Mouvement Brownien

Léo Gayral

Ces notes sont basées sur le cours de Jean-François Le Gall.

Table des matières

1 Vecteurs et processus gaussiens

1.1 Variables gaussiennes

Par la suite, on travaille sur le légendaire espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On notera L^p les espace usuels, pour $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1 (Gaussienne centrée réduite) **:**
La gaussienne $N \sim \mathcal{N}(0,1)$ est la variable aléatoire réelle de densité $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)$.

On a $\mathbb{E}[N] = 0$, $\mathbb{E}[N^2] = 1$, et pour $z \in \mathbb{C}$, $\mathbb{E}\big[e^{zN}\big] = \exp\Big(\frac{z^2}{2}\Big)$.

Avec $z = i\xi \in i\mathbb{R}$, on obtient la fonction caractéristique $\mathbb{E}\big[e^{i\xi N}\big] = \exp\Big(-\frac{\xi^2}{2}\Big)$. Par unicité du développement en série entière, on en déduit alors $\mathbb{E}[N^{2n}] = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

Définition 2 :
On dit que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ pour $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ lorsque, de façon équivalente :

1. La densité de X est $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)$,
2. $X \overset{\mathrm{d}}{=} \mu + \sigma N$ où $N \sim \mathcal{N}(0,1)$,
3. $\mathbb{E}\big[e^{i\xi X}\big] = \exp\Big(i\mu\xi - \frac{\sigma^2\xi^2}{2}\Big)$.

Par extension, on considère $\mathcal{N}(\mu, 0) = \delta_\mu$ le dirac.

On a alors $\mathbb{E}[X] = \mu$ sa moyenne et $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

Lemme 3 (Somme de gaussiennes indépendantes) **:**
Avec des gaussiennes non dégénérées, on a $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) + \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2) \overset{\mathrm{d}}{=} \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Proposition 4 :
Soient $X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$ des gaussiennes telles que $X_n \xrightarrow{L^2} X$. On a alors $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ où $(\mu, \sigma) = \lim(\mu_n, \sigma_n)$.

Démonstration. L'existence des limites $\mu = \mathbb{E}[X]$ et $\sigma = \mathrm{Var}(X)$ découle de la convergence L^2.

En outre, par convergence L^2, on a :

$$\mathbb{E}\big[e^{i\xi X}\big] = \lim \mathbb{E}\big[e^{i\xi X_n}\big] = \lim \exp\left(i\mu_n\xi - \frac{\sigma_n^2\xi^2}{2}\right) = \exp\left(i\mu\xi - \frac{\sigma^2\xi^2}{2}\right).$$

Comme ce résultat caractérise les lois normales, on a bien $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. $\square$

1.2 Vecteurs gaussiens

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension d.

Définition 5 :

Une variable aléatoire $X \in E$ est un vecteur gaussien lorsque, pour tout vecteur $u \in E$, le produit scalaire $\langle X, u\rangle$ est une gaussienne réelle.

C'est par exemple le cas pour $E = \mathbb{R}^d$ lorsque les coordonnées $X_1, \ldots, X_d$ dans cette base sont des gaussiennes indépendantes.

Lemme 6 :

Soit $X \in E$ un vecteur gaussien. Alors il existe $\mu_X \in E$ et q_X une forme quadratique sur E telle que $\forall u \in E$, $\mathbb{E}[\langle X, u\rangle] = \langle \mu_X, u\rangle$ et $\mathrm{Var}(\langle X, u\rangle) = q_X(u)$.

Démonstration. Fixons une base (e_i) de E, et $X = (X_1, \ldots, X_d)$ ses coordonnées dans cette base.

On a $\mathbb{E}[\langle X, u\rangle] = \sum_{i=1}^{d} \mathbb{E}[X_i]u_i$, donc $\mu_X = \mathbb{E}[X] \in E$ convient.

On a d'autre part $\mathrm{Var}(\langle X, u\rangle) = \mathrm{Var}(\sum X_i u_i) = \sum_i \sum_j u_i u_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$. En conséquence, la forme quadratique de matrice $(\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1\leq i,j\leq d}$ dans la base (e_i) convient. $\square$

On a alors $\mathbb{E}\left[e^{i\langle X,u\rangle}\right] = \exp\left(i\langle \mu_X, u\rangle - \frac{1}{2}q_X(u)\right)$. Autrement dit, la loi de X est entièrement déterminée par (μ_X, q_X).

Proposition 7 :

Soit (e_i) une base orthonormée de E et $X = \sum_{i=1}^{d} X_i e_i$. Dire que les variables (X_i) sont indépendantes équivaut à dire que q_X est diagonale dans la base (e_i).

Démonstration. L'implication directe est vraie pour toute base, en particulier si elle est orthonormée. Pour l'implication réciproque, considérons $u = (u_i) \in E$. On a alors la factorisation $\mathbb{E}\left[e^{i\langle X,u\rangle}\right] = \prod_{j=1}^{d} \exp\left(iu_j\mathbb{E}[X_j] - \frac{u_j^2}{2}\mathrm{Var}(X_j)\right) = \prod \mathbb{E}\left[e^{iX_j u_j}\right]$. En conséquence, par unicité de la transformée de Fourier, les variables (X_i) sont bien indépendantes. $\square$

Notons qu'il ne suffit pas que les coordonnées (X_i) sont gaussiennes pour dire que X est un vecteur gaussien.

Par exemple, considérons $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $\varepsilon \sim \mathcal{U}(\{-1, 1\})$ indépendantes, et posons la variable $X = (Y, \varepsilon Y)$. Alors les coordonnées de X sont des gaussiennes clairement pas indépendantes. Or, $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}[\varepsilon Y^2] = \mathbb{E}[\varepsilon]\mathbb{E}[Y^2] = 0$, ce qui contredit la proposition précédente. Alternativement, $X_1 + X_2 \overset{\mathrm{d}}{=} \frac{\delta_0 + \mathcal{N}(0,1)}{2}$ n'est pas une loin gaussienne, d'où le contrexemple.

1.3 Espaces et processus gaussiens

Définition 8 (Espace gaussien) **:**

On appelle espace gaussien centré un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\mathbb{R})$ qui ne contient que des gaussiennes réelles centrées.

Remarque 9 :

Soit $X = (X_i) \in \mathbb{R}^d$ un vecteur gaussien centré. Alors $\mathrm{Vect}(X_i)$ est un espace gaussien.

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des gaussiennes centrées indépendantes. Alors $\overline{\mathrm{Vect}(X_n,\, n \in \mathbb{N})}$ est un espace gaussien.

Définition 10 (Processus aléatoire) **:**

Soient T un ensemble d'indices (par exemple un intervalle réel), et $(E, \mathcal{E})$. Un processus aléatoire indexé par T à valeurs dans E est une famille $(X_t)_{t\in T}$ de variables aléatoires à valeurs dans E.

Définition 11 (Processus gaussien) **:**

Lorsque $E = \mathbb{R}$, le processus (X_t) est gaussien lorsque toute combinaison linéaire finie $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i X_{t_i}$ est une gaussienne centrée.

Proposition 12 :

Si $(X_t)_{t\in T}$ est un processus gaussien, alors $\overline{\mathrm{Vect}(X_t,\, t \in T)}$ est un espace gaussien.

Remarque 13 (Tribu engendrée) **:**

Rappelons que pour une famille de variables aléatoires F, la tribu $\sigma(F)$ est la plus petite tribu qui rende mesurable toute variable de F. Autrement dit, c'est la tribu engendrée par les évènements $\{\omega \in \Omega,\, X(\omega) \in A\}$ où $X \in F$ et A est un ensemble mesurable à l'arrivée.

Théorème 14 :

Soient H un espace gaussien, et H_1 et H_2 deux sous-espaces. On a équivalence entre les propriétés suivantes :

1. H_1 et H_2 sont orthogonaux dans L^2, autrement dit $\forall (X,Y) \in H_1 \times H_2$, $\mathbb{E}[XY] = 0$,
2. les tribus $\sigma(H_1)$ et $\sigma(H_2)$ sont indépendantes.

Démonstration. L'implication réciproque est évidente. Pour l'implication réciproque, il suffit de montrer que pour toutes variables $X_1, \dots, X_p \in H_1$ et $Y_1, \dots, Y_q \in H_2$, les vecteurs (X_i) et (Y_j) sont indépendants, puis de conclure par un argument de classes monotones.

Considérons $\left(\tilde{X}_i\right)$ et $\left(\tilde{Y}_j\right)$ des bases orthonormées des espaces vectoriels de dimension finie engendrés par les variables (X_i) et (Y_j). Dans ce cas, $\left(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_p, \tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_q\right)$ est un vecteur gaussien, car H est un espace gaussien. En outre, par orthogonalité entre H_1 et H_2, la famille de vecteurs est orthonormale dans son ensemble, donc la matrice de covariance est l'identité. Autrement dit, toutes les variables sont indépendantes. En particulier, les vecteurs $\left(\tilde{X}_i\right)$ et $\left(\tilde{Y}_j\right)$ sont indépendants, donc en changeant de base les vecteurs (X_i) et (Y_j) sont indépendants également. □

Remarque 15 :

On peut naturellement étendre le théorème précédent pour une famille de sous-espaces $(H_i)_{i\in I}$ orthogonaux ou indépendants deux à deux.

Corollaire 16 :

Soit H un espace gaussien et K un sous-espace fermé. Dans ce cas, pour $X \in H$ quelconque, $\mathbb{E}[X|\sigma(K)]$ est la projection orthogonale $p_K(X)$ de X sur K.

Démonstration. En toute généralité, on a $X = p_K(X) + Z$, avec $Z \perp K$. En conséquence, comme $p_K(X)$ est mesurable dans $\sigma(K)$, on a $\mathbb{E}[X|\sigma(K)] = p_K(X) + \mathbb{E}[Z|\sigma(K)]$. Comme Z est indépendant de la tribu $\sigma(K)$, on a alors $\mathbb{E}[Z|\sigma(K)] = \mathbb{E}[Z] = 0$, d'où le résultat. □

Définition 17 (Fonction de covariance) **:**

Soit $(X_t)_{t\in T}$ un processus gaussien. Ce processus admet une covariance $K : T^2 \to \mathbb{R}$, telle que $K(s,t) = \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}[X_s X_t]$.

La fonction K caractérise entièrement les *lois marginales de dimension finie*, c'est-à-dire les lois des sous-familles finies $\left(X_{t_1}, \ldots, X_{t_p}\right)$, car ce sont des vecteurs gaussiens.

Remarque 18 :

La fonction K est symétrique de façon assez évidente. Cette fonction est de type positif, autrement dit $\sum\limits_{i=1}^{p} \sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_i \lambda_j K(t_i, t_j) \geq 0$ pour tous choix de $p \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}^p$ et $t \in T^p$.

1.4 Bruit blanc gaussien, mesure gaussienne

Soit μ une mesure σ-finie sur $(E, \mathcal{E})$.

Définition 19 (Bruit blanc gaussien) **:**

On appelle bruit blanc gaussien sur E, d'intensité μ, une isométrie G de $L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$ dans un espace gaussien centré H.

Pour $f \in L^2(E)$, on a $G(f) \sim \mathcal{N}\left(0, \int\limits_E f^2 \,\mathrm{d}\mu\right)$.

Pour $f, g \in L^2(E)$ on a $\mathbb{E}[G(f)G(g)] = \int\limits_E fg \,\mathrm{d}\mu$.

Pour $A \in \mathcal{E}$ de masse $\mu(A) < \infty$ finie, on note $G(A) := G(\mathbb{1}_A) \sim \mathcal{N}(0, \mu(A))$.

Lemme 20 :

Si A et B sont disjoints, de masses finies, alors $\mathbb{E}[G(A)G(B)] = 0$. Plus largement, si $A_1, \dots, A_n$ sont disjoints, alors les gaussiennes $G(A_1), \dots, G(A_n)$ sont indépendantes.

Si on a $A = \bigsqcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\mu(A) < \infty$, alors $G(A) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} G(A_n)$ est la limite L^2 de cette série.

Remarque 21 :

G se comporte à peu près comme une mesure, mais pour $\omega \in \Omega$ fixé, $A \mapsto G(A)(\omega)$ sera assez rarement une véritable mesure signée.

Théorème 22 :

Pour tout espace $(E, \mathcal{E}, \mu)$, on peut construire un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une isométrie G induisant le bruit blanc gaussien voulu.

Démonstration. Traitons ici le cas séparable, où $L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$ admet une famille orthonormale $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense. Pour tout $f \in E$, on a la série convergente $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle f, f_n\rangle f_n$.

On considère alors une famille $N_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ de gaussiennes centrées réduites indépendantes, et $H = \overline{\mathrm{Vect}(N_n,\, n \in \mathbb{N})}$. Alors $G : f_n \mapsto N_n$ induit naturellement une isométrie de $L^2(E)$ dans H. □

C'est ainsi le cas pour $E = [0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue, avec la base orthonormale $f_0 = 1$ et $f_n(t) = \sqrt{2}\cos(n\pi t)$ pour $n > 0$. Pour $f_t = \mathbb{1}_{[0,t]}$, on peut expliciter $G(f_t) = tN_0 + \sqrt{2}\sum\limits_{n>0} \frac{\sin(n\pi t)}{\sin(n\pi)} N_n$.

Proposition 23 :

Soit G un bruit blanc gaussien sur E d'intensité μ et $A \in \mathcal{E}$ tel que $\mu(A) < \infty$.

Supposons que pour tout $n \geq 1$, on a une partition $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{k_n} A_i^n$, de sorte que $\max\limits_{i=1}^{k_n} \mu(A_i^n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Dans ce cas, $\sum\limits_{i=1}^{k_n} G(A_i^n)^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A)$.

Démonstration. Soit $S_n := \sum\limits_{i=1}^{k_n} G(A_i^n)^2$. On a $\mathbb{E}[S_n] = \sum\limits_{i=1}^{k_n} \mathbb{E}\big[G(A_i^n)^2\big] = \sum\limits_{i=1}^{k_n} \mu(A_i^n) = \mu(A)$ par isométrie, d'où $\mathrm{Var}(S_n) = \sum\limits_{i=1}^{k_n} \mathrm{Var}\big(G(A_i^n)^2\big) = 2\sum\limits_{i=1}^{k_n} \mu(A_i^n)^2 \leq 2\max\limits_{i=1}^{k_n} \mu(A_i^n) \times \mu(A) \to 0$. □

2 Mouvement brownien

2.1 Pré-mouvement brownien

Soit G un bruit blanc gaussien sur $\mathbb{R}^+$ d'intensité dt, à valeurs dans un espace gaussien H.

Définition 24 (Pré-mouvement brownien) **:**
On définit ce pré-mouvement comme le processus réel $(B_t)_{t\geq 0}$ défini par $B_t = G([0,t])$.

Remarque 25 :
Notons que $B_0 \sim \mathcal{N}(0,0) = \delta_0$, autrement dit $B_0 = 0$.

Proposition 26 :
Le processus (B_t) est bien gaussien, de covariance $K(s,t) = \min(s,t) = s \wedge t$.

