Modèles solubles en probabilité

Léo Gayral

Ces notes sont basées sur le cours de Nathanaël Enriquez.

Table des matières

1 Marches aléatoires en milieu aléatoire sur $\mathbb{Z}$

1.1 Présentation du modèle

Définition 1 (Milieu aléatoire) **:**

Un milieu aléatoire est une suite $(\omega(n))_{n\in\mathbb{N}}$ de variables iid de loi μ sur $[0,1]$.

Le nombre $\omega(n)$ représente alors la probabilité de la transition $n \to n+1$ pour la marche aléatoire sur ce milieu, la transition étant $n \to n-1$ dans le cas contraire. On note ainsi $P_{0,\omega}$ la loi de la marche aléatoire issue de 0 ainsi obtenue, appelée la loi *quenched*.

On s'intéressera également à la loi *annealed*, de loi $P_0 = \int\limits_{[0,1]^{\mathbb{Z}}} P_{0,\omega}\,\mathrm{d}\mu^{\otimes\mathbb{Z}}(\omega) = \mathbb{E}_\omega[P_{0,\omega}]$.

Les lois $P_{0,\omega}$ et P_0 correspondent à des mesures sur l'ensemble des chemins sur le graphe $\mathbb{Z}$.

Proposition 2 :

Sous la mesure P_0, la suite $(X_{n+1} - X_n)$ n'est pas stationnaire.

Démonstration. D'une part, $P_0(X_1 = 1) = \int \mathbb{P}_{0,\omega}(X_1 = 1)\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int_0^1 x\,\mathrm{d}\mu(x)$. L'étude du terme $X_2 - X_1$ aboutit à la même loi, car les transitions étudiées sont toutes indépendantes.

Pour $X_3 - X_2$, on distingue quatre cas possibles sur les deux premières transitions. Ainsi :

$$\begin{aligned} P_0(X_3 - X_2 = 1) &= \mathbb{E}[(1-\omega(0))(1-\omega(-1))\omega(-2)] \\ &+ \mathbb{E}[(1-\omega(0))\omega(-1)\omega(0)] \\ &+ \mathbb{E}[\omega(0)(1-\omega(1))\omega(0)] \\ &+ \mathbb{E}[\omega(0)\omega(1)\omega(2)]\,. \end{aligned}$$

Notons $m_j = \int x^j\,\mathrm{d}\mu(x)$. Quitte à développer le calcul, on obtient :

$$P_0(X_3 - X_2 = 1) = m_1^3 + (1-m_1)^2 m_1 + m_1^2 + (1-2m_1)m_2\,.$$

On peut vérifier que, de façon générique, cette fonction ne coïncide pas avec m_1. En outre, quitte à pousser les calculs plus loin, même si on avait égalité ici, on aurait un contre-exemple plus loin. □

On en déduit que (X_n) n'est pas une *marche aléatoire* sous la loi P_0, et en réalité pas non plus sous $\mu^{\otimes\mathbb{Z}}$-presque-toute loi $\mathbb{P}_{0,\omega}$.

Définition 3 (Fonction de renforcement) **:**

Soit (x_n) une trajectoire. Notons $L_n^+(k)$ le nombre de transitions de k à $k+1$ jusqu'au rang n, et $L_n^-(k)$ le nombre de transitions de k à $k-1$. En particulier, on a la relation de récurrence

$L^+_{n+1}(k) = L^+_n(k) + \delta_k(x_n)\delta_{k+1}(x_{n+1})$. Naturellement :

$$\begin{aligned} P_0(X_{n+1} = x_n + 1 | X_0 = 0, \dots, X_n = x_n) &= \frac{\mathbb{E}\left[\prod_{k\in\mathbb{Z}} \omega(k)^{L^+_{n+1}(k)}(1-\omega(k))^{L^-_{n+1}(k)}\right]}{\mathbb{E}\left[\prod_{k\in\mathbb{Z}} \omega(k)^{L^+_n(k)}(1-\omega(k))^{L^-_n(k)}\right]} \\ &= \frac{\mathbb{E}\left[\omega(x_n)^{L^+_n(x_n)+1}(1-\omega(x_n))^{L^-_n(x_n)}\right]}{\mathbb{E}\left[\omega(x_n)^{L^+_n(x_n)}(1-\omega(x_n))^{L^-_n(x_n)}\right]}. \end{aligned}$$

Ce rapport ne dépend donc que de $L^+_n(x_n)$ et $L^-_n(x_n)$. On pose donc la fonction :

$$F : (i,j) \in \mathbb{N}^2 \mapsto \frac{\int x^{j+1}(1-x)^i \, \mathrm{d}\mu(x)}{\int x^j(1-x)^i \, \mathrm{d}\mu(x)},$$

de sorte que $P_0(X_{n+1} = x_n + 1 | X_0 = 0, \dots, X_n = x_n) = F(L^-_n(x_n), L^+_n(x_n))$. On appelle F la fonction de renforcement.

