}_p(E_{i,\delta}) \to 1$ pour tout i et δ, d'où $\mathbb{P}_p\left(\bigcap_{i,\delta} E_{i,\delta}\right) \to 1$. Lorsque I_n est connexe et que les $F_{i,\delta}$ sont réalisés, I_n est croisant, ce qui conclut la preuve. $\square$

En combinant ce lemme avec la remarque précédent, on en déduit le théorème de renormalisation.

Remarque 74 :

On n'a pas formellement justifié l'applicabilité de Von Neumann. Si on était en dimension 1, on aurait bien des shift le long d'un seul axe, donc un PPT bien défini où travailler. Ici, on a plutôt une famille de d transformations (les translations sur d axes), qui commutent entre elles, et il existe des généralisations de Von Neumann qui s'appliquent dans ce cas.

7 Un modèle de percolation corrélé

Ce modèle émerge à partir des ensembles de niveau du champ libre gaussien, un modèle de géométrie aléatoire.

Soit $\mathbb{Z}^d$ pour $d \geq 3$. On note X la marche aléatoire usuelle. Soit $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ à support compact. On a $P^n f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_n)]$. On admet que X est transiente, que $P^n(x,x) \leq \frac{c}{\sqrt{n}^d}$, et que $1 \in \sigma(P)$ est une valeur propre de l'opérateur. On définit $g(x,y) = \mathbb{E}_x\left[\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{X_n=y}\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}} P^n(x,y) < \infty$ le noyau de Green, qui induit à nouveau un opérateur $Gf(x) = \sum g(x,y)f(y)$. En particulier, $G = (\mathrm{Id} - P)^{-1}$. Posons $\Delta = P - \mathrm{Id}$ le laplacien du graphe.

Lemme 75 :

L'opérateur de Green G est défini positif. Autrement dit, si $f \neq 0$, $\langle f, Gf\rangle \geq 0$.

Démonstration. Soit $g = Gf$, tel que $-\Delta g = f$. On a $\Delta g(x) = \frac{1}{2d} \sum_{y,\, \|x-y\|_1=1} g(y) - g(x)$. Alors :

$$\begin{aligned}
\langle f, Gf\rangle &= -\langle g, \Delta g\rangle \\
&= \frac{1}{2d} \sum_{\|x-y\|_1=1} g(x)(g(x)-g(y)) \\
&= \frac{1}{4d} \sum_{\|x-y\|_1=1} g(x)(g(x)-g(y)) + g(y)(g(y)-g(x)) \\
&= \frac{1}{4d} \sum_{\|x-y\|_1=1} (g(x)-g(y))^2 \\
&\geq 0\,.
\end{aligned}$$

En particulier, si on a égalité, alors g est constante, donc $f = -\Delta g = 0$. $\square$

En particulier, comme G est défini positif, g peut être vu comme une matrice de covariance.

Définition 76 (Champ libre gaussien (GFF) sur $\mathbb{Z}^d$) **:**
Le champ libre gaussien sur $\mathbb{Z}^d$ est un processus gaussien centré φ, de covariance g.

Définition 77 (Percolation par GFF) **:**
Soit φ le champ libre gaussien sur $\mathbb{Z}^d$. On pose $E^{\geq h} = \big\{x \in \mathbb{Z}^d,\, \varphi(x) \geq h\big\}$. Cet ensemble induit une percolation par sites de $\mathbb{Z}^d$.

On peut peut alors s'intéresser à $h_c = \inf\big\{h \in \mathbb{R},\, \mathbb{P}\big(E^{\geq h} \text{ a une composante infinie}\big) = 0\big\}$.

Si on considère le champ gaussien $\widetilde{\varphi}$ indépendant, on retrouve la percolation par sites indépendants déjà vue plus tôt. Pour le champ libre gaussien, contrairement au cas indépendant, des questions « simples » comme montrer que $-\infty < h_c < \infty$ sont déjà difficiles à résoudre.