Démonstration. On a un processus gaussien car pour tout $t \geq 0$ on a $B_t \in H$ qui est un espace gaussien. En outre, par isométrie G, on a $K(s,t) = \mathbb{E}[B_s B_t] = \left\langle \mathbb{1}_{[0,s]}, \mathbb{1}_{[0,t]} \right\rangle = s \wedge t$. □

Proposition 27 :
Soit (X_t) un processus réel. On a équivalence entre :

1. (X_t) est un pré-MB,
2. (X_t) est un processus gaussien de covariance $K(s,t) = s \wedge t$,
3. $X_0 = 0$ et pour tous $s < t$, la variable $X_t - X_s$ est indépendante de $\sigma(X_r,\, 0 \leq r \leq s)$ et a la loi $\mathcal{N}(0, t-s)$,
4. $X_0 = 0$ et pour tous les $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p$, les variables $X_{t_{i+1}} - X_{t_i}$ sont deux à deux indépendantes, de lois $\mathcal{N}(0, t_{i+1} - t_i)$.

Démonstration. Les implications $(1 \Rightarrow 2)$ et $(3 \Rightarrow 4)$ sont directes.

Supposons ici le deuxième point. Considérons alors les espaces $H_1 = \mathrm{Vect}(X_r,\, 0 \leq r \leq s)$ et $H_2 = \mathrm{Vect}(X_s + u - X_s,\, 0 \leq u)$. On a $\mathbb{E}[X_r(X_t + u - X_t)] = K(r, t+u) - K(r,t) = r - r = 0$, donc H_1 et H_2 sont orthogonaux. On a donc la propriété d'indépendance voulue. En outre, $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et $\sigma^2 = \mathbb{E}\left[(X_t - X_s)^2\right] = K(t,t) + K(s,s) - 2K(t,s) = t + s - 2s = t - s$.

Montrons enfin $(4 \Rightarrow 1)$. Pour cela, remarquons que toute combinaison linéaire de $X_{t_1}, \ldots, X_{t_p}$ est combinaison linéaire de $X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_p} - X_{t_{p-1}}$, des gaussiennes indépendantes, donc toute combinaison est encore gaussienne. L'espace H engendré par (X_t) est bien gaussien. On construit alors un bruit blanc gaussien G sur les fonctions en escalier de $L^2(\mathbb{R}^+)$, via $G\big(\mathbb{1}_{]s,t]}\big) = X_t - X_s$.

On peut vérifier que, pour une fonction en escalier f quelconque, $G(f)$ ne dépend pas du choix de décomposition de f en somme d'indicatrices. D'autre part, quitte à utiliser une subdivision commune à f et g, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[G(f)G(g)] &= \mathbb{E}\left[G\left(\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}\right) G\left(\sum_{j=0}^{p-1} \mu_j \mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}\right)\right] \\
&= \sum_{0\leq i,j<p} \lambda_i \mu_j \mathbb{E}\big[\big(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\big)\big(X_{t_{j+1}} - X_{t_j}\big)\big] \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \mu_i (t_{i+1} - t_i) \\
&= \langle f, g \rangle_{L^2}
\end{aligned}$$

donc on a une isométrie, qui s'étend en isométrie $G : L^2(\mathbb{R}^+) \to H$ par densité des fonctions en escalier. Autrement dit, on a le bruit blanc gaussien souhaité. $\square$

Remarque 28 (Processus à accroissements indépendants et stationnaires) **:**
Le pré-MB est un cas particulier de processus de Lévy, pour lesquels on exige uniquement le fait que $X_t - X_s$ est indépendant de $\sigma(X_r,\, 0 \leq r \leq s)$, et que sa loi ne dépend que de $t - s$.

Corollaire 29 (Lois marginales) **:**
Soit (B_t) un pré-MB. Pour $t_0 < t_1 < \cdots < t_k$, la famille $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_k})$ a pour densité $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^k \sqrt{\prod_{i=0}^{k-1}(t_{i+1}-t_i)}} \exp\left(-\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2(t_{i+1}-t_i)}\right)$.

Démonstration. Il suffit pour cela d'expliciter la densité de $\big(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\big)_{0\leq i<k}$, qui est une famille de gaussiennes indépendantes, puis de faire un changement de variables linéaire. $\square$

Remarque 30 :
Tout processus avec les mêmes lois marginales finies est un pré-MB.

Proposition 31 (Propriétés d'invariance) **:**
Soit (B_t) un pré-MB. On a les propriétés suivantes :

1. Symétrie : $(-B_t)$ est un pré-MB,
2. Changement d'échelle : pour $\lambda > 0$, $\big(B_t^\lambda := \frac{1}{\lambda} B_{\lambda^2 t}\big)_{t\geq 0}$ est un pré-MB,
3. Propriété de Markov faible : pour $r \geq 0$, $(B_{t+r} - B_r)_{t\geq 0}$ est un pré-MB.

Définition 32 (Intégrale de Wiener) **:**
Soient B un pré-MB et G son bruit blanc gaussien. Pour $f \in L^2$, on note $\int_0^\infty f(s)\,\mathrm{d}B_s = G(f)$.

Plus généralement, pour $f \in L^2_{\text{loc}}$, on note $\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}B_s = G\big(f\mathbb{1}_{[0,t]}\big)$.

Remarque 33 :

Pour $f = \mathbb{1}_{[0,t]}$ on a en particulier $\int_0^\infty f(s)\,\mathrm{d}B_s = B_t$.

Cet objet est une variable aléatoire, et ne correspond pas précisément à la notion d'intégrale de Lebesgue usuelle.

2.2 Continuité des trajectoires

Définition 34 (Trajectoires d'un processus) **:**

Soit $(X_t)_{t\in T}$ un processus sur un espace métrique (E,d) muni de sa tribu borélienne.

Les trajectoires de X sont les applications $t \mapsto X_t(\omega) \in E^T$ pour chaque valeur de $\omega \in \Omega$.

Définition 35 (Modification d'un processus) **:**

Soient (X_t) et (X'_t) deux processus dans E. On dit que X est une modification de X' lorsque, pour tout $t \in T$, on a $\mathbb{P}(X_t = X'_t) = 1$.

Remarque 36 :

Cette propriété implique que les lois marginales de dimension finie sont les mêmes. Ainsi, si X est un pré-MB, X' le sera également.

En revanche, les trajectoires de X et X' peuvent être très différentes. Considérons par exemple $T = [0,1]$, $E = \mathbb{R}$, et $X = 0$. On définit le processus $X'_t = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{U_n = t}$ avec $U_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{U}(0,1)$. Dans ce cas, à t fixé, on a $\mathbb{P}(X'_t = 0) = 1$. En revanche, si on regarde les trajectoires de X', elles valent (presque-sûrement) 1 sur une partie dénombrable dense dans $[0,1]$, donc ne sont continues nulle part.

Définition 37 (Processus indistinguables) **:**

On dit que (X_t) et (X'_t) sont indistinguables lorsqu'il existe $N \subset \Omega$ tel que $\mathbb{P}(N) = 0$, et pour tout $\omega \notin N$, les trajectoires sont identiques, $X(\omega) = X'(\omega)$.

Autrement dit (quitte à compléter la tribu $\mathcal{F}$) on a $\mathbb{P}(\forall t \in T,\, X_t = X'_t) = 1$.

Deux tels processus sont en particulier des modifications l'un de l'autre.

Proposition 38 :

Soit $T = I$ un intervalle de R. Supposons que X est modification de X', et que les trajectoires de X et X' sont continues (à droite suffit). Alors X et X' sont indistinguables.

Démonstration. L'ensemble $I \cap \mathbb{Q}$ étant dénombrable, X étant modification de X', on a donc $\mathbb{P}(\forall t \in I \cap \mathbb{Q},\, X_t = X'_t) = 1$. Sur les ω correspondants, par continuité des trajectoires, $X_t = X'_t$ sur I tout entier, d'où le résultat souhaité. □

Corollaire 39 :

Si X admet une modification X' à trajectoires continues (à droite), alors cette modification est unique (à indistinguabilité près).

Lemme 40 (Méthode de chaînage) **:**

Soient $D = \{i/2^n,\, n \in \mathbb{N},\, 1 \leq i \leq 2^n\}$, $f : D \to E$ et K tels que $d\big(X_{(i-1)/2^n}, X_{i/2^n}\big) \leq K 2^{-n\alpha}$.

Alors pour tous $s, t \in D$ on a $d(f(s), f(t)) \leq \frac{2K}{1-2^{-\alpha}} |t-s|^\alpha$.

Idée. D représente les diadiques finis du segment $\{0, 1\}$. L'idée de la preuve est décomposer l'intervalle entre deux diadiques par des intervalles entres diadiques consécutifs pour un pas de subdivision fixé. On fera ainsi apparaître des sommes géométriques finies, qu'on pourra majorer en passant à la limite. □

Remarque 41 (Fonctions hölderiennes) **:**

On rappelle que $f : E \to F$ est α-hölderienne lorsqu'il existe $C > 0$ telle que pour tous $x, y \in E$ on a $d_F(f(x), f(y)) \leq C d_E(x, y)^\alpha$.

Théorème 42 (Lemme de Kolmogorov) **:**

Soient I un intervalle borné de $\mathbb{R}$, (E, d) un espace métrique complet, $(X_t)_{t \in I}$ un processus à valeurs dans E.

Supposons qu'il existe $p, \varepsilon, C \in \mathbb{R}^+$ trois constantes telles que :

$$\forall s, t \in I,\; \mathbb{E}[d(X_s, X_t)^p] \leq C |t-s|^{1+\varepsilon}.$$

Alors X admet une modification à trajectoires α-hölderiennes pour tout $\alpha \in \left]0, \frac{\varepsilon}{p}\right[$.

Démonstration. Quitte à effectuer une transformation affine on se ramène à $I = [0, 1]$. Par inégalité de Markov, on a $\mathbb{P}(d(X_s, X_t) \geq a) \leq \frac{1}{a^p} \mathbb{E}[d(X_s, X_t)^p] \leq \frac{C}{a^p} |t-s|^{1+\varepsilon}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $\alpha \in \left]0, \frac{\varepsilon}{p}\right[$ fixé, on pose $a = \frac{1}{2^{n\alpha}}$, un rang $i \in [2^n]$ et la subdivision $s = \frac{i-1}{2^n}$ et $t = \frac{i}{2^n}$ correspondante. On a alors $\mathbb{P}\big(d\big(X_{(i-1)/2^n}, X_{i/2^n}\big) \geq 1/2^{n\alpha}\big) \leq C 2^{n(p\alpha - n(1+\varepsilon)}$. En conséquence :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{2^n} \{d\big(X_{(i-1)/2^n}, X_{i/2^n}\big) \geq 1/2^{n\alpha}\}\right) \leq \frac{C}{2^{n(\varepsilon - p\alpha)}}$$

est une famille sommable en fonction de $n \in \mathbb{N}$ donc, par Borel-Cantelli, il existe un rang $n_0(\omega)$ aléatoire à partir duquel, presque-sûrement, aucun des évènements n'est réalisé. En conséquence,

$K_\alpha = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\max_{i=1}^{2^n} \frac{d\left(X_{(i-1)/2^n}, X_{i/2^n}\right)}{2^{-n\alpha}} \right)$ est fini presque-sûrement.

En appliquant le lemme technique aux trajectoires pour lesquelles $K_\alpha < \infty$, l'hypothèse est vérifiée avec $K = K_\alpha$. On en déduit une constante aléatoire C_α telle que, presque-sûrement :

$$\forall s, t \in D,\ d(X_s(\omega), X_t(\omega)) \leq C_\alpha(\omega)|t-s|^\alpha .$$

Sur cet ensemble presque-sûr, on définit $\tilde{X}(\omega)$ comme le prolongement α-hölderien de $X(\omega)|_D$, par densité de D. et comme $\tilde{X}(\omega) = x_0$ où $x_0 \in E$ est un point fixé.

Le processus $\tilde{X}$ est bien presque-sûrement α-hölderien. En outre, à $t \in [0,1]$ fixé, on a $\tilde{X}_t = \lim_{s\in D\to t} X_s$ presque-sûrement et $X_t = \lim_{s\to t} X_s$ en probabilités, donc $\mathbb{P}\left(X_t = \tilde{X}_t\right) = 1$, on a bien une modification. □

Remarque 43 :
Lorsque l'intervalle I n'est pas borné, les trajectoires ne sont plus *globalement* hölderiennes mais *localement* hölderiennes, avec une constante arbitrairement grande selon l'intervalle. Elles sont tout de même *globalement* continues.

Corollaire 44 (Existence du mouvement brownien) **:**
Un pré-MB (B_t) admet une modification à trajectoires continues, localement α-hölderiennes pour tout $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Démonstration. Soit $p > 2$. Comme $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s) \overset{\mathrm{d}}{=} \sqrt{t-s} \times \mathcal{N}(0,1)$, on a l'égalité $\mathbb{E}[|B_t - B_s|^p] = C_p \sqrt{t-s}^p$ où C_p est le moment d'ordre p de la gaussienne centrée réduite. L'hypothèse du théorème est donc satisfaite pour $\varepsilon = \frac{p}{2} - 1$.

On a donc une modification à trajectoires α-hölderiennes pour tout $\alpha < \frac{\varepsilon}{p} = \frac{p-2}{2p} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$. □

Définition 45 (Mouvement brownien) **:**
Le processus (B_t) est un mouvement brownien (réel, issu de 0) lorsque B est un pré-MB dont toutes les trajectoires sont continues.

Remarque 46 :
Toutes les propriétés d'invariance du pré-MB s'appliquent en particulier au MB.

Remarque 47 (Tribu sur les fonctions continues) **:**
On veut mesurer l'espace des fonctions $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Pour cela, on utilise $\mathscr{C}$ la tribu engendrée par les applications coordonnées $e_t : f \mapsto f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Définition 48 (Mesure de Wiener) **:**

On définit la mesure de Wiener comme la mesure de probabilités sur $(\mathcal{C}, \mathscr{C})$ induite par le MB, la mesure image W de $\mathbb{P}$ par $\Phi : \omega \mapsto (t \mapsto B_t(\omega))$.

Lemme 49 :

L'application $\Phi : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathcal{C}, \mathscr{C})$ est mesurable, donc la définition précédente a un sens.

Démonstration. L'application Φ est mesurable par définition de $\mathscr{C}$, car les projections $\omega \mapsto X_t(\omega)$ sont mesurables. $\square$

Remarque 50 (Mesure d'un cylindre) **:**

Soit un cylindre $C = \{f \in \mathcal{C},\ \forall 0 \leq i \leq p,\ w(t_i) \in A_i\}$ pour des instants $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p$ et des parties mesurables $A_i \subset \mathbb{R}$. Sa mesure est alors :

$$W(C) = \mathbb{P}(\forall 0 \leq i \leq p,\ B_{t_i} \in A_i) = \mathbb{1}_{A_0}(0) \int\limits_{\prod_{i=1}^{p} A_i} \frac{\exp\left(-\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2(t_{i+1}-t_i)}\right)}{\sqrt{2\pi}^k \sqrt{\prod_{i=0}^{k-1} (t_{i+1} - t_i)}} \,\mathrm{d}x\,.$$

Cette caractérisation de W ne suffit pas à garantir son existence. C'est le même problème que lors de la construction de la mesure de Lebesgue.

Remarque 51 (Construction canonique du MB) **:**

On prend $\Omega^0 = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $\mathcal{F}^0 = \mathscr{C}$, et $\mathbb{P}^0 = W$.