Lemme 4 :

La fonction F est croissante selon le paramètre L^+ (renforcement positif), et décroissante selon le paramètre L^- (renforcement négatif).

Démonstration. Notons $I(i,j)$ l'intégrale de $x^j(1-x)^i$, de sorte que $F(i,j) = \frac{I(i,j+1)}{I(i,j)}$. On en déduit, par inégalité de Cauchy-Schwarz, que $I(i,j)^2 \leq I(i,j+1)I(i,j-1)$, et donc finalement $F(i,j-1) \leq F(i,j)$. Par des raisonnements analogues, on montre la propriété de renforcement négatif. □

En ce sens, si on ne voit plus le milieu comme *fixé* mais aléatoire, même en passant à l'espérance sur le milieu, le processus (X_n), qui est une chaîne de Markov tant que le milieu est déterministe, devient alors un processus dont la loi de transition n'est pas indépendante du passé.

Remarque 5 :

Considérons le cas particulier où $\mu = \beta(a,b)$, à densité $x^a(1-x)^b$ renormalisée sur $[0,1]$.

Ce faisant, on évolue dans un milieu dynamique, dont tous les poids valent initialement a vers la droite, et b vers la gauche. A chaque passage sur une arête orientée, on augmente son poids de 1. Dans ce cas, un calcul direct donne $F(i,j) = \frac{\Gamma(j+a+i+b)}{\Gamma(j+a)\Gamma(i+b)} = \frac{j+a}{j+a+i+b}$.

Cette approche montre vite ses limites, et on va par la suite travailler sur la loi *quenched* $P_{0,\omega}$ plutôt que sur la loi *annealed* P_0.

Remarque 6 :

On a ici mis en évidence une propriété de renforcement par arêtes orientées. Il existe d'autres variantes, avec par exemple des modèles par renforcement des arêtes non-orientées, ou bien par renforcement des sites.

1.2 Caractérisation de la récurrence et de la transience

Définition 7 (Fonction harmonique) **:**

On cherche une fonction f harmonique sous $P_{0,\omega}$, telle que $(f(X_n))$ soit une martingale.

Naturellement, conditionnellement au milieu, on a :

$$\mathbb{E}_{0,\omega}[f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] = f(X_n+1)\omega(X_n) + f(X_n-1)(1-\omega(X_n)) .$$

On cherche donc f telle que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f(k+1)\omega(k) + f(k-1)(1-\omega(k)) = f(k)$. Ceci implique naturellement $\frac{f(k+1)-f(k)}{f(k)-f(k-1)} = \frac{1-\omega(k)}{\omega(k)} =: \rho(k)$.

Ainsi, à une transformation près, cette relation permet de définir f_ω de façon unique. On choisit donc la convention $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Ce faisant, on a $f(k+1) = \sum_{i=0}^{k} \prod_{j=1}^{i} \rho(j)$ pour tout $k \geq 0$, et de même, $f(-k) = -\sum_{i=0}^{k-1} \prod_{j=0}^{i} \frac{1}{\rho(j)}$.

Remarquons que $\prod_{j=1}^{k} \rho(j) = \exp\left(\sum_{j=1}^{k} \ln(\rho(j))\right)$, où les variables $\rho(j)$ sont iid.

Théorème 8 :

Supposons que $\mathbb{E}_\mu[|\ln(\rho)|] < \infty$. Dans ce cas :

— si $\mathbb{E}_\mu[\ln(\rho)] < 0$, alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P_0\text{-p.s.}} +\infty$,

— si $\mathbb{E}_\mu[\ln(\rho)] > 0$, alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P_0\text{-p.s.}} -\infty$,

— si $\mathbb{E}_\mu[\ln(\rho)] = 0$, alors (X_n) est récurrente.

Démonstration. Si $\mathbb{E}_\mu[\ln(\rho)] < 0$, alors par la loi des grands nombres, on vérifie que $\lim_{+\infty} f(k) < \infty$ p.s., mais dans le même temps $\lim_{-\infty} f(k) = -\infty$. En fixant un tel ω, la martingale $(f_\omega(X_n))$ est majorée, donc converge presque-sûrement. Au vu de la stricte croissance de f, ceci implique la convergence $\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty$, qui a lieu $P_{0,\omega}$-presque-sûrement pour presque-tout choix de ω, donc P_0-p.s.

Par les mêmes arguments, si $\mathbb{E}_\mu[\ln(\rho)] > 0$, alors on a la convergence $\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty$. En conséquence, en emboitant les certitudes, ces propriétés de drift ont lieu P_0-p.s.

Dans le cas critique, quand $\mathbb{E}_\mu[\ln(\rho)] = 0$, la « marche aléatoire » $\sum_{j=1}^{k} \ln(\rho(j))$ est récurrente, donc visite infiniment souvent des grandes valeurs, de même pour les incréments $f(k+1) - f(k)$, et donc f tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Par un raisonnement analogue, f tend vers $-\infty$ en $-\infty$. Quitte à arrêter la martingale quand elle dépasse un seuil A, on en déduit que, $P_{0,\omega}$-p.s., on a $T_A < \infty$, et donc $\overline{\lim}\, X_n = +\infty$. De même, $\underline{\lim}\, X_n = -\infty$. Autrement dit, dans le cas critique, on a un processus récurrent, qui visite tous les sommets une infinité de fois P_0-p.s. $\square$

Remarque 9 (Sinaï, 1982) **:**

Considérons $V(k)$ la marche aléatoire de pas $\ln(\rho(k))$. On peut la voir comme une énergie potentielle, qui contrôle les incréments $f(k+1) - f(k) = e^{V(k)}$. On a tendance à aller vers les potentiels décroissants, ce qui corrobore l'image précédente.

L'image à avoir en tête est celle d'un toboggan à bosses. Ces bosses vont en fait ralentir la vitesse de dérive à l'infini de façon considérable, ainsi que la récurrence dans le cas centré.

1.3 Loi des grands nombres

On se place désormais dans le cas d'une dérive vers $+\infty$.

Proposition 10 :

Soit $T_n = \inf\{k \geq 0,\ X_k = n\}$. La suite $\tau_n = T_n - T_{n-1}$, pour $n \geq 1$, est stationnaire sous la mesure P_0.

Démonstration. Soient $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$. À ω fixé, par propriété de Markov forte, on a donc la factorisation $P_{0,\omega}(\tau_2 = k_1, \ldots, \tau_{n+1} = k_n) = \prod_{j=1}^{n} P_{k,\omega}(T_{j+1} = k_j)$. On exploite alors l'invariance de la mesure $\mu^{\otimes \mathbb{Z}}$ par translation. En tant que variable aléatoire, sous cette loi,

$$P_{0,\omega}(\tau_2 = k_1, \ldots, \tau_{n+1} = k_n) = P_{0,\theta(\omega)}(\tau_1 = k_1, \ldots, \tau_n = k_n)$$

a donc la même loi que $P_{0,\omega}(\tau_1 = k_1, \ldots, \tau_{n+1} = k_n)$.

En passant à l'intégrale selon ω, on constate donc que sous la mesure P_0, les vecteurs $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ et $(\tau_2, \ldots, \tau_{n+1})$ ont la même loi. En particulier, par induction, la suite (τ_n) est stationnaire en loi. □

Remarque 11 :

Pour établir une loi des grands nombres, on va désormais montrer que $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une propriété ergodique de mélange fort.

En d'autres termes, on veut que pour tout $A, A' \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ mesurables :

$$P_0((\tau_k) \in A,\ (\tau_{k+L}) \in A') \underset{L\to\infty}{\longrightarrow} P_0((\tau_k) \in A) P_0((\tau_k) \in A')\,.$$

On peut plus précisément se contenter de le montrer pour A, A' deux cylindres finis, puisque de tels cylindres engendrent la tribu.