Sur l'espace $(\Omega^0, \mathcal{F}^0, \mathbb{P}^0)$, le processus $B_t^0(\omega) = \omega(t)$ est un mouvement brownien, comme le prouvent les lois marginales.

3 Propriétés des trajectoires browniennes

On considèrera par la suite les tribus $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$ et $\mathcal{F}_\infty = \sigma(B_s, s \geq 0)$.

Théorème 52 (Loi du tout ou rien) **:**

Soit $\mathcal{F}_{0^+} = \bigcap_{t>0} \mathcal{F}_t$. Alors $\mathcal{F}_{0^+}$ est grossière, ne contient que des évènements de probabilité 0 ou 1.

Démonstration. Soient $A \in \mathcal{F}_{0^+}$, des instants $0 < t_1 < \cdots < t_p$, et $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$.

Par convergence dominée, comme $B_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$ presque-sûrement, et g continue bornée, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\mathbb{1}_A g\big(B_{t_1}, \ldots, B_{t_p}\big)\big] &= \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_A g\big(B_{t_1} - B_\varepsilon, \ldots, B_{t_p} - B_\varepsilon\big)\big] \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{P}(A)\mathbb{E}\big[g\big(B_{t_1} - B_\varepsilon, \ldots, B_{t_p} - B_\varepsilon\big)\big] \\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{E}\big[g\big(B_{t_1}, \ldots, B_{t_p}\big)\big]
\end{aligned}$$

car dans le terme de droite, la variable $g(B_{t_i} - B_\varepsilon)$ est indépendante de $\mathcal{F}_\varepsilon$ donc de $\mathbb{1}_A$.

On en déduit $\mathcal{F}_{0^+}$ indépendante de $\sigma(B_s, s > 0) = \mathcal{F}_\infty$ (car $X_0 = 0$), donc en particulier d'elle-même par inclusion. □

Proposition 53 :

On a les propriétés suivantes :

1. pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\sup_{s \leq \varepsilon} B_s > 0\right) = \mathbb{P}\left(\inf_{s \leq \varepsilon} B_s < 0\right) = 1$,
2. pour tout $a \in \mathbb{R}$, en posant $T_a = \inf\{t \in \mathbb{R},\ B_t = a\}$, on a $\mathbb{P}(T_a < \infty) = 1$.

Démonstration. Remarquons que ces fonctions sont mesurables par continuité des trajectoires, car on peut se ramener à un supremum ou un infimum dénombrable. Il en va de même pour la variable T_a.

Pour montrer le premier point, utilisons une suite strictement décroissante d'instants (t_n), telle que $t_n \to 0$. Soit $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{\sup_{0 \leq s \leq t_n} B_s > 0\right\}$ une intersection d'évènements décroissants. On a $A \in \mathcal{F}_{0^+}$ donc $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq t_n} B_s > 0\right) \geq \mathbb{P}(B_{t_n} > 0) = \frac{1}{2}$, donc en passant à la limite, $\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2}$, autrement dit $\mathbb{P}(A) = 1$, d'où le résultat qui nous intéresse.

Pour montrer le second point, nous faisons un changement d'échelle :

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq 1} B_s > 0\right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq 1} B_s > \varepsilon\right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathbb{P}\left(\sup_{0\leq u\leq \frac{1}{\varepsilon^2}} \tfrac{1}{\varepsilon} B_{u\varepsilon^2} > 1\right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathbb{P}\left(\sup_{0\leq u\leq \frac{1}{\varepsilon^2}} B_u > 1\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sup_{u\geq 0} B_u > 1\right) \end{aligned}$$

donc presque-sûrement, $\sup\limits_{s\geq 0} B_s > 1$ d'où $T_1 < \infty$. On peut plus généralement étendre ce résultat à tout seuil positif a, et conclure pour $a < 0$ par symétrie. □

Corollaire 54 :

Presque-sûrement, la trajectoire de B n'est monotone sur aucun intervalle non trivial.

Démonstration. Soient $0 < p < q$ rationnels. Par la proposition précédente, on a $\sup\limits_{p\leq s\leq q} B_s > B_p$ et $\inf\limits_{p\leq s\leq q} B_s < B_p$ presque-sûrement, ce qui implique la non-monotonie de B sur l'intervalle $[p, q]$. En passant à l'intersection dénombrable, on en déduit le résultat sur tout intervalle réel. □

Proposition 55 :

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une subdivision $t_0^n = 0 < \cdots < t_{p_n}^n = t$ de $[0, t]$. On suppose que le pas de la subdivision $\max\limits_{0\leq j<p_n} (t_{j+1} - t_j)$ tend vers 0.

Alors la suite de variables $\left(\sum_{j=0}^{p_n-1} \left(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n}\right)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers t dans L^2.

Démonstration. Pour montrer ce résultat, il suffit de remarquer que, avec le bruit blanc gaussien G associé à B, on a $B_t - B_s = G(]s, t])$ pour $s < t$. En réutilisant la propriété du premier chapitre sur les intervalles disjoints, on a alors :

$$\sum_{j=0}^{p_n-1} G\left(\left]t_{j+1}^n, t_j^n\right]\right)^2 \xrightarrow{L^2} \lambda(]0, t]) = t\,.$$

□

Corollaire 56 :

La trajectoire de B est presque-sûrement à variation infinie sur tout intervalle.

Démonstration. Sans perte de généralité, considérons l'intervalle $[0, t]$. On peut alors adapter le résultat à tous les intervalles rationnels simultanément, et passer à l'intersection des évènements.

Quitte à extraire une sous-suite dans la proposition précédente, on peut de plus supposer que la convergence est presque-sûre. En particulier :

$$\left(\sum_{j=0}^{p_n-1}\left|B_{t_{j+1}^n}-B_{t_j^n}\right|\right)\times\max_{j=0}^{p_n-1}\left|B_{t_{j+1}^n}-B_{t_j^n}\right|\geq\sum_{j=0}^{p_n-1}\left(B_{t_{j+1}^n}-B_{t_j^n}\right)^2\to t\,.$$

Comme $\max_{j=0}^{p_n-1}\left|B_{t_{j+1}^n}-B_{t_j^n}\right|\to 0$ presque-sûrement, on en déduit que $\sum_{j=0}^{p_n-1}\left|B_{t_{j+1}^n}-B_{t_j^n}\right|\to\infty$ presque-sûrement, autrement dit que B est à variations infinies sur $[0,t]$. □

Remarque 57 :

Ce résultat implique en particulier que $\int_0^t f(s)dB_s$ ne peut pas être défini comme une intégrale usuelle, à partir d'une fonction (aléatoire) à variations finies.

4 Propriété de Markov forte

Définition 58 (Temps d'arrêt) **:**

Une variable T à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ est un temps d'arrêt (TA) si pour tout $t\geq 0$, on a $\{T\leq t\}\in\mathcal{F}_t$.

Remarque 59 :

C'est par exemple le cas de $T_a=\inf\{t\geq 0, B_t=a\}$. Ce n'est en revanche pas le cas de $L_1=\sup\{t\in[0,1], B_t=0\}$.

Si T est un TA, alors pour toute constante $s>0$, $T+s$ en est un également.

Définition 60 (Tribu du passé avant T) **:**

Soit T un TA. On définit $\mathcal{F}_T=\{A\in\mathcal{F}_\infty,\ \forall t\geq 0,\ A\cap\{T\leq t\}\in\mathcal{F}_t\}$.

Remarque 61 :

En particulier, de façon tautologique, T est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Proposition 62 :

La variable aléatoire $\mathbb{1}_{T<\infty}B_T$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Théorème 63 (Propriété de Markov forte) **:**

Soit T un TA tel que $\mathbb{P}(T < \infty) > 0$. Sous la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot|T < \infty)$, le processus $\left(B_t^{(T)} := \mathbb{1}_{T<\infty}(B_{T+t} - B_T)\right)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien, indépendant de $\mathcal{F}_T$.

Démonstration. Supposons ici que $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ pour simplifier la démonstration. Dans le cas général, quitte à ajouter les fonctions indicatrices $\mathbb{1}_{T<\infty}$, le schéma de preuve sera le même.

Soient $A \in \mathcal{F}_T$, des instants $0 \leq t_1 < \cdots < t_p$ et $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^+)$. On va montrer que $\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A g\left(B_{t_1}^{(T)}, \ldots, B_{t_p}^{(T)}\right)\right] = \mathbb{P}(A)\mathbb{E}\left[g\left(B_{t_1}, \ldots, B_{t_p}\right)\right]$.

En supposant cette propriété vérifiée, on en déduit que $B^{(T)}$ est un processus indépendant de $\mathcal{F}_T$, avec les lois marginales appropriées qui en font un pré-MB, et des trajectoires continues par construction, donc un MB.

Soit $[T]_n = \min\left\{\frac{j}{2^n}, j \in \mathbb{N}, \frac{j}{2^n} \geq T\right\}$ le plus petit diadique de précision n qui dépasse T. Naturellement, $[T]_n$ converge vers T en décroissant. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A g\left(B_{t_1}^{(T)}, \ldots, B_{t_p}^{(T)}\right)\right] &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A g\left(B_{[T]_n+t_1} - B_{[T]_n}, \ldots, B_{[T]_n+t_p} - B_{[T]_n}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A\cap\left\{\frac{i-1}{2^n}<T\leq\frac{i}{2^n}\right\}} g\left(B_{\frac{i}{2^n}+t_1} - B_{\frac{i}{2^n}}, \ldots, B_{\frac{i}{2^n}+t_p} - B_{\frac{i}{2^n}}\right)\right]
\end{aligned}$$

or pour tout rang $n \in \mathbb{N}$ fini, les évènements dans les indicatrices sont mesurables dans $\mathcal{F}_{\frac{i}{2^n}}$, indépendants des variables dont dépend g. On en déduit donc :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A g\left(B_{t_1}^{(T)}, \ldots, B_{t_p}^{(T)}\right)\right] \\
= & \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A \cap \left\{\tfrac{i-1}{2^n} < T \leq \tfrac{i}{2^n}\right\}\right)\mathbb{E}\left[g\left(B_{\frac{i}{2^n}+t_1} - B_{\frac{i}{2^n}}, \ldots, B_{\frac{i}{2^n}+t_p} - B_{\frac{i}{2^n}}\right)\right] \\
= & \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A \cap \left\{\tfrac{i-1}{2^n} < T \leq \tfrac{i}{2^n}\right\}\right)\mathbb{E}\left[g\left(B_{t_1}, \ldots, B_{t_p}\right)\right] \\
= & \mathbb{P}(A)\mathbb{E}\left[g\left(B_{t_1}, \ldots, B_{t_p}\right)\right].
\end{aligned}$$

□

Théorème 64 (Principe de réflexion) **:**

Soient $t < 0$, $a \geq 0$ et $b \leq a$ et $S_t = \sup_{0\leq s\leq t} B_s$. Alors $\mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \leq b) = \mathbb{P}(B_t \geq 2a - b)$.

En particulier, $S_t \overset{\mathrm{d}}{=} |B_t|$.

Démonstration. L'idée géométrique est de se dire que, lorsque $S_t \geq a$, les trajectoires qui passent en a puis descendent jusqu'à $b = a - (a - b)$ sont équivalentes aux trajectoires qui passent en a puis montent jusqu'à $a + (a - b) = 2a - b$.

Soit T_a le temps d'atteinte de a. Alors $\{S_t \geq a\} = \{T_a \leq t\}$. D'autre part, par propriété de

Markov :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_t \geq a,\, B_t \leq b) &= \mathbb{P}\Big(T_a \leq t,\, B^{(T_a)}_{t-T_a} \leq b-a\Big)\\ &= \mathbb{P}\Big(\big(T_a, B^{(T_a)}\big) \in E\Big)\\ &= \mathbb{P}\Big(\big(T_a, -B^{(T_a)}\big) \in E\Big)\end{aligned}$$

où $E = \{(s,w) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}),\, s \leq t,\, w(t-s) \leq b-a\}$. Comme les variables T_a et $B^{(T_a)}$ sont indépendantes, et que $B^{(T_a)} \overset{\mathrm{d}}{=} -B^{(T_a)}$, la dernière étape est justifiée. En remontant les calculs en sens inverse on obtient alors l'égalité souhaité.

En particulier, lorsque $a=b$, on a $\mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \leq a) = \mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \geq a) = \mathbb{P}(B_t \geq a)$. Il en découle $\mathbb{P}(S_t \geq a) = \mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \leq a) + \mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \geq a) = 2\mathbb{P}(B_t \geq a) = \mathbb{P}(|B_t| \geq a)$. □

Corollaire 65 :

Pour tout $t>0$, le couple (S_t, B_t) a pour densité $g_t(x,y) = \mathbb{1}_{x\geq 0,\, x \geq y} \frac{2(2x-y)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\Big(-\frac{(2x-y)^2}{2t}\Big)$.

Corollaire 66 :

Soit $a>0$. La variable T_a a pour densité $q_a(t) = \mathbb{1}_{t>0} \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\Big(-\frac{a^2}{2t}\Big)$.

Démonstration. $\mathbb{P}(T_a \leq t) = \mathbb{P}(S_t \geq a) = \mathbb{P}(B_t^2 \geq a^2) = \mathbb{P}\Big(N^2 \geq \frac{a^2}{t}\Big)$ où $N \sim \mathcal{N}(0,1)$, d'où le résultat souhaité en développant les calculs. □

Définition 67 (Mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$) **:**

On définit le mouvement brownien X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ par $X_t = \big(B^1_t, \ldots, B^d_t\big)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, où les B^i sont des MB (réels, issus de 0) indépendants.

Définition 68 (Mouvement brownien issu de Z) **:**

Soit Z une variable aléatoire dans $\mathbb{R}^d$. On appelle mouvement brownien issu de Z un processus X où $X_t = Z + B_t$, avec B un MB (issu de 0) de dimension d indépendant de Z.

Remarque 69 :

La propriété de Markov forte et les propriétés d'invariance sont toujours valables pour un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^d$.

Remarque 70 :

Si Φ est une isométrie vectorielle sur $\mathbb{R}^d$, et B un mouvement brownien issu de 0, alors $\Phi(B)$ est aussi un mouvement brownien issu de 0.

5 Filtrations et martingales

5.1 Filtrations

Définition 71 (Filtration) **:**
Une filtration est une famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}^+}}$ de tribus, croissante pour l'inclusion.

On pose $\mathcal{F}_{t^+} = \bigcap\limits_{s>t} \mathcal{F}_s \supset \mathcal{F}_t$, et $\mathcal{F}_{\infty^+} = \mathcal{F}_\infty$. Alors la famille $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\in\overline{\mathbb{R}^+}}$ est encore une filtration.

Définition 72 (Filtration canonique d'un processus) **:**
Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus. On pose $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s,\ s \leq t)$ la filtration canonique de X.

Définition 73 (Filtration continue à droite) **:**
On dit que $\mathcal{F}$ est continue à droite si, pour tout $t \geq 0$, on a $\mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t$.

La filtration $(\mathcal{F}_{t^+})$ est toujours continue à droite.

Définition 74 (Filtration complète) **:**
On suppose ici que la tribu $\mathcal{F}$ sur Ω est complète pour $\mathbb{P}$.