Proposition 12 :

Soient $k_1, \ldots, k_m, k'_1, \ldots, k'_l \in \mathbb{N}^*$. Montrons que :

$$P_0(\ldots, \tau_m = k_m, \tau_{L+1} = k'_1, \ldots) \underset{L\to\infty}{\longrightarrow} P_0(\tau_1 = k_1, \ldots, \tau_m = k_m) \times P_0(\tau_1 = k'_1, \ldots, \tau_l = k'_l)\,.$$

Démonstration. Quitte à factoriser, on a :

$$P_{0,\omega}(\ldots, \tau_m = k_m, \tau_{L+1} = k'_1, \ldots) = \prod_{j=0}^{m-1} P_{j,\omega}(T_{j+1} = k_{j+1}) \times \prod_{i=0}^{l-1} P_{L+i,\omega}\left(T_{L+i+1=k'_{i+1}}\right).$$

Le terme de gauche dépend naturellement des $\omega(n)$ pour $n \leq m$. Dans le terme de droite, la contrainte imposée par k' empêche de repartir trop à gauche, et ce terme dépend plus précisément des $\omega(n)$ pour $n \geq \min_{0\leq i\leq l-1} L+i+1-k'_i = L+O(1) \to \infty$. En particulier, à partir d'un rang, les deux termes ne dépendent d'aucun ω en commun, donc en passant à l'intégrale, la suite est stationnaire, égale à la limite voulue à partir d'un rang. □

Par le théorème ergodique de Birkhoff, on en déduit que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\tau_k$ converge P_0 presque-sûrement vers $\mathbb{E}_{P_0}[\tau_1]$. Dit autrement, $\frac{1}{n}T_n \xrightarrow{P_0\text{-p.s.}} \mathbb{E}[T_1]$.

Par la suite, on aimerait d'une part calculer cette espérance, et d'autre part faire le lien entre cette limite et le processus X.

Corollaire 13 :

On a $\frac{X_n}{n} \longrightarrow \frac{1}{\mathbb{E}[T_1]}$ presque-sûrement.

Démonstration. On a naturellement $\frac{X_n}{n} \leq \frac{X_n}{T_{X_n}}$, or $X_n \to \infty$ par transience, donc on majore la limite supérieure de $\frac{X_n}{n}$ par le terme voulu.

D'autre part, soit k_n tel que $T_{k_n} \leq n < T_{k_n+1}$. On a $X_n \geq k_n + 1 - (T_{k_n+1} - T_{k_n})$. Quitte à diviser par $n \leq k_n + 1$, on se ramène ainsi à $\frac{X_n}{n} \geq \frac{k_n+1}{T_{k_n+1}} + o(1)$, et donc on a le résultat en passant à la limite inférieure. □

Théorème 14 :

Si $\mathbb{E}_\mu[\rho] < 1$, alors $\mathbb{E}_{P_0}[T_1] = \frac{1+\mathbb{E}_\mu[\rho]}{1-\mathbb{E}_\mu[\rho]} < \infty$. Sinon, si $\mathbb{E}_\mu[\rho] \geq 1$, alors $\mathbb{E}_{P_0}[T_1] = \infty$.

Démonstration. Pour calculer $\mathbb{E}_{P_{0,\omega}}[T_1]$, on va utiliser la transformée de Lamperti, qui permet d'identifier une excursion (X_n) à un arbre orienté T, via l'évolution de la profondeur lors du parcours de l'arbre en longeant son contour. Graphiquement, étant donné une ligne de niveau de l'excursion, chaque sous-excursion correspond à l'exploration d'une des branches de l'arbre.

Ainsi, en partant de 0, T_1 est impair, l'étape précédente correspond à un passage en 0, donc on a une excursion des temps 0 à $T_1 - 1$, et on obtient ce faisant un arbre à $\frac{T_1-1}{2}$ arêtes, à $\frac{T_1+1}{2}$ sommets. Autrement dit, $T_1 = 1 + 2\sum_{k\leq -1} N_k$ où N_k est le nombre de sommets au niveau k (on exclut ainsi la racine, au niveau 0).

En outre, $N_{k-1} = \sum_{j=1}^{N_k}\xi_{j,k}$ où $\xi_{j,k}$ correspond au nombre d'enfants du j-ième individu au niveau k, qui suit une loi géométrique de paramètre $\mathcal{G}(\omega(k))$, qui commence en 0.

Ainsi, pour un environnement ω fixé, $\mathbb{E}[N_{k-1}] = \mathbb{E}[N_k] \times \frac{1-\omega(k)}{\omega(k)} = \mathbb{E}[N_k] \times \rho(k)$. On en déduit $\mathbb{E}_{0,\omega}[T_1] = 1 + 2\sum_{k\leq -1}\prod_{j=k}^{-1}\rho(j)$.

On peut donc passer à l'espérance selon ω, ce qui donne enfin :

$$\mathbb{E}_{P_0}[T_1] = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_{P_0}[\rho]^k .$$

On obtient alors le résultat annoncé. $\square$

En emboitant tous ces résultats, on obtient finalement le résultat qui suit.

Corollaire 15 (Solomon) **:**

Supposons $\mathbb{E}_\mu[\ln(\rho)] < 0$:

— Si $\mathbb{E}_\mu[\rho] < 1$, alors P_0-p.s. on a $\frac{X_n}{n} \longrightarrow \frac{1-\mathbb{E}_\mu[\rho]}{1+\mathbb{E}_\mu[\rho]}$.

— Si $\mathbb{E}_\mu[\rho] \geq 1$, alors P_0-p.s. on a $\frac{X_n}{n} \longrightarrow 0$.

Remarque 16 :

Revenons à l'image du toboggan à bosses citée précédemment.

Si on prend un toboggan lisse équivalent, sa pente est égale à $\mathbb{E}[\ln(\rho)]$. On a donc une dérive de $\frac{X_n}{n}$ à vitesse $\frac{1-\exp(\mathbb{E}[\ln(\rho)])}{1+\exp(\mathbb{E}[\ln(\rho)])}$. Par inégalité de Jensen, on constate alors que cette dérive est plus rapide que dans le cas à bosses étudié ici, par décroissance de $\frac{1-x}{1+x}$.

Remarque 17 :

Si $\mu \sim \beta(a,b)$ à densité $\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^a(1-x)^b$, alors $\mathbb{E}[\rho] = \int_0^1 \frac{1-x}{x}\,\mathrm{d}\mu(x) = \frac{\Gamma(a-1)}{\Gamma(a)} \times \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b)} = \frac{b}{a-1}$. On a le drift voulu lorsque $a > b$. Si $a \geq b+1$, le résultat précédent donne $\frac{X_n}{n} \longrightarrow \frac{a-b-1}{a+b-1}$. Sinon, on a $\frac{X_n}{n} \to 0$. Il a été montré que, dans ce dernier cas, $\frac{X_n}{n^{a-b}}$ converge en loi vers la loi stable positive d'indice $a-b$, entièrement caractérisée par sa transformée de Laplace $\mathbb{E}\left[e^{-\lambda X}\right] = e^{-\lambda^{(a-b)}}$.

1.4 Loi des grands nombres, via l'environnement vu par la particule

On se place à nouveau dans le cas où il y transience, avec un drift vers $+\infty$.

Définition 18 (Environnement de la particule) **:**

On considère l'espace $\Omega = [0,1]^{\mathbb{Z}}$ muni du shift $\Theta(\omega) = \omega(\cdot + 1)$, qu'on itère en Θ_n.

Au temps n, l'environnement de la particule est $\overline{\omega}_n = \Theta_{X_n}(\omega)$. On obtient ainsi une trajectoire dans $\Omega^{\mathbb{N}}$.

Proposition 19 :

Sous les mesures $P_{0,\omega}$ et P_0, le processus $(\overline{\omega}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de noyau $R(\omega, \omega') = \omega(0)\mathbb{1}_{\omega'=\Theta(\omega)} + (1-\omega(0))\mathbb{1}_{\omega=\Theta(\omega')}$.

Démonstration. A ω fixé, sous $P_{0,\omega}$, on a naturellement une R-chaîne de Markov qui vit dans un sous-ensemble dénombrable de Ω, dans l'orbite de ω sous le shift Θ. En passant à l'intégrale selon ω, sous P_0, on a donc conséquemment une R-chaîne de Markov mais initialisée en la mesure uniforme sur Ω. □

Remarque 20 :

Décomposons $X_n = \sum_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1} - \mathbb{E}_{0,\omega}[X_k - X_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}]) + \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}_{0,\omega}[X_k - X_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}]$. Le terme de gauche, qu'on notera M_n, est une martingale sous la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k,\, k \leq n)$ pour la mesure $P_{0,\omega}$. Dans la somme de droite, on peut réécrire chaque terme comme $2\overline{\omega}_{k-1}(0) - 1$.

Ainsi, $\frac{X_n}{n} = \frac{M_n}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(2\overline{\omega}_{k-1}(0) - 1)$. On va montrer que le terme de gauche tend vers 0 presque-sûrement. On va montrer que le terme de droite tend vers $\int 2\omega(0) - 1 \, \mathrm{d}Q(\omega)$, pour une certaine mesure Q. En admettant une propriété d'ergodicité sous la loi Q, on pourra finalement calculer cette intégrale et donc la limite de $\frac{X_n}{n}$.