Soit $(\mathcal{F}_t)$ une filtration. On pose $\mathcal{N} = \left\{A \subset \Omega,\ \exists \widetilde{A} \in \mathcal{F}_0,\ A \subset \widetilde{A},\ \mathbb{P}\left(\widetilde{A}\right) = 0\right\}$. On dit alors que la filtration est complète lorsque $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$.

On peut toujours compléter une filtration via $\widetilde{\mathcal{F}}_t = \sigma(\mathcal{F}_t, \mathcal{N})$.

Définition 75 (Filtration adaptée) **:**
Le processus (X_t) est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ lorsque, pour tout $t \geq 0$, la variable X_t est mesurable dans $\mathcal{F}_t$. De façon équivalente, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$.

Définition 76 (Processus progressif) **:**
On dit que (X_t) est progressif pour $(\mathcal{F}_t)$ lorsque, pour tout $t \geq 0$, l'application définie par

$$(\omega, s) \in \Omega \times [0,t] \mapsto X_s(\omega) \in E$$

est mesurable pour $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0,t])$.

Lemme 77 :
Si (X_t) est progressif pour $(\mathcal{F}_t)$ alors le processus est adapté à la filtration.

Remarque 78 :

La réciproque est fausse en général, mais on a un critère suffisant.

Proposition 79 :

Soit (X_t) à valeurs dans E métrique, muni de sa tribu borélienne. Si les trajectoires de X sont continues à droite (resp. à gauche) et que X est adapté, alors X est progressif.

Démonstration. Soit $t > 0$. Pour $n \geq 1$, on pose $X_s^n = X_{\frac{i}{n}t}$ pour $\frac{i-1}{n}t \leq s < \frac{i}{n}t$, et $X_t^n = X_t$. Par continuité à droite des trajectoires, X^n converge simplement vers X. Il suffit donc de montrer que $(\omega, s) \mapsto X_s^n(\omega)$ est mesurable.

Soient $A \in \mathcal{B}(E)$ borélien. On a alors :

$$\{(\omega, s),\, X_s^n(\omega) \in A\} = \bigcup_{i=1}^{n} X_{\frac{i}{n}t}^{-1}(A) \times \left[\frac{i-1}{n}t, \frac{i}{n}t\right[\cup X_t^{-1}(A) \times \{t\}\,,$$

un ensemble mesurable dans l'espace $(\Omega, \mathcal{F})$. □

Définition 80 (Tribu progressive) **:**
On définit la tribu progressive sur $\Omega \times \mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{aligned} Prog &= \{A \subset \Omega \times \mathbb{R}^+,\ X_t(\omega) = \mathbb{1}_A(t,\omega) \text{ est un processus progressif}\} \\ &= \{A,\ \forall t \geq 0,\ A \cap (\Omega \times [0,t]) \in \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0,t])\}\,. \end{aligned}$$

Lemme 81 :
Le processus (X_t) est progressif ssi $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$ est mesurable dans $Prog$.

5.2 Temps d'arrêt et tribus associées

Définition 82 (Temps d'arrêt) **:**
La variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ est un temps d'arrêt lorsque, pour tout $t \geq 0$, on a $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Définition 83 (Tribu du passé avant T) **:**
On pose $\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty,\ \forall t \geq 0,\ A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$.

Remarque 84 :
On a $\{T = \infty\} = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{T \leq n\}\right)^c \in \mathcal{F}_\infty$ et $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$.

Proposition 85 :
On pose $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{t^+}$. Pour toute variable T dans $\mathbb{R}^+$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. T est un TA pour la filtration $(\mathcal{G}_t)$,
2. pour tout $t > 0$, on a $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$,
3. pour tout $t \geq 0$, la variable $T \wedge t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

Démonstration. Pour l'implication ($1 \Rightarrow 2$), comme T est un TA on a $\left\{T \leq t - \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{G}_{t-\frac{1}{n}} \subset \mathcal{F}_t$. En passant à l'union croissante, on a donc $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$.

Pour l'implication ($2 \Rightarrow 3$), soient $s, t \in \mathbb{R}^+$. Si $s > t$ alors $\{T \wedge t < s\} = \Omega \in \mathcal{F}_t$. Si $s \leq t$, alors $\{T \wedge t < s\} = \{T < s\} \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, d'où $T \wedge t$ mesurable dans $\mathcal{F}_t$.

Pour l'implication ($3 \Rightarrow 1$), pour tout $t > s$, on a $\{T \leq s\} = \{T \wedge t \leq s\} \in \mathcal{F}_t$. En passant à l'intersection sur les $t > s$ on a bien $\{T \leq s\} \in \mathcal{G}_s$, donc T est un TA. □

Remarque 86 (Notation) **:**

Tout comme $\mathcal{G}_t$ désigne $\mathcal{F}_{t^+}$ par la suite, on notera $\mathcal{F}_{T^+}$ la tribu des évènements antérieurs à T pour la filtration $(\mathcal{G}_t)$.

Proposition 87 :

Soient S et T deux TA pour $(\mathcal{F}_t)$. On a les propriétés suivantes :

1. Si $T = t$ est constant, alors $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{F}_{T^+} = \mathcal{F}_{t^+}$.
2. $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{T^+}$, avec égalité lorsque $(\mathcal{F}_t)$ est continue à droite.
3. T est $\mathcal{F}_T$-mesurable.
4. Pour $A \in \mathcal{F}_\infty$, on a $A \in \mathcal{F}_T$ ssi $T^A := \mathbb{1}_A \times T + \mathbb{1}_{A^c} \times \infty$ est un TA.
5. Si $S \leq T$ alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.
6. $S \wedge T$ et $S \vee T$ sont des TA, $\mathcal{F}_{S\wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$ et $\{S \leq T\}, \{S = T\} \in \mathcal{F}_{S \wedge T}$.
7. Si (T_n) est une suite croissante de TA, alors $T = \sup T_n$ est un TA.
8. Pour $t \geq 0$, si $A \in \mathcal{F}_t$, alors $A \cap \{T \geq t\} \in \mathcal{F}_T$.
9. Soit Z une variable définie sur $\{T < \infty\}$, alors Z est $\mathcal{F}_T$-mesurable ssi pour tout $t \geq 0$, la restriction de Z à $\{T \leq t\}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

Démonstration. Pour le point 4, T^A est un TA ssi pour tout $t \geq 0$, $\left\{T^A \leq t\right\} = A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ ssi $T \in \mathcal{F}_T$.

Pour le point 5, si $A \in \mathcal{F}_S$, alors $A \cap \{T \leq t\} = A \cap \{S \leq T \leq t\} = (A \cap \{S \leq t\}) \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ d'où le résultat.

Pour le point 8, si $s < t$, alors $(A \cap \{T \geq t\}) \cap \{T \leq s\} = \emptyset \in \mathcal{F}_S$. Sinon si $s \geq t$, alors $A \cap \{T \geq t\} \cap \{T \leq s\} \in \mathcal{F}_s$.

Pour le point 9, soit Z à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$. On a Z mesurable dans $\mathcal{F}_T$ ssi pour tout $A \in \mathcal{E}$ on a $\{Z \in A\} \in \mathcal{F}_T$ ssi pour tous $A \in \mathcal{E}$ et $t \geq 0$ on a $\{Z \in A\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ ssi pour tout $t \geq 0$ la restriction de Z à $\{T \leq t\}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable. $\square$

Théorème 88 :

Soit (X_t) un processus sur $(E, \mathcal{E})$, progressif pour $(\mathcal{F}_t)$. Pour tout TA T, la variable X_T définie par $[X_T](\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$ lorsque $T(\omega) < \infty$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Démonstration. D'après le point 9 de la proposition précédente, il suffit de montrer que pour tout $t \geq 0$, la restriction de X_T à $\mathbb{1}_{T \leq t}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Or cette restriction est la composition de $\omega \in \{T \leq t\} \mapsto (\omega, T(\omega) \wedge t)$ et $(\omega, s) \in \Omega \times [0, t] \mapsto X_s(\omega)$. La première application est mesurable car $T \wedge t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable, et la seconde car X est progressif. Leur composition est donc bien mesurable. $\square$

Proposition 89 :

Soit T un TA. Pour $n \geq 0$ on pose $T_n = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{\frac{k}{2^n} < T \leq \frac{k+1}{2^n}} \times \frac{k+1}{2^n} + \mathbb{1}_{T=\infty}\infty$. Alors (T_n) est une suite de TA qui décroit vers T.

Démonstration. La décroissance de la suite vers T est directe.

Il reste à montrer que à n fixé, T_n est un TA. Par construction, $T_n \geq T$ et il est clair que $T_n \in \mathcal{F}_T$. D'après le lemme suivant, on a le résultat. □

Lemme 90 :

Soient T un TA et $S \geq T$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Si S est mesurable dans $\mathcal{F}_T$, alors S est un TA.

Démonstration. On a $\{S \leq t\} \in \mathcal{F}_T$ donc $\{S \leq t\} = \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. □

Proposition 91 :

Soit (X_t) adapté, à valeurs dans (E, d) métrique.

1. Si X est à trajectoires continues, et F fermé de E, alors $T_F = \inf\{t \geq 0,\ X_t \in F\}$ est un TA de $(\mathcal{F}_t)$.
2. Si X est à trajectoires continues à droite, et O fermé de E, alors $T_O = \inf\{t \geq 0,\ X_t \in O\}$ est un TA de $(\mathcal{F}_{t^+})$.

Démonstration. Dans les deux cas, le processus est adapté et continu à droite donc progressif.

Pour le premier point, on a :

$$\{T_F \leq t\} = \left\{ \inf_{s \in [0,t] \cap \mathbb{Q}} d(X_s, F) = 0 \right\} = \bigcap_{n>0} \bigcup_{s \in [0,t] \cap \mathbb{Q}} \left\{ d(X_s, F) \leq \frac{1}{n} \right\}$$

or les variables $d(X_s, F)$ sont $\mathcal{F}_t$-mesurables, donc $\{T_F \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

De même, dans le second cas, on a $\{T_O < t\} = \bigcup_{s \in [0,t[\cap \mathbb{Q}} \{X_s \in O\} \in \mathcal{F}_t$. □

5.3 Martingales et sur-martingales

Définition 92 (Martingale) **:**

Soit (X_t) un processus réel adapté, tel que $\forall t \geq 0,\ X_t \in L^1$.

Ce processus est une martingales (resp. sur, sous) si, pour tous $0 \leq s < t$ on a $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ (resp. $\leq$, $\geq$).

Remarque 93 (Martingale fermée) **:**
Si $Z \in L^1$ est une variable intégrable, mesurable dans $\mathcal{F}_\infty$, alors $M_t = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_t]$ est une martingale.

Définition 94 (Processus à accroissements indépendants) **:**
Le processus adapté (Z_t) est à accroissements indépendants lorsque pour tous $0 \leq s < t$ on a $Z_t - Z_s$ indépendant de $\mathcal{F}_s$.

Remarque 95 :
Soit Z un processus à accroissements indépendants :
— Si $\forall t \geq 0$ on a $Z_t \in L^1$ alors $\widetilde{Z}$ défini par $\widetilde{Z}_t = Z_t - \mathbb{E}[Z_t]$ est une martingale.
— Si $Z_t \in L^2$, alors $\left(\widetilde{Z}_t^2 - \mathbb{E}\left[\widetilde{Z}_t^2\right]\right)$ est une martingale.
— Si pour tout $t \geq 0$ on a $\mathbb{E}\left[e^{\theta Z_t}\right] < \infty$, alors $\left(\frac{e^{\theta Z_t}}{\mathbb{E}\left[e^{\theta Z_t}\right]}\right)$ est une martingale.

Définition 96 ($(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien) **:**
On dit que B est un $(\mathcal{F}_t)$-MB si c'est un MB, à accroissements indépendants pour $(\mathcal{F}_t)$.

Remarque 97 :
Un mouvement brownien B est en particulier un $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$-MB pour sa filtration canonique.

Remarque 98 (Cas du MB) **:**
Soit B un $(\mathcal{F}_t)$-MB. Alors B, $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ et $\left(e^{\theta B_t - \frac{\theta^2 t}{2}}\right)_{t\geq 0}$ sont des martingales.

Plus généralement, pour toute application $f \in L^2_{\text{loc}}$, alors les processus $\left(\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}B_s\right)_{t\geq 0}$, $\left(\left(\int_0^t f\,\mathrm{d}B_s\right)^2 - \int_0^t f^2\,\mathrm{d}s\right)$ et $\left(\exp\left(\int_0^t f\,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t f^2\,\mathrm{d}s\right)\right)$ sont des martingales.

Remarque 99 (Cas d'un processus de Poisson) **:**
Soit (N_t) un processus de Poisson, de pas $\lambda > 0$. Alors $(N_t - \lambda t)$ et $\left((N_t - \lambda t)^2 - \lambda t\right)$ sont des martingales.

Proposition 100 :
Soit X un processus réel adapté et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ telle que $\forall t \geq 0$, $\mathbb{E}[f(X_t)] < \infty$.

1. Si X est une martingale et f convexe, alors $(f(X_t))$ est une sous-martingale.
2. Si X est une sous-martingale et f convexe croissante, alors $(f(X_t))$ est une sous-martingale.

Démonstration. Dans les deux cas, on considère un processus intégrable pour tout t. Pour $t > s$, l'inégalité de Jensen conditionnelle donne $\mathbb{E}[f(X_t)|\mathcal{F}_s] \geq f(\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s])$.

Dans le premier cas, ce terme est directement égal à $f(X_s)$.

Dans le second cas, $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s$, d'où l'inégalité souhaitée par croissance de f. □

Corollaire 101 :

Si X est une martingale, alors $|X|$ est une sous-martingale. Plus généralement, si pour tout $t \geq 0$ on a $\mathbb{E}[|X_t|^q] < \infty$ alors $|X|^q$ est une sous-martingale.

Si X est une sous-martingale, alors X^+ est une sous-martingale.

Proposition 102 :

Soit X une sur-martingale ou une sous-martingale. Alors $\sup\limits_{s \in [0,t]} \mathbb{E}[|X_s|] < \infty$.

Démonstration. Quitte à remplacer X par $-X$, on considère une sous-martingale. Alors X^+ est aussi une sous-martingale. Or $|X| = 2X^+ - X$. En conséquence, pour tout $s \in [0,t]$, on a $\mathbb{E}[|X_s|] = 2\mathbb{E}[X_s^+] - \mathbb{E}[X_s] \leq 2\mathbb{E}\left[X_t^+\right] - \mathbb{E}[X_0]$. □

Proposition 103 :

Soit M une martingale L^2. On considère $0 \leq s = t_0 < \cdots < t_p = t$ une subdivision de $[s,t]$. Alors $\mathbb{E}\left[\sum\limits_{i=1}^{p} \left(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}\right)^2 |\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}[M_t^2|\mathcal{F}_s] - M_s^2$.

En passant à l'espérance, on a $\mathbb{E}\left[\sum\limits_{i=1}^{p} \left(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}\right)^2\right] = \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2]$.