Lemme 21 (Inégalité d'Azuma) **:**

Soit X une variable centrée, telle que $|X| \leq \delta$. On peut écrire $X = \frac{\delta - X}{2\delta} \times (-\delta) + \frac{\delta + X}{2\delta} \times \delta$. Alors, par inégalité de Jensen :

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda X}\right] \leq \mathbb{E}\left[\frac{\delta - X}{2\delta}e^{-\delta\lambda} + \frac{\delta + X}{2\delta}e^{\delta\lambda}\right] = \cosh(\delta\lambda) \leq \exp\left(\frac{(\delta\lambda)^2}{2}\right).$$

La démonstration est identique avec des espérances conditionnelles, lorsque $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = 0$.

Proposition 22 :

On a la convergence $\frac{M_n}{n} \longrightarrow 0$ presque-sûrement.

Démonstration. La martingale M_n est à accroissements bornés par 2. Pour $\lambda > 0$, on a alors $\mathbb{P}(M_n > n\varepsilon) \leq \mathbb{E}\left[e^{\lambda M_n}\right] e^{-\lambda n \varepsilon}$.

En utilisant l'inégalité d'Azuma conditionnelle, avec $\delta = 2$ sur les accroissements de M_n, on obtient $\mathbb{P}(M_n > n\varepsilon) \leq \exp(n(2\lambda^2 - \lambda\varepsilon))$. Pour $\lambda \ll 1$, le coefficient devant n est négatif, donc $\mathbb{P}(M_n > n\varepsilon)$ converge vers 0 exponentiellement vite.

Il en va de même pour $\mathbb{P}(M_n < -n\varepsilon)$. On peut donc appliquer le théorème de Borel-Cantelli, pour conclure que $\overline{\lim} \left|\frac{M_n}{n}\right| \leq \varepsilon$, et donc finalement que la limite est nulle. $\square$

Proposition 23 :

Soit $Q(A) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{T_1 - 1} \mathbb{1}_A(\overline{\omega}_k)\right]$ une mesure sur Ω, où $\mathbb{E}$ est l'espérance sur la chaîne initialisée en $\mu^{\otimes \mathbb{Z}}$, et T_1 le temps d'atteinte de $\Theta(\omega)$. La mesure Q est R-invariante.

Démonstration. On peut écrire $QR(A) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{T_1} \mathbb{1}_A(\overline{\omega}_k)\right]$. Les valeurs de k entre 1 et $T_1 - 1$ sont communes avec l'expression de $Q(A)$. En outre, $T_1 < \infty$ p.s. par transience. Le terme correspondant de la somme est $\mathbb{P}(\overline{\omega}_{T_1} \in A) = \mathbb{P}(\Theta(\omega) \in A) = \mathbb{P}(\omega \in A)$ par invariance de la mesure $\mu^{\otimes \mathbb{Z}}$ sous l'action du shift Θ. $\square$

Corollaire 24 :

On a $Q \ll P$, avec la densité $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}(\omega) = \frac{1}{\omega(0)}\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \rho(\omega, j)\right)$, et $\rho(\omega, j) = \frac{1-\omega(j)}{\omega(j)}$.

Démonstration. Notons N_l le nombre de passages en l avant le temps T_1. On a la décomposition :

$$\begin{aligned}
Q(f) &= \sum_{l \leq 0} \mathbb{E}_{\overline{\omega}_0 \sim \mu^{\otimes \mathbb{Z}}}[f(\Theta_l(\omega)) N_l] \\
&= \sum_{l \leq 0} \mathbb{E}_{\overline{\omega}_0 \sim \mu^{\otimes \mathbb{Z}}}[f(\Theta_l(\omega)) \mathbb{E}_{0,\omega}[N_l]] \\
&= \sum_{l \leq 0} \mathbb{E}_{\overline{\omega}_0 \sim \mu^{\otimes \mathbb{Z}}}\left[f(\omega) \mathbb{E}_{0,\Theta_{-l}(\omega)}[N_l]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[f(\omega) \times \sum_{i \geq 0} \mathbb{E}_{0,\Theta_i(\omega)}[N_{-i}]\right].
\end{aligned}$$

En reproduisant le raisonnement de la partie précédente, sur les arbres de Galton-Watson, on conclut alors la preuve. $\square$

En admettant l'ergodicité de ce système, on a alors la convergence de $\frac{X_n}{n}$ vers :

$$\mathbb{E}_{Q_{norm}}[2\omega(0)-1] = \frac{\int \frac{2\omega(0)-1}{\omega(0)} \left(1+\sum_{i=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{i}\rho(j)\right) \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)}{\int \frac{1}{\omega(0)} \left(1+\sum_{i=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{i}\rho(j)\right) \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)} = \frac{\mathbb{E}[1-\rho(0)]}{\mathbb{E}[1+\rho(0)]}\,,$$

ce qui redonne le résultat précédemment établi.

2 Plus longue sous-suite d'une permutation

2.1 Algorithme de Hammersley

Théorème 25 (Erdős-Szekeres, 1935) **:**

Soit σ une permutation de $[\![1, n]\!]$. Alors il existe au moins une sous-suite monotone de cardinal $\sqrt{n}$. Autrement dit, il existe $k \geq \sqrt{n}$ et $1 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_k \leq n$ tels que $(\sigma(x_k))$ est monotone.

Démonstration. On utilise ici l'algorithme de Hammersley.

On place les points $E = \{(k, \sigma(k)),\ 1 \leq k \leq n\}$ sur une grille. De façon gloutonne, on forme l'ensemble des *champions* E_1, les points tels que pour tout $k' < k$, on a $\sigma(k') > \sigma(k)$. On peut construire, de façon itérative, l'ensemble E_{k+1} comme les champions de $E \backslash E_k$.

Notons désormais $k \leq n$ le rang maximal tel que $E_k \neq \emptyset$. Si $k \geq \sqrt{n}$, alors on de façon gloutonne on part de $x_k \in E_k$, alors il existe un point $x_{k-1} \in E_{k-1}$ qui empêche x_k d'être un champion dans $E \backslash E_{k-2}$, et ainsi de suite, et au final une suite (x_k) de points correspondant à une sous-suite croissante.

Sinon, si $k < \sqrt{n}$, comme $\bigsqcup_{j=1}^{k} E_j = E$ a n éléments, on a forcément un ensemble tel que $|E_j| \geq \sqrt{n}$, et en prenant les points associés, on obtient une sous-suite décroissante. $\square$

Corollaire 26 :

Le nombre k de classes $(E_j)_{1 \leq j \leq k}$ non vides est exactement la longueur de la plus longue sous-suite croissante.

Démonstration. En partant d'une sous-suite croissante maximale, on peut vérifier que chacun des points est dans un E_j différent, et ce de façon croissante, d'où l'égalité. $\square$

2.2 Permutations aléatoires

Prenons une permutation sur n éléments uniformément au hasard. Quelle est le comportement asymptotique $n \to \infty$ de la longueur maximale d'une sous-suite croissante pour σ ?

Remarque 27 :

On peut également définir une permutation aléatoire en prenant n points uniformes dans $[0, 1]^2$, et en regardant la permutation nécessaire pour passer de l'ordre des points projetés sur l'axe horizontal vers l'ordre sur l'axe vertical.

Dans ce cadre, une suite croissante est une suite de points dont les projections sur ces axes sont aussi des suites croissantes.

Si on se moque du nombre de points précis, un processus ponctuel de Poisson d'intensité 1 aboutira à une permutation similaire en prenant un carré de surface n.

Définition 28 :

Soit P un processus ponctuel de Poisson d'intensité 1 sur $\mathbb{R}^2$.

On pose $X_{m,n}$ la longueur maximale d'une sous-suite croissante pour la permutation induite par le nuage de points $P \cap [0, m] \times [0, n]$. Plus largement, étant donnés $x \leq y \in \mathbb{Z}^2$, on pose $X_{x,y}$ la longueur maximale d'une sous-suite croissante dans le carré associé.

On aimerait obtenir une asymptotique sur $X_{n,n}$. Ulam conjecturait $X_{n,n} \approx Cn$.

2.3 Preuve de la conjecture via le théorème sous-additif de Kingman

Théorème 29 :

On a $X_{n,n} \sim Cn$ presque-sûrement.

Démonstration. Notons $\vec{e} = (1, 1)$. Considérons la famille de variables $(X_{u\vec{e},v\vec{e}})_{u \leq v \in \mathbb{N}}$. Cette suite est invariante en loi sous l'action du shift $\theta_{\vec{e}}$.