Démonstration. On a $\mathbb{E}\left[\left(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}\right)^2 |\mathcal{F}_{t_{i-1}}\right] = \mathbb{E}\left[M_{t_i}^2|\mathcal{F}_{t_{i-1}}\right] - M_{t_i}^2$. En passant à l'espérance conditionnelle pour $\mathcal{F}_s$, on en déduit que $\mathbb{E}\left[\left(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}\right)^2 |\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[M_{t_i}^2 - M_{t_i}^2|\mathcal{F}_s\right]$. En passant à la somme télescopique, on obtient le résultat voulu. □

Remarque 104 (Inégalités dans le cas discret) **:**

Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus à temps discret, adapté à une filtration $(\mathcal{G}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Si Y est une sur-martingale, on a l'inégalité maximale : pour tout réel $\lambda > 0$ positif, on a $\lambda \mathbb{P}\left(\max\limits_{k \leq n} |Y_k| \geq \lambda\right) \leq \mathbb{E}[|Y_0|] + 2\mathbb{E}[|Y_n|]$.

Si Y est une martingale discrète, pour tout $p > 1$ on a l'inégalité de Doob dans L^p : $\mathbb{E}\left[\left(\max\limits_{k \leq n} |Y_k|\right)^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|Y_n|^p]$.

Proposition 105 (Inégalité maximale) **:**

Soit X une surmartingale à trajectoires continues à droite. Alors pour tout réel $t \geq 0$, on a $\lambda \mathbb{P}\left(\max\limits_{s\in[0,t]}|X_s| \geq \lambda\right) \leq \mathbb{E}[|X_0|] + 2\mathbb{E}[|X_t|]$.

Démonstration. Soit $0 = t_0 < \cdots < t_p = t$ une subdivision de $[0,t]$. Le processus $(X_{t_i})_{0\leq i\leq p}$ est une surmartingale discrète. On en déduit $\lambda \mathbb{P}\left(\max\limits_{i\leq p}|X_{t_i}| \geq \lambda\right) \leq \mathbb{E}[|X_0|] + 2\mathbb{E}[|X_t|]$.

Soit $D = [0,t[\cap\mathbb{Q} \cup \{t\}$ dénombrable dense. On peut exprimer D comme limite croissante d'ensembles D_n finis, qui contiennent 0 et t. Pour tout n, $\lambda \mathbb{P}\left(\max\limits_{s\in D_n}|X_s| \geq \lambda\right) \leq \mathbb{E}[|X_0|]+2\mathbb{E}[|X_t|]$, donc par convergence monotone :

$$\lambda \mathbb{P}\left(\sup_{s\in D}|X_s| \geq \lambda\right) \leq \mathbb{E}[|X_0|] + 2\mathbb{E}[|X_t|]\,.$$

Par densité de D et continuité à droite, on déduit finalement $\sup\limits_{s\in D}|X_s| = \sup\limits_{s\in[0,t]}|X_s|$. □

Remarque 106 :

Si on retire la continuité à droite des trajectoires, on ne peut pas progresser dans la preuve après avoir montré $\lambda \mathbb{P}\left(\sup\limits_{s\in D}|X_s| \geq \lambda\right) \leq C(t) < \infty$, ce qui donne $\mathbb{P}\left(\sup\limits_{s\in D}|X_s| \geq \lambda\right) \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\sup\limits_{s\in D}|X_s| < \infty$ presque-sûrement.

Proposition 107 (Inégalité de Doob) **:**

Soit X une martingale à trajectoires continues à droite. Pour tout $t \geq 0$ et $p > 1$, on a $\mathbb{E}\left[\left(\sup\limits_{s\in[0,t]}|X_s|\right)^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|X_t|^p]$.

Démonstration. On suit le même schéma de preuve que pour la proposition précédente, car $\sup\limits_{s\in[0,t]}|X_s| = \sup\limits_{s\in D}|X_s|$ est limite croissante des $\max\limits_{s\in D_n}|X_s|$. □

Définition 108 (Nombre de montées) **:**

Soient I un sous-ensemble de $\mathbb{R}^+$ (typiquement un ensemble d'indices) et $f : I \to \mathbb{R}$. Pour $a < b$, on pose alors :

$$M^f_{a,b}(I) = \sup\{k \in \mathbb{N},\, \exists s_1 < t_1 < \cdots < s_k < t_k \in I,\, \forall 1 \leq i \leq k,\, f(s_i) \leq a,\, f(t_i) \geq b\}\,.$$

Lemme 109 :

Soient $D \subset \mathbb{R}^+$ dénombrable dense et $f : D \to \mathbb{R}$.

On suppose que :

1. f est localement bornée, bornée sur tout $D \cap [0,t]$ pour tout $t \in D$,
2. pour tous $t \in D$ et $a < b \in \mathbb{Q}$, on a $M_{a,b}^{f}(D \cap [0,t]) < \infty$.

Alors f admet une limite à droite $f(t^+)$ en tout réel $t \geq 0$, et une limite à gauche $f(t^-)$ en tout réel $t > 0$. De plus, $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto f(t^+)$ est càdlàg.

Remarque 110 (Rappel sur le cas discret) **:**

Soit (Y_n) une sur-martingale à temps discret. Pour $a < b$, en notant $M_{a,b}^Y(n)$ le nombre de montées de a à b pour le processus Y on a $\mathbb{E}\big[M_{a,b}^Y(n)\big] \leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}\big[(Y_n - a)^-\big]$, avec la convention $x = x^+ - x^-$ donc $x^- \geq 0$.

Théorème 111 :

Soient (X_t) une sur-martingale et $0 \in D \subset \mathbb{R}^+$ dénombrable dense. Presque-sûrement, on peut définir les variables $X_{t^+}(\omega)$ pour $t \geq 0$ et $X_{t^-}(\omega)$ pour $t > 0$, et $t \mapsto X_{t^+}(\omega)$ est càdlàg.

Si de plus X est une martingale, alors pour tout $t \geq 0$ on a $X_{t^+} \in L^1(\Omega)$, $X_t = \mathbb{E}[X_{t^+}|\mathcal{F}_t]$ et (X_{t^+}) est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_{t^+})$.

Démonstration. Soient $T \in D$, et $a < b \in \mathbb{Q}$. En appliquant la remarque précédente sur les martingales discrètes associées à des parties finies de $D \cap [0, T]$, puis en passant à la convergence monotone, on a :

$$\mathbb{E}\big[N_{a,b}^Y(D \cap [0,T])\big] \leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}\big[(X_T - a)^-\big]\,.$$

Soit donc $\mathcal{N} = \bigcup_{T \in D}\left(\left\{\sup_{t \in [0,T] \cap D} |X_t| = \infty\right\} \cup \left(\bigcup_{a<b \in \mathbb{Q}} M_{a,b}^Y(D \cap [0,T]) = \infty\right)\right)$. D'après ce qui précède, $\mathbb{P}(\mathcal{N}) = 0$, et sur le complémentaire les hypothèses du lemme précédent sont satisfaites.

Supposons désormais que X est une martingale. Pour $t \geq 0$ quelconque, on considère une suite (t_n) strictement décroissante, qui converge vers t. On a donc $X_{t^+} = \lim X_{t_n}$ presque-sûrement. Par décroissance, on a $X_{t_{n+1}} = \mathbb{E}\big[X_{t_n}|\mathcal{F}_{t_{n+1}}\big]$, donc $\mathbb{E}\Big[|X|_{t_{n+1}}\Big] \leq \mathbb{E}\big[|X|_{t_n}\big]$. La suite est décroissante pour la norme L^1, donc par le lemme de Fatou, $\|X_{t^+}\|_1 \leq \underline{\lim}\|X_{t_n}\|_1 \leq \|X_{t_0}\|_1 < \infty$.

En outre, comme $X_{t_n} = \mathbb{E}[X_{t_0}|\mathcal{F}_{t_n}]$, la suite est uniformément intégrable, d'où finalement $X_{t_n} \xrightarrow{L^1} X_{t^+}$. Comme $X_t = \mathbb{E}[X_{t_n}|\mathcal{F}_t]$, en passant à la limite par convergence L^1, on a alors $X_t = \mathbb{E}\big[X_{t_+}|\mathcal{F}_t\big]$.

Soient maintenant $s < t$, $s_n = s + \frac{1}{n}$ et $t_n = t + \frac{1}{n}$, de sorte que $s_n < t_n$. Si $A \in \mathcal{F}_{s^+} \subset \mathcal{F}_{s_n}$, comme $s_n < t_n$, on a $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A X_{t_n}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A X_{s_n}]$. En passant à la limite L^1, on a donc l'égalité $\mathbb{E}\big[\mathbb{1}_A X_{t_+}\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_A X_{s_+}\big]$. Par définition on a donc $\mathbb{E}[X_{t^+}|\mathcal{F}_{s^+}] = X_{s^+}$. $\square$

Remarque 112 (Rappel sur l'uniforme intégrabilité) **:**

Un processus $(X_i)_{i \in I}$ est uniformément intégrable lorsque $\sup_{i \in I}\mathbb{E}\big[|X_i|\mathbb{1}_{|X_i|>M}\big] \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Dans ce cas, le processus est borné dans L^1, mais la réciproque n'est pas vraie.

En outre, si une suite $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X_\infty$ converge en probabilités, alors la convergence L^1 vers X_∞

est équivalente à l'uniforme continuité de la suite.

Théorème 113 :
Soit (X_t) une martingale. On suppose que $(\mathcal{F}_t)$ est complète et continue à droite. Alors X admet une modification à trajectoires càdlàg, qui reste une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_t)$.

Démonstration. Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble négligeable dans la preuve précédente. On pose $\widetilde{X} = 0$ lorsque $\omega \in \mathcal{N}$ et $\widetilde{X}_t(\omega) = X_{t^+}(\omega)$ sinon.

Naturellement, $\tilde{X}$ est à trajectoires càdlàg. Comme la filtration est complète, continue à droite, on a $\mathcal{N} \in \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$ et X_{t^+} mesurable dans $\mathcal{F}_{t^+}$ d'où finalement $\widetilde{X}_t$ mesurable dans $\mathcal{F}_t$.

On a donc $X_t = \mathbb{E}[X_{t^+}|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}\left[\tilde{X}_t|\mathcal{F}_t\right] = \tilde{X}_t$, donc $\tilde{X}$ est une modification de X.

Enfin, si $s < t$, alors $\mathbb{E}\left[\tilde{X}_t|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}[X_{t^+}|\mathcal{F}_{s^+}] = X_{s^+} = \tilde{X}_s$, c'est donc une martingale. □

Remarque 114 (Contre-exemple pour des filtrations discontinues à droite) **:**
Soit $\Omega = \{\pm 1\}$ muni de la mesure uniforme $\mathbb{P}$, et $\varepsilon(\omega) = \omega$ la projection canonique.

On considère $\mathcal{F}_t = \{\emptyset, \Omega\}$ pour $t \leq 1$, et $\mathcal{F}_t = \sigma(\varepsilon)$ la tribu complète pour $t > 1$. Cette filtration est discontinue à droite en 1.

On pose enfin $X_t(\omega) = \mathbb{1}_{t>1} \times \varepsilon$. C'est bien une martingale, mais on n'aura jamais des trajectoires càdlàg.

6 Théorèmes d'arrêt

Théorème 115 :
Soit X une sur-martingale à trajectoires continues à droite, bornée dans L^1. Alors X converge presque-sûrement vers $X_\infty \in L^1$ pour $t \to \infty$.

Démonstration. Soit $D \subset \mathbb{R}^+$ dénombrable dense. On a :

$$\mathbb{E}\big[M^X_{a,b}(D \cap [0,T])\big] \leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}\big[(X_T - a)^-\big] \leq C(a,b)\,.$$

Ceci est vrai pour tout $T \in D$, donc par convergence monotone on a $\mathbb{E}\big[M^X_{a,b}(D)\big] \leq C(a,b) < \infty$. En conséquence, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{a<b\in Q} \{M^X_{a,b}(D) < \infty\}\right) = 1$. Sous ces hypothèses, on a $X_t \xrightarrow[t\in D\to\infty]{\text{p.s.}} X_\infty$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Par le lemme de Fatou, on a $\|X_\infty\|_1 \leq \sup t \in D \|X_t\|_1 < \infty$, donc $X_\infty \in L^1$.

Enfin, la convergence presque-sûre pour $t \notin D$ est donnée par la continuité à droite des trajectoires : en fixant ω, à partir d'un rang t_0 , on approche X_∞ à ε près dès qu'on est dans D

(lorsque $X_\infty \in \mathbb{R}$), et on approche X_t à droite à ε près par X_u, avec $u \in D$. Le raisonnement est le même dans les autres cas de figure. $\square$

Lemme 116 (Lemme technique, *Probability with Martingales*, p.126) **:**

Soit Z une variable aléatoire positive intégrable. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout évènement $A \in \mathcal{F}$, si $\mathbb{P}(A) < \delta$, alors $\mathbb{E}[Z\mathbb{1}_A] \leq \varepsilon$.

Démonstration. Supposons le résultat faux. On a donc un certain $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a un évènement F_n de probabilité $\mathbb{P}(F_n) < \frac{1}{2^n}$ pour lequel $\mathbb{E}[Z\mathbb{1}_{F_n}] \geq \varepsilon$.

Posons $H = \overline{\lim} F_n$. Naturellement, $\mathbb{P}(H) = 0$, donc $Z\mathbb{1}_H = 0$ presque-sûrement. Cependant, en utilisant le lemme de Fatou pour la limite supérieure, sur la famille $f_n = Z\mathbb{1}_{F_n}$ dominée par Z, on obtient $\mathbb{E}[Z\mathbb{1}_H] = \mathbb{E}\big[\overline{\lim} f_n\big] \geq \overline{\lim}\, \mathbb{E}[f_n] \geq \varepsilon$, d'où une absurdité. $\square$

Théorème 117 :

Soit X une martingale à trajectoires continues à droite. On a équivalence entre les propriétés suivantes :

1. X est une martingale fermée, il existe $Z \in L^1$ telle que pour tout $t \geq 0$, on a $X_t = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_t]$,
2. X est uniformément intégrable,
3. X converge vers X_∞ dans L^1.

Démonstration. Pour l'implication $(1 \Rightarrow 2)$, on va plus généralement montrer que la famille $\{\mathbb{E}[Z|\mathcal{G}], \mathcal{G}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}\}$ est uniformément intégrable. Soit donc $\varepsilon > 0$. Le lemme précédent nous donne un δ associé. Pour une sous-tribu $\mathcal{G}$ quelconque, on pose $Y = \mathbb{E}[Z|\mathcal{G}]$. On a $|Y| \leq \mathbb{E}[|Z||\mathcal{G}]$, donc en particulier :

$$M \times \mathbb{P}(|Y| > M) \leq \mathbb{E}[|Y|] \leq \mathbb{E}[|Z|]\,.$$

Pour $M > 0$ assez grand, on a en particulier $\mathbb{P}(|Y| > M) \leq \frac{1}{M}\mathbb{E}[|Z|] < \delta$, donc a fortiori $\mathbb{E}\big[|Y|\mathbb{1}_{|Y|>M}\big] \leq \varepsilon$. On en déduit l'uniforme intégrabilité de la famille.

L'implication $(2 \Rightarrow 3)$ vient du fait que X est bornée dans L^1 dans ce cas, donc converge vers X_∞ presque-sûrement (donc en probabilités) par le théorème précédent, et cette convergence est donc L^1 par uniforme intégrabilité.

Enfin, pour le cas $(3 \Rightarrow 1)$, en passant à la limite $s \to \infty$ dans $X_t = \mathbb{E}[X_s|\mathcal{F}_t]$, on a bien une martingale fermée pour $Z = X_\infty$. $\square$

Remarque 118 (Notation) **:**

Soit X une martingale continue à droite (resp. sur, sous), qui converge presque-sûrement vers X_∞. Alors pour tout temps d'arrêt T, la variable X_T est bien définie presque-sûrement, et $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Théorème 119 :

Soit X une martingale à trajectoires continues à droite, uniformément intégrable. Pour deux temps d'arrêt $S \leq T$, on a $X_S, X_T \in L^1$ et $X_S = \mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_S]$.

Démonstration. Lorsque $S \leq T$, on a $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$, donc il suffit ici de montrer que $\mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_S] = X_S$. Cela garantit $X_S, X_T \in L^1$, et quitte à intercaler une espérance conditionnelle par $\mathcal{F}_T$, l'égalité souhaitée.

Rappelons que quitte à découper $\mathbb{R}^+$ en une quantité dénombrable d'intervalles dyadiques de taille $\frac{1}{2^n}$, on a S_n qui prend un nombre dénombrable de valeurs, tel que $S_n \to S$ de façon décroissante.

Pour tout choix de $n \in \mathbb{N}$, le processus $Y_k^n = X_{\frac{k}{2^n}}$ correspond à une martingale pour la filtration $\mathcal{G}_k^n = \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}}$, et $U_n = 2^n S_n$ est un temps d'arrêt pour cette filtration.

On peut vérifier que $\mathcal{G}_{U_n}^n = \mathcal{F}_{S_n}$ est la même tribu du passé. En effet, comme S_n prend ses valeurs dans $\frac{1}{2^n}\mathbb{N}$, on a :

$$\mathcal{F}_{S_n} = \left\{ A \in \mathcal{F},\, \forall k \in \mathbb{N},\, A \cap \left\{ S_n \leq \frac{k}{2^n} \right\} \in \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}} \right\} = \{A,\, \forall k \in \mathbb{N},\, A \cap \{U_n \leq k\} \in \mathcal{G}_k^n\} = \mathcal{G}_{U_n}^n\,.$$

On peut donc appliquer le théorème d'arrêt dans le cas des martingales discrètes, d'où enfin $X_{S_n} = Y_{U_n}^n = \mathbb{E}\left[Y_\infty^n|\mathcal{G}_{U_n}^n\right] = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_{S_n}]$.

La suite (X_{S_n}) est uniformément intégrable, converge presque-sûrement vers X_S, donc converge dans L^1. On a donc $X_S \in L^1$, mesurable dans $\mathcal{F}_S$. En outre, pour $A \in \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_{S_n}$, on a :

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A X_S] = \lim \mathbb{E}[\mathbb{1}_A X_{S_n}] = \lim \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_{S_n}]] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A X_\infty]\,,$$

d'où $X_S = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_S]$. □

Corollaire 120 :

Si X est une martingale à trajectoires continues à droite, et S et T sont deux temps d'arrêt *bornés* tels que $S \leq T$, on a $X_S, X_T \in L^1$ et $\mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_S] = X_S$.

Démonstration. Soit $K \in \mathbb{R}^+$ un majorant de T. Le processus Y défini par $Y_t = X_{t\wedge K}$ est une martingale fermée, donc on peut lui appliquer le théorème précédent, d'où l'égalité via $X_S = Y_S = \mathbb{E}[Y_T|\mathcal{F}_S] = \mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_S]$. □

Corollaire 121 :

Soit X à trajectoires continues à droite et T un TA. Alors :

1. $(X_{t\wedge T})$ est une martingale à trajectoires càd,

2. Si X est uniformément intégrable, alors $(X_{t\wedge T})$ l'est également et $X_{t\wedge T} = \mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_t]$.

Démonstration. Il suffit de montrer l'égalité pour conclure sur le second point. Le théorème précédent nous donne $\mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_{t\wedge T}] = X_{t\wedge T}$.

Si $A \in \mathcal{F}_t$, on a :

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{T\geq t} X_{t\wedge T}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{T\geq t} \mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_{t\wedge T}]] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{T\geq t} X_T]$$

et directement $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{T<t} X_{t\wedge T}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{T\geq t} X_T]$. En conséquence, $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A X_{t\wedge T}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A X_T]$ et $X_{t\wedge T}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable d'où $\mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_t] = X_{t\wedge T}$.

Le premier point découle alors des calculs précédents, appliqués aux martingales arrêtées $Y_u = X_{u\wedge K}$ pour $K \geq t \geq s$, car $t \wedge T$ est un temps d'arrêt borné pour cette martingale. □

Pour étudier des propriétés de la martingale X, on va souvent remplacer X par $(X_{t\wedge T})$ pour obtenir une martingale uniformément intégrable, puis appliquer le théorème de l'arrêt pour avoir $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$.

Soit B un $(\mathcal{F}_t)$-MB issu de 0. On a vu que B, $(B_t^2 - t)$ et $\left(\exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda t^2}{2}\right)\right)$ sont des martingales à trajectoires continues.

Remarque 122 (Exemple 1) **:**
Soient $a < 0 < b$. Comment calculer $p := \mathbb{P}(T_a < T_b)$ pour B ? Posons $S = T_a \wedge T_b$ un TA. Alors $M_t = B_{t\wedge S}$ définit une martingale bornée, uniformément intégrable. Par le théorème d'arrêt, on a $\mathbb{E}[M_\infty] = \mathbb{E}[M_0] = 0$. Or $M_\infty = B_S = \mathbb{1}_{T_a<T_b} a + \mathbb{1}_{T_b<T_a} b$. En conséquence, on a $ap + b(1-p) = 0$, d'où $p = \frac{b}{b-a}$.

Remarque 123 (Exemple 2) **:**
Soient $a \geq 0$ et $U_a = T_a \wedge T_{-a}$ le temps de sortie de $[-a, a]$. Comment calculer $\mathbb{E}[U_a]$? Avec $N_t = B_t^2 - t$, le processus $M_t = N_{t\wedge U_a}$ est une martingale. On a donc $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0] = 0$. Donc $\mathbb{E}[t \wedge U_a] = \mathbb{E}\left[B_{t\wedge U_a}^2\right]$. Or $B_{t\wedge U_a}^2$ est borné donc dominé, et converge simplement vers $B_{U_a}^2 = a^2$, donc le terme de droite converge vers a^2. Par convergence monotone, le terme de gauche a donc pour limite $\mathbb{E}[U_a] = a^2$.

Remarque 124 (Exemple 3) **:**
Comment calculer la transformée de Laplace de T_a ? Soit $\lambda > 0$. La martingale définie par $M_t = \exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}\right)$ induit une martingale $N_t = M_{t\wedge T_a}$ positive, majorée par $e^{\lambda a}$. Par théorème d'arrêt, on a donc $\mathbb{E}[N_\infty] = \mathbb{E}[N_0] = 1$. Or $N_\infty = M_{T_a}$, et $\mathbb{E}[M_{T_a}] = \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda a - \frac{\lambda^2 T_a}{2}\right)\right]$, Pour $\nu \geq 0$, avec $\lambda = \sqrt{2\nu}$, on obtient enfin $\mathbb{E}\left[e^{-\nu T_a}\right] = e^{-a\sqrt{2\nu}}$.

7 Semi-martingales continues

Une semi-martingale est la somme d'un processus à variation finie, et d'une martingale locale. Dans ce chapitre, on étudiera séparément chacune de ces deux classes.

7.1 Processus à variation finie

7.1.1 Fonctions à variation finie

Définition 125 (Fonction à variation finie) **:**
Soit $T > 0$. Une fonction $a \in \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R})$, telle que $a(0) = 0$, est dite à variation finie (VF) lorsqu'il existe μ une mesure signée finie sur $[0,T]$ telle que $a(t) = \mu([0,t])$.

On parle aussi de fonction à variation bornée.

Remarque 126 (Fonctions VF générales) **:**
La définition précédente est assez restrictive, et peut être généralisée pour $a(0) \neq 0$ ou pour a discontinue. Une conséquence de cette définition est que μ est caractérisée par a, et sans atomes par continuité de a.

Remarque 127 (Complément sur les mesures signées) **:**
Une mesure signée μ est définie comme la différence $\mu^+ - \mu^-$ de deux mesures positives finies. A priori, on n'a pas unicité, mais on l'obtient en exigeant que les supports de μ^+ et μ^- soient finis.

On pose alors $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ la variation locale de μ. Les mesures μ^+ et μ^- sont sans atomes. En outre, $|\mu(A)| \leq |\mu|(A)$.

Démonstration. Pour $\mu = \mu_1 - \mu_2$, on pose $\nu = \mu_1 + \mu_2$. Les deux mesures sont absolument continues par rapport à ν, à densités f_1 et f_2. On a alors μ à densité $f = f_1 - f_2$. Quitte à poser $D^+ = \{t,\ f(t) > 0\}$ et de même pour D^-, on a une composante de μ à densité f^+ à support D^+, et une composante à densité f^- à support D^- disjoint. L'unicité se vérifie alors via la relation $\mu^+(A) = \sup\{\mu(C),\ C \subset A\}$. □

Lemme 128 (Fonctions VF comme différence de fonctions croissantes) **:**
La fonction $a \in \mathcal{C}$ est VF ssi elle est la différence de deux fonctions croissantes, continues, nulles en 0, autrement dit de deux fonctions VF croissantes (associées à des mesures positives).

Définition 129 (Intégrale sur une fonction VF) **:**

Pour $f \in L^1([0,T], |\mu|)$, on pose $\int\limits_0^T f(s)\,\mathrm{d}a(s) = \int\limits_0^T f(s)\,\mathrm{d}\mu(s)$, et $\int\limits_0^T f|\mathrm{d}a| = \int\limits_0^T f\,\mathrm{d}|\mu|$.

Lemme 130 :

Si a est VF, correspondant à la mesure μ, et $f \in L^1([0,T], |\mu|)$, alors $b : t \mapsto \int\limits_0^t f\,\mathrm{d}a$ est VF.

Proposition 131 :

Soit a une fonction VF de mesure μ. On a :

$$\int\limits_0^T |\mathrm{d}a| = |\mu|([0,T]) = \sup\left\{\sum_{i=1}^p |a(t_i) - a(t_{i-1})|,\ p \in \mathbb{N}^*,\ 0 = t_0 < \cdots < t_p = T\right\}.$$

De plus, pour toute famille de subdivisions emboitées dont le pas tend vers 0, les sommes précédentes tendent vers le supremum.

Démonstration. Pour $t < s$, on a $|a(s) - a(t)| \leq |\mu|([t,s])$, donc le supremum à droite est inférieur ou égal à $|\mu|([0,T])$.

Pour conclure, il nous suffit de montrer la deuxième partie du résultat. On fixe donc une famille de subdivisions $(t_i^n)_{i \leq p_n}$. On va alors raisonner de façon probabiliste.

On considère l'espace $\Omega = [0,T]$ muni de la tribu borélienne. On y définit une mesure de probabilité P en normalisant $|\mu|$. Soit $\mathcal{G}_n = \sigma\big(\left]t_{i-1}^n, t_i^n\right], 1 \leq i \leq p_n\big)$. Comme les subdivisions sont emboitées, la famille $(\mathcal{G}_n)_{n \geq 1}$ est croissante pour l'inclusion.

On pose $X = \mathbb{1}_{D^+} - \mathbb{1}_{D^-}$ bornée. C'est la dérivée de Radon de μ par rapport à $|\mu|$. Dans ce cas, $X_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_n]$ induit une martingale bornée.

On peut vérifier que X_n est la dérivée de Radon de μ par rapport à $|\mu|$ dans l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{G}_n)$. Ainsi, $X_n = \sum\limits_{i=1}^{p_n} \alpha_{n,i} \mathbb{1}_{]t_{i-1}^n, t_i^n]}$ où $\alpha_{n,i} = \frac{\mu\left(\left]t_{i-1}^n, t_i^n\right]\right)}{|\mu|\left(\left]t_{i-1}^n, t_i^n\right]\right)} = \frac{a(t_i^n) - a(t_{i-1}^n)}{|\mu|\left(\left]t_{i-1}^n, t_i^n\right]\right)}$.

En tant que martingale bornée, X_n converge dans tout L^p vers $X_\infty = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_\infty]$. Or on a $\mathcal{G}_\infty = \sigma(\mathcal{G}_n, n > 0) = \mathcal{B}([0,T])$ ici, car le pas des subdivisions tend vers 0. On a donc finalement $\mathbb{E}_\mu[|X_n|] = \sum\limits_{i=1}^p |a(t_i) - a(t_{i-1})| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[|X|] = |\mu|([0,T])$. $\square$

Proposition 132 :

Soient a VF et $f \in \mathcal{C}([0,T])$.

Si $(t_i^n)_{i\leq p_n}$ est une famille de subdivisions dont le pas tend vers 0, alors :

$$\sum_{i=1}^{p_n} f\left(t_{i-1}^n\right)\left(a(t_i^n)-a\left(t_{i-1}^n\right)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T f\,\mathrm{d}a\,.$$

Démonstration. Soit $f_n = \sum_{i=1}^{p_n} f\left(t_{i-1}^n\right)\mathbb{1}_{]t_{i-1}^n,t_i^n]}$. Par continuité de f, on a la convergence uniforme de f_n vers f. A fortiori, la somme de gauche est l'intégrale de f_n sous μ, et converge donc vers l'intégrale de droite par convergence dominée. □

Remarque 133 :

Si $\varphi \in \mathcal{C}^1$, alors $\varphi(a(t)) = \varphi(0) + \int_0^t \varphi'(a(s))\,\mathrm{d}a(s)$.

Définition 134 (Extension à $\mathbb{R}^+$) **:**

On dit que $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est VF si toute restriction $a|_{[0,T]}$ l'est. On peut déduire de a une mesure signée μ localement finie.

Si f est positive mesurable sur $\mathbb{R}^+$, on peut définit $\int_0^\infty f|\mathrm{d}a|$ comme la limite croissante des intégrales à supports bornés. Lorsque $f \in L^1(\mathbb{R}^+, |\mu|)$, on peut de même définir l'intégrale $\int_0^\infty f\,\mathrm{d}a$ sans ambiguïté.

7.1.2 Processus à variation finie

On travaille sur un espace filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$.

Définition 135 (Processus VF) **:**

Un processus (A_t) adapté à l'espace filtré est VF si toutes ses trajectoires sont VF sur $\mathbb{R}^+$.

On dit que A est croissant si ses trajectoires sont continues, croissantes, nulles en 0.

Remarque 136 :

Si A est VF, en posant $V_t = \int_0^t |\mathrm{d}A_s|$, on a un processus croissant. En conséquence, on a $A = \frac{V+A}{2} - \frac{V-A}{2}$ la différence de deux processus croissants.

Proposition 137 :

Si A est un processus VF et H un processus progressif, tels que pour tout $\omega \in \Omega$ on a $H(\omega) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, |A|(\omega))$. Alors $(H\cdot A)_t = \int_0^t H_s\,\mathrm{d}A_s$ définit un processus VF.

Démonstration. À ω fixé, $t \mapsto (H\cdot A)_t$ est bien une trajectoire VF d'après ce qui précède. Il suffit donc de justifier que ce processus est adapté à la filtration.