De plus, $X_{0,u\vec{e}} + X_{u\vec{e},v\vec{e}} \leq X_{0,v\vec{e}}$, on a ainsi une propriété de sur-additivité.

On est dans le cadre d'application du théorème sous-additif de Kingman On a donc la CV $\frac{X_{n,n}}{n} = \frac{X_{0,n\vec{e}}}{n}$ p.s.

On a un système ergodique, donc la limite est en fait une constante $C \in \overline{\mathbb{R}^+}$. Par la loi des grands nombres, comme $\mathbb{E}[X_{1,1}] > 0$, on a de plus $C \geq \mathbb{E}[X_{1,1}] > 0$. $\square$

Si de plus $C < \infty$, on a une convergence dans L^1. Reste ceci dit à obtenir la valeur de C.

2.4 Variante du problème, avec des sources et des puits

Définition 30 :

On considère un paramètre $0 < p < 1$. On considère $E \subset (\mathbb{N}^*)^2$ où on garde chaque point du réseau indépendamment des autres, avec probabilité p.

On note alors $\mathcal{L}_{m,n}(p)$ le nombre de points la longueur maximale d'un chemin strictement croissant dans $E \cap [0, m] \times [0, n]$. Dans ce contexte, un chemin (x_k) strictement croissant vérifie $x_{k,1} < x_{k+1,1}$ et *aussi* $x_{k,2} < x_{k+1,2}$. On peut alors à nouveau appliquer l'algorithme des lignes de Hammersley. En particulier, deux points verticalement (ou horizontalement) alignés peuvent se retrouver sur la même ligne E_k.

Définition 31 :

Le long de l'axe $\mathbb{N} \times 0$ (resp. $0 \times \mathbb{N}$), on place des sources (resp. des puits). Pour relier la k-ième source au k-ième puits, on part de la source, on monte d'un cran, puis on va sur la gauche tant qu'il y a des points, puis on monte d'un cran, et ainsi de suite. On obtient ainsi un ensemble de lignes L.

On peut voir chaque case de la grille $x \in \mathbb{N}^2$ comme une machine. Si on a $(1,1)$ en entrée, autrement dit si on a un segment collé à gauche et en bas de x dans L, alors on a $(0,0)$ en sortie. Si on a $(1,0)$ en entrée, alors on a $(1,0)$ en sortie, et de même avec $(0,1)$. Enfin, si on a $(0,0)$ en entrée, alors on a $(0,0)$ en sortie si $x \notin E$ n'est pas dans l'ensemble de points (avec probabilité $\overline{p} = 1-p$), et $(1,1)$ en sortie si $x \in E$ est un point de l'ensemble (avec probabilité p). Ceci nous donne la « loi d'évolution » des lignes L au sein d'un rectangle, avec les conditions au bord $(0,1)$ pour les sources (on a une sortie *verticale*) et $(1,0)$ pour les puits (on a une « sortie » horizontale).

Le nombre de lignes L qui traversent un carré donné est une majoration du nombre de lignes $\mathcal{L}_{m,n}(p)$ qui traversent le carré donné.

Lemme 32 :

Supposons qu'on a une entrée horizontale avec probabilité α et une verticale avec probabilité β, indépendantes l'une de l'autre et du sommet.

Dans ce cas, dès lors que $\alpha\beta = (1-\alpha)(1-\beta)p$, le couple en sortie a la même loi que le couple en entrée, et en particulier on a une ligne horizontale et verticale indépendamment.

Sous l'hypothèse du lemme précédent, plaçons les sources au hasard avec probabilité α sur l'axe horizontal, et les puits avec probabilité β. On obtient ainsi un système invariant par translations.

En particulier, le nombre de lignes de L qui traversent un carré $[0,m] \times [0,n]$ est égal au nombre de sources, en moyenne αm, plus le nombre de traits bleus à droite, égal en loi au nombre de puits, donc βn en moyenne. En tout, on a donc :

$$\alpha m + \beta n = \alpha m + \frac{(1-\alpha)p}{\alpha + (1-\alpha)p} n \,.$$

Fixons pour l'instant $m = n$:

$$(\alpha + \beta)n = \frac{\alpha^2(1-p) + 1}{\alpha(1-p) + p} \times n \,.$$

Avec $\alpha = \frac{\sqrt{p}}{1+\sqrt{p}}$ qui minimise ce rapport, on obtient alors $\frac{2\sqrt{p}}{1+\sqrt{p}} n \sim 2\sqrt{p} \times n$ pour $p \to 0$.