Soit $h : \Omega \times [0,t] \to \mathbb{R}$ mesurable dans $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0,t])$. Supposons que $h(\omega) \in L^1([0,t], |A|(\omega))$ pour tout ω. On veut montrer que $\omega \mapsto \int_0^t h(\omega, s) \, \mathrm{d}A_s(\omega)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

Si $h = \mathbb{1}_\Gamma(\omega) \times \mathbb{1}_{u,v}(s)$, on a naturellement $\int_0^t h \, \mathrm{d}A_s = \mathbb{1}_\Gamma \times (A_v - A_u)$ mesurable dans la tribu. Comme ces évènements engendrent la tribu produit, par un lemme de classes monotones, on conclut le résultat souhaité pour tout h, et en particulier pour le processus progressif H. $\square$

Remarque 138 (Affaiblissement des hypothèses) **:**
Cette hypothèse sur *tout* ω est en général trop forte.

Supposons que l'hypothèse du théorème est uniquement vraie presque-sûrement. On pose $H' = H$ pour les ω où l'hypothèse est satisfaite, et $H' = 0$ sinon. Lorsque la filtration est complète, H' est progressif. On peut alors lui appliquer le théorème, et poser $H \cdot A := H' \cdot A$.

Remarque 139 (Associativité) **:**
Si K et HK vérifient les hypothèses pour A, alors on a $H \cdot (K \cdot A) = (HK) \cdot A$.

Remarque 140 :
Pour $A_t = t$ est déterministe, associé à la mesure de Lebesgue, si H est progressif localement intégrable, alors $Y_t = \int_0^t H_s \, \mathrm{d}s$ est un processus VF.

7.2 Martingales locales

Remarque 141 :
Soient X adapté à trajectoires continues, et S, T deux TA. On note $X_t^T = X_{t \wedge T}$ le processus arrêté en T. Alors $\left(X^T\right)^S = \left(X^S\right)^T = X^{S \wedge T}$.

Définition 142 (Martingale locale) **:**
Soit (M_t) un processus adapté, à trajectoires continues.

Lorsque $M_0 = 0$, on dit que M est une martingale locale si il existe une suite croissante de TA (T_n), telle que $T_n \xrightarrow{\text{p.s.}} \infty$ et M^{T_n} une martingale u.i. pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dans le cas général, M est une martingale locale si $(M_t - M_0)_{t \geq 0}$ en est une dans le sens précédent.

Lorsque (T_n) fait que M est une martingale locale, on dit que (T_n) réduit M.

Remarque 143 :

On n'impose pas $M_t \in L^1$ ici. Par exemple, si Z est mesurable dans $\mathcal{F}_0$, telle que $\mathbb{E}[|Z|] = \infty$, alors avec B le MB usuel, $Z + B$ est une martingale locale, mais pas intégrable car $B_0 = Z \notin L^1$.

Lemme 144 :

Toute martingale est en particulier une martingale locale.

Démonstration. Quitte à retrancher M_0, on s'est ramené à une martingale centrée, nulle en $t = 0$. La famille de TA $(T_n = n)$ réduit alors M. □

Remarque 145 :

On montrera plus tard que la réciproque est fausse. Par exemple, avec B un MB dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, issu de $x \neq 0$, le processus $\left(\|B_t\|_2^{2-d}\right)_{t\geq 0}$ est une martingale locale mais pas une martingale.

Remarque 146 :

Dans la définition, on peut se contenter de demander à avoir des martingales quelconques pour chaque T_n, pas nécessairement u.i.

Démonstration. Si la suite de TA (T_n) réduit M en martingales, alors $(T_n' = T_n \wedge n)$ réduit M en martingales locales. □

Lemme 147 :

Si M et une martingale locale et S un TA alors M^S est une martingale locale.

Démonstration. Soit (T_n) qui réduit M. Comme M^{T_n} est une martingale u.i., c'est également le cas de la martingale arrêtée $\left(M^{T_n}\right)^S = \left(M^S\right)^{T_n}$, donc (T_n) réduit également M^S. □

Lemme 148 :

Si (T_n) réduit M et (S_n) une suite de TA qui tend vers l'infini p.s. alors $(T_n \wedge S_n)$ réduit M.

Démonstration. Si M^{T_n} est u.i. alors la martingale arrêtée $\left(M^{T_n}\right)^{S_n} = M^{T_n \wedge S_n}$ aussi. En outre, comme $T_n \xrightarrow{\text{p.s.}} \infty$ et $S_n \xrightarrow{\text{p.s.}} \infty$, c'est donc le cas de $S_n \wedge T_n \xrightarrow{\text{p.s.}} \infty$. On en déduit le résultat souhaité. □

Corollaire 149 (Espace des martingales locales) **:**

L'ensemble des martingales locales sur un espace filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ forme un espace vectoriel.

Démonstration. Cet ensemble est clairement un $\mathbb{R}$-cône. En outre, si (T_n) réduit M et (S_n) réduit N, alors $(T_n \wedge S_n)$ réduit M et N simultanément d'après le lemme précédent. Comme la somme de deux martingales u.i. est également u.i., on en déduit donc que $(T_n \wedge S_n)$ réduit $M + N$, qui est donc également une martingale locale. $\square$

Proposition 150 :

On a les propriétés suivantes :

1. Si M une martingale locale positive et $M_0 \in L^1$ alors M est une sur-martingale.
2. Une martingale locale dominée dans L^1 est une *vraie* martingale uniformément intégrable.
3. Pour toute martingale locale M, avec $M_0 \in L^1$, la suite de TA $(T_n = \inf\{t \geq 0, |M_t| \geq n\})$ réduit M.

Démonstration. Pour le premier point, posons $M_t = M_0 + N_t$. Si $s \leq t$, on a :

$$M_s^{T_n} = M_0 + N_s^{T_n} = M_0 + \mathbb{E}\left[N_t^{T_n}|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[M_t^{T_n}|\mathcal{F}_s\right].$$

Par le lemme de Fatou conditionnel, $M_s \geq \mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s]$. L'espérance du processus décroit avec le temps, et $M_0 \in L^1$, donc le processus est intégrable, c'est bien une sur-martingale.

Pour le second point, en partant de $M_s^{T_n} = \mathbb{E}\left[M_t^{T_n}|\mathcal{F}_s\right]$, par convergence dominée, on a $M_s = \mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s]$.

Pour le troisième point, supposons d'abord $M_0 = 0$. Alors M^{T_n} est une martingale locale bornée par n, donc une vraie martingale uniformément intégrable. Pour $M_0 \in L^1$, on domine M^{T_n} par $n \vee |M_0| \in L^1$, pour le même résultat. $\square$

Théorème 151 :

Soit M qui est une martingale locale et un processus VF à la fois. Alors $M = 0$.

Démonstration. Soit $n \geq 1$. On pose $S_n = \inf\left\{t \geq 0, \int_0^t |\mathrm{d}M_s| \geq n\right\}$. C'est une suite de TA qui tend vers l'infini presque-sûrement.

Le processus arrêté $N_t = M_t^{S_n}$ est une martingale locale. Par construction, $|N_t| \leq n$, donc c'est une *vraie* martingale bornée.

Fixons désormais $t > 0$ et montrons que $M_t = 0$. Pour $0 = t_0 < \cdots < t_p = t$ on a déjà vu :

$$\mathbb{E}\left[N_t^2\right] - \mathbb{E}\left[N_0^2\right] \leq \sum_{i=1}^{p} \mathbb{E}\left[\left(N_{t_i} - N_{t_{i-1}}\right)^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\left(\max_{1 \leq i \leq p}|N_{t_i} - N_{t_{i-1}}|\right) \times \sum_{i=1}^{p}|N_{t_i} - N_{t_{i-1}}|\right].$$

Comme N est un processus VF, constant à partir de S_n, on peut majorer la somme dans l'espérance à droite par $\int_0^t |\mathrm{d}N_s| = \int_0^{t \wedge S_n} |\mathrm{d}M_s| \leq n$.

Comme le processus est VF, on a $M_0 = N_0 = 0$. En conséquence :

$$\mathbb{E}\big[N_t^2\big] \leq n \times \mathbb{E}\left[\max_{1\leq i\leq p}\big|N_{t_i} - N_{t_{i-1}}\big|\right].$$

En prenant une suite de subdivisions dont le pas tend vers 0, par continuité des trajectoires de N sur le compact $[0,t]$, le maximum dans l'intégrale converge simplement vers 0. Comme N est bornée dans $[-n,n]$, par convergence dominée, on a donc $\mathbb{E}[N_t^2] = 0$ à la limite.

Comme $N_t = M_{t\wedge S_n} = 0 \xrightarrow{\text{p.s.}} M_t$, on obtient finalement $M_t = 0$, et donc $M = 0$. $\square$

7.3 Variation quadratique d'une martingale locale

Dans la suite du cours, sauf mention explicite, on considère des filtrations $(\mathcal{F}_t)$ complètes.

Lemme 152 :

Soient Y une martingale, $u < v \in \mathbb{R}^+$ et Z une variable bornée $\mathcal{F}_u$-mesurable. Si $W = 0$ pour $t \leq u$ et $W = Z(Y^v - Y^u)$ pour $t \geq u$, alors W est une martingale.

Théorème 153 :

Soit M une martingale locale. Alors il existe un unique processus croissant, noté $\langle M, M\rangle$, tel que $(M_t^2 - \langle M, M\rangle_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale.

De plus, pour $t > 0$ et toute suite de subdivisions $(t_k^n)_{k\leq p_n}$ de $[0, t]$ dont le pas tend vers 0 :

$$\sum_{i=1}^{p_n} \left(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}\right)^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle M, M\rangle_t \,.$$

Le processus $\langle M, M\rangle$ est la variation quadratique de M, le crochet de M.

Démonstration. Pour l'unicité, soient A et A' des variations quadratiques de M. Comme $M - A$ et $M - A'$ sont des martingales locales, $A - A'$ est une martingale locale. D'autre part, comme A et A' sont croissants, $A - A'$ est un processus VF. D'après le théorème précédent, $A - A' = 0$.

On peut se ramener au cas où $M_0 = 0$. En effet, si $M_t = M_0 + N_t$ avec $N_0 = 0$, alors $M_t^2 = M_0^2 + 2M_0N_t + N_t^2$. Comme M_0 est mesurable dans $\mathcal{F}_0$, M_0N est une martingale locale, donc $M_0^2 + 2M_0N$ aussi. En conséquence, $M^2 - A$ est une martingale locale ssi $N^2 - A$ en est une.

On s'est donc ramené à $M_0 = 0$. Supposons pour l'instant M bornée, donc M est a fortiori une *vraie* martingale. Soit $K \in \mathbb{N}$ fixé pour l'instant, et $(t_k^n)_{k\leq p_n}$ une suite de subdivisions de $[0, K]$ emboitées, dont le pas tend vers 0. On pose alors $X_t^n = \sum_{i=1}^{p_n} M_{t_{i-1}^n}\left(M_{t_i^n\wedge t} - M_{t_{i-1}^n\wedge t}\right)$. D'après le lemme précédent, X^n est une somme de martingales, donc une martingale. Pour tout $j \leq p_n$, à l'instant $t = t_j^n$, on a alors $M_{t_j^n}^2 - 2X_{t_j^n}^n = \sum_{i=1}^{j}\left(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}\right)^2$. Informellement, $M - 2X^n$ approche $\langle M, M\rangle$ sur les points de la subdivision.

On utilise alors le lemme technique ci-dessous. La suite $(X_K^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans L^2. En outre, par inégalité de Doob, $\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq K}(X_s^n - X_s^m)^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[(X_K^n - X_K^m)^2\right] \to 0$, donc il existe un processus $(X_s)_{s\geq 0}$ limite de la suite $(X_s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans L^2 pour tout $s \geq 0$.

On peut trouver des rangs n_k tels que $\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq K}\left(X_s^{n_k} - X_s^{n_{k+1}}\right)^2\right] \leq \frac{1}{2^k}$. En conséquence,

$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{0\le s\le K}\left|X_s^{n_k}-X_s^{n_{k+1}}\right|\right]\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}^k}<\infty$. Cette somme est donc finie *presque-sûrement*, d'où la convergence *uniforme* de X^{n_k} vers X sur $[0,K]$ dans ce cas.

Comme la tribu est complète, quitte à faire une modification et fixer $X=0$ sur l'ensemble de mesure nulle où on n'a pas convergence, le processus est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)$, à trajectoires continues. En exploitant la convergence L^2, on vérifie que X est bien une martingale.

Le processus $M^2-2X^{n_k}$ est croissante le long de la subdivision t^{n_k}. En conséquence, par convergence uniforme, en passant à la limite, M^2-2X est croissante le long de toutes les subdivisions donc sur $[0,K]$ par continuité des trajectoires et densité des subdivisions. Posons $A^{(K)}=M_{t\wedge K}^2-2X_{t\wedge K}$. On a ainsi obtenu un processus croissant, tel que $M_{t\wedge K}^2-A^{(K)}=2X_{t\wedge K}$ est une martingale.

Par l'argument d'unicité initial, appliqué à la martingale locale arrêtée M^K, on vérifie que $A_{t\wedge K}^{K+1}=A_t^K$. La famille de processus $\left(A^K\right)_{K\in\mathbb{N}}$ induit donc un processus A croissant sur $\mathbb{R}^+$ tout entier, tel que $(M_t^2-A_t)$ est une martingale. En outre, $A_K=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{p_n}\left(M_{t_j^n}-M_{t_{j-1}^n}\right)^2$ est une limite dans L^2, donc en probabilités. On a bien montré le théorème dans le cas où M est une martingale bornée.

Dans le cas général, si M n'est pas bornée, on considère des temps d'arrêt T_n qui réduisent M, et on peut en outre les prendre tels que M^{T_n} est une martingale bornée. On obtient ainsi $A^{\{n\}}$ issu de M^{T_n}. Toujours par l'argument d'unicité, $A_{t\wedge T_n}^{\{n+1\}}=A_t^{\{n\}}$, donc on peut passer à la limite et obtenir un processus A croissant. En outre, la famille de TA (T_n) réduit le processus (M^2-A), donc M^2-A est bien une martingale locale.

Dans ce cas, pour tout rang t fixé, conditionnellement à $\{t\le T_n\}$, les approximations de $\langle M,M\rangle_t$ convergent dans L^2 pour tout n, et $\mathbb{P}(t\le T_n)\to 1$, d'où la convergence en probabilités annoncée. $\square$

Lemme 154 :

On a $\mathbb{E}\left[(X_K^n-X_K^m)^2\right]\underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

Démonstration. Supposons $n\le m$. Si on développe la somme, on a :

$$\mathbb{E}[X_K^nX_K^m]=\sum_{i=1}^{p_n}\sum_{j=1}^{p_m}\mathbb{E}\Big[M_{t_{i-1}^n}\Big(M_{t_i^n}-M_{t_{i-1}^n}\Big)M_{t_{j-1}^n}\Big(M_{t_j^m}-M_{t_{j-1}^m}\Big)\Big].$$

En prenant les bonnes espérances conditionnelles, on constate que chaque terme de la somme est nul dès que $\left[t_{j-1}^m,t_j^m\right]\not\subset\left[t_{i-1}^n,t_i^n\right]$.

Notons alors $i_{n,m}(j)$ l'unique i tel que $\left[t_{j-1}^m,t_j^m\right]\subset\left[t_{i-1}^n,t_i^n\right]$. On s'est ramené à l'égalité :

$$\mathbb{E}[X_K^nX_K^m]=\sum_{j=1}^{p_m}\mathbb{E}\Big[M_{t_{i_{n,m}(j)-1}^n}\Big(M_{t_{i_{n,m}(j)}^n}-M_{t_{i_{n,m}(j)-1}^n}\Big)M_{t_{j-1}^n}\Big(M_{t_j^m}-M_{t_{j-1}^m}\Big)\Big].$$

Remarquons que $M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n} = \sum_{k,\, i_{n,m}(k)=i} M_{t_k^m} - M_{t_{k-1}^m}$. Si on réinsère cette expression dans l'égalité précédente :

$$\mathbb{E}[X_K^n X_K^m] = \sum_{j,k=1}^{p_m} \mathbb{1}_{i_{n,m}(k)=\mathbb{1}_{i_{n,m}(j)}} \mathbb{E}\Big[M_{t^n_{i_{n,m}(j)-1}}\Big(M_{t_k^m} - M_{t_{k-1}^m}\Big) M_{t_{j-1}^n}\Big(M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m}\Big)\Big].$$

Par le même raisonnement que précédemment, cette espérance est nulle dès que $k \neq j$. Enfin :

$$\mathbb{E}[X_K^n X_K^m] = \sum_{j=1}^{p_m} \mathbb{E}\left[M_{t^n_{i_{n,m}(j)-1}} M_{t_{j-1}^n}\Big(M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m}\Big)^2\right].$$

Par un raisonnement analogue, on montre que :

$$\mathbb{E}\big[(X_K^m)^2\big] = \sum_{j=1}^{p_m} \mathbb{E}\left[M^2_{t_{j-1}^n}\Big(M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m}\Big)^2\right],$$

et, quitte à développer cette expression dans le cas $i \in [p_n]$:

$$\mathbb{E}\big[(X_K^n)^2\big] = \sum_{j=1}^{p_m} \mathbb{E}\left[M^2_{t^n_{i_{n,m}(j)-1}}\Big(M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m}\Big)^2\right].$$

En emboitant ces résultats, on obtient :

$$\mathbb{E}\big[(X_K^n - X_K^m)^2\big] = \sum_{j=1}^{p_m} \mathbb{E}\left[\Big(M_{t_{i-1}^n} - M_{t_{j-1}^m}\Big)^2\Big(M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m}\Big)^2\right].$$

Soit ε_n le pas de la subdivision t^n. Posons $U_n = \sup_{\substack{t,s\in[0,K],\\ |t-s|\leq\varepsilon_n}} |M_t - M_s|^2$. On a donc :

$$\mathbb{E}\big[(X_K^n - X_K^m)^2\big] \leq \mathbb{E}\left[U_n \sum_{j=1}^{p_m}\Big(M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m}\Big)^2\right],$$

et donc par Cauchy-Schwarz :

$$\mathbb{E}\big[(X_K^n - X_K^m)^2\big] \leq \sqrt{\mathbb{E}[U_n^2]}\sqrt{\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{p_m}\Big(M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m}\Big)^2\right)\right]}.$$

Le terme de gauche tend vers 0 car le pas de la subdivision tend vers 0, et on a montré en TD que le terme de droite est uniformément majoré. □

Corollaire 155 :

En utilisant la caractérisation par subdivisions, on constante que si $M_t = M_0 + N_t$, alors $\langle M, M\rangle = \langle N, N\rangle$.

Remarque 156 :

Si B est un $(\mathcal{F}_t)$-MB, on a $\langle B, B\rangle_t = t$.

Proposition 157 :

Si T est un TA, alors $\left\langle M^T, M^T\right\rangle_t = \langle M, M\rangle_{t\wedge T}$.

Démonstration. Comme $(M_t^2 - \langle M, M\rangle_t)$ est une martingale locale, alors $(M_{t\wedge T}^2 - \langle M, M\rangle_{t\wedge T})$ aussi. Le processus $\langle M, M\rangle_{t\wedge T}$ est bien croissant, donc égal à $\left\langle M^T, M^T\right\rangle$ par unicité. □

Proposition 158 :

Si $\langle M, M\rangle = 0$, alors M est constante en temps.

Démonstration. Soit $N = M - M_0$. On a vu que $N^2 = N^2 - \langle N, N\rangle$ est une martingale locale, positive, donc une surmartingale. Comme $N_0 = 0$, on en déduit $N = 0$ constante. □

Théorème 159 :

Soit M une martingale locale, avec $M_0 \in L^2$. Par croissance du processus $\langle M, M\rangle$, la variable $\langle M, M\rangle_\infty$ est bien définie, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}^+}$.

Alors M est une martingale bornée dans L^2 ssi $\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty] < \infty$.

Dans ce cas, $M^2 - \langle M, M\rangle$ est une martingale u.i. et on a $\mathbb{E}[M_\infty^2] = \mathbb{E}[M_0^2] + \mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty]$.

Démonstration. Supposons M bornée par C dans L^2. Par l'inégalité de Doob, on a la majoration $\mathbb{E}\left[\sup\limits_{t\geq 0} M_t^2\right] \leq 4C < \infty$.

Soit alors $S_n = \inf\{t \geq 0,\, \langle M, M\rangle_t \geq n\}$. Ainsi, $(M^2 - \langle M, M\rangle)^{S_n}$ est encore une martingale locale, dominée par $n + \sup_{t\geq 0} M_t^2 \in L^1$, donc une vraie martingale. Avec ce temps d'arrêt, on a $\mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_{t\wedge S_n}\big] = \mathbb{E}\big[M_{t\wedge S_n}^2\big] - \mathbb{E}[M_0^2] \leq C$. Pour $n \to \infty$ et $t \to \infty$, par convergence monotone, on a finalement $\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty] = \mathbb{E}[M_\infty^2] - \mathbb{E}[M_0^2] \leq C < \infty$.

Réciproquement, soit $T_n = \inf\{t \geq 0,\, M_t^2 \geq n^2\}$. On a $(M^2 - \langle M, M\rangle)^{T_n}$ une martingale locale, dominée par $\langle M, M\rangle_\infty + n^2 + M_0^2 \in L^1$, donc c'est une martingale. On a alors la majoration $\mathbb{E}\big[M_{t\wedge T_n}^2\big] = \mathbb{E}[M_0^2] + \mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_{t\wedge T_n}\big] \leq C'$, d'où $\mathbb{E}[M_t^2] \leq \underline{\lim}\, \mathbb{E}\big[M_{t\wedge T_n}^2\big] \leq C'$. On a bien borné M dans L^2.

D'autre part, on a également $M_{t\wedge T_n}$ dominée dans L^2, donc M^{T_n} est une vraie martingale, bornée dans L^2, donc u.i. En conséquence, on a M_s limite p.s. de $M_{s\wedge T_n}$ pour $n \to \infty$, et $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s]$ limite de $\mathbb{E}[M_{t\wedge T_n}|\mathcal{F}_s]$, d'où enfin le résultat. □

Corollaire 160 :

M est une martingale telle que $M_t \in L^2$ pour tout t (mais pas nécessairement bornée) ssi pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_t] < \infty$.

Démonstration. On applique le résultat précédent pour les processus arrêtés M^T aux temps d'arrêt $T = t$ constants. □

7.4 Crochet de deux martingales locales

Définition 161 :

Soient M et N deux martingales locales. On définit le crochet de M et N comme le processus $\langle M, N\rangle = \frac{1}{2}(\langle M+N, M+N\rangle - \langle M, M\rangle - \langle N, N\rangle)$. C'est un processus VF.

Proposition 162 :

On a les propriétés suivantes :

1. $\langle M, N\rangle$ est l'unique processus VF tel que $MN - \langle M, N\rangle$ est une martingale locale.
2. $M, N \mapsto \langle M, N\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique.
3. Si T est un TA, alors $\left\langle M^T, N^T\right\rangle = \left\langle M^T, N\right\rangle = \langle M, N\rangle_{t\wedge T}$.
4. Si on a une famille de subdivisions $(t_k^n)_{k\leq p_n}$ dont le pas tend vers 0, alors :

$$\sum_{k=1}^{p_n}\left(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}\right)\left(N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle M, N\rangle_t .$$

5. Si M et N sont bornées dans L^2, alors $MN - \langle M, N\rangle$ est une martingale u.i. On peut définir $\langle M, N\rangle_\infty$ la limite p.s. et L^1 du crochet. On a $\mathbb{E}[M_\infty N_\infty] = \mathbb{E}[M_0 N_0] + \mathbb{E}[\langle M, N\rangle_\infty]$.

Démonstration. Pour le premier point, on utilise l'identité $MN = \frac{(M+N)^2 - M^2 - N^2}{2}$ pour découper $MN - \langle M, N\rangle$ en somme de trois martingales locales. L'unicité se fait comme précédemment, en exhibant une maringale locale VF.

Pour le second point, la symétrie est évidente. Comme $(M + \lambda M')N = MN + \lambda M'N$, on conclut sur la bilinéarité par la propriété d'unicité, car $\langle M, N\rangle + \lambda\langle M', N\rangle$ convient.

Le quatrième point est une conséquence du théorème pour le cas $M = N$, en utilisant la même subdivision pour M, N et $M + N$.

Pour le troisième point, comme $\left\langle M^T, M^T\right\rangle_t = \langle M, M\rangle_{t\wedge T}$ pour la variation quadratique, on retrouve $\left\langle M^T, M^T\right\rangle_t = \langle M, N\rangle_{t\wedge T}$. D'autre part, on constate par le quatrième point que comme M^T est constante à partir de T, la valeur de N après T n'influe pas sur la valeur du crochet, donc $\left\langle M^T, N^T\right\rangle_t = \left\langle M^T, N\right\rangle_t$.

Le dernier point est un corollaire du théorème précédent, sur le cas des martingales bornées dans L^2. $\square$

Proposition 163 :

Soient B et B' deux $(\mathcal{F}_t)$-MB indépendants, issus de 0. Alors $\langle B, B' \rangle = 0$.

Démonstration. Il suffirait de vérifier que BB' est une martingale. On va ici raisonner autrement.

Soit $M_t = \frac{B_t + B'_t}{\sqrt{2}}$. C'est naturellement une martingale locale, mais aussi un autre MB, car il a les bonnes lois marginales et des trajectoires continues. On en déduit que $\langle M, M \rangle = t$.

Par bilinéarité, $\langle M, M \rangle = \frac{1}{2}(\langle B, B \rangle + \langle B', B' \rangle + 2\langle B, B' \rangle) = t + \langle B, B' \rangle$ d'où le résultat. $\square$

Définition 164 :

Deux martingales locales M et N sont orthogonales lorsque $\langle M, N \rangle = 0$, ou bien de façon équivalente lorsque MN est une martingale locale.

Proposition 165 (Inégalité de Kunita-Watanabe) **:**

Soient H et K deux processus progressifs, M et N deux martingales locales. Alors on a l'inégalité presque-sûre :

$$\int_0^\infty |H_s||K_s||\mathrm{d}\langle M,N\rangle_s| \leq \sqrt{\int_0^\infty H_s^2\,\mathrm{d}\langle M,M\rangle_s} \times \sqrt{\int_0^\infty K_s^2\,\mathrm{d}\langle N,N\rangle_s}$$

Démonstration. On va montrer le résultat plus fort que, presque-sûrement, pour toutes fonctions $h,k:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ mesurables, $\int_0^\infty |h(s)k(s)||\mathrm{d}\langle M,N\rangle_s| \leq \sqrt{\int_0^\infty h(s)^2\,\mathrm{d}\langle M,M\rangle_s} \times \sqrt{\int_0^\infty k(s)^2\,\mathrm{d}\langle N,N\rangle_s}$. En conséquence, pour chaque tel ω, on peut appliquer le résultat aux fonctions $h: s\mapsto H_s(\omega)$ et $k: s\mapsto K_s(\omega)$.

Quitte à utiliser de la convergence monotone ensuite, on se contentera de montrer ce résultat sur des fonctions h et k bornées, à support dans $[0,A]$.

Notons $\langle M,N\rangle_s^t = \langle M,N\rangle_t - \langle M,N\rangle_s$ pour $s\leq t$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les sommes finies sur des subdivisions adaptées à s et t, puis en extrayant une suite qui converge presque-sûrement, on en déduit que $\left|\langle M,N\rangle_s^t\right| \leq \sqrt{\langle M,M\rangle_s^t}\sqrt{\langle N,N\rangle_s^t}$. L'inégalité est vraie p.s. pour tous $s<t\in\mathbb{Q}^+$, donc pour tous $s\leq t\in\mathbb{R}^+$ par continuité.

On travaille désormais conditionnellement à cet évènement presque-sûr, à ω fixé. On a :

$$\begin{aligned}
\int_s^t |\mathrm{d}\langle M,N\rangle_r| &= \sup_{s=t_0<\cdots<t_p=t}\sum_{i=1}^p \left|\langle M,N\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}\right| \\
&\leq \sup_{s=t_0<\cdots<t_p=t}\sum_{i=1}^p \sqrt{\langle M,M\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}}\sqrt{\langle N,N\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}} \\
&\leq \sup_{s=t_0<\cdots<t_p=t}\sqrt{\sum_{i=1}^p \langle M,M\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}}\sqrt{\sum_{i=1}^p \langle N,N\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}} \\
&\leq \sqrt{\langle M,M\rangle_s^t}\sqrt{\langle N,N\rangle_s^t}.
\end{aligned}$$

Si on considère $h=\sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbb{1}_{]t_{i-1},t_i]}$ et $k=\sum_{i=1}^p \mu_i \mathbb{1}_{]t_{i-1},t_i]}$ des fonctions en escalier pour la même subdivision, sur $[0,A]$, alors :

$$\begin{aligned}
\int |h(s)k(s)||\mathrm{d}\langle M,N\rangle_s| &= \sum_{i=1}^p |\lambda_i\mu_i| \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\mathrm{d}\langle M,N\rangle_s| \\
&\leq \sum_{i=1}^p |\lambda_i\mu_i| \sqrt{\langle M,M\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}}\sqrt{\langle N,N\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}} \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^p \lambda_i^2\langle M,M\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}}\sqrt{\sum_{i=1}^p \mu_i^2\langle N,N\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}} \\
&= \sqrt{\int h^2\,\mathrm{d}\langle M,M\rangle_s}\sqrt{\int k^2\,\mathrm{d}\langle N,N\rangle_s}.
\end{aligned}$$

On peut enfin étendre aux fonctions à support dans $[0, A]$, bornées, par densité des fonctions en escalier dans $L^2(|\mathrm{d}\langle M,N\rangle_s| + \mathrm{d}\langle M,M\rangle_s + \mathrm{d}\langle N,N\rangle_s)$. $\square$

7.5 Semi-martingales continues

Définition 166 (Semi-martingale continue) **:**

Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ adapté, à trajectoires continues, est une semi-martingale lorsqu'il admet une décomposition $X = M + A$, où M est une martingale locale et A un processus VF.

Remarque 167 :

Avec nos conventions, $A_0 = 0$ donc $X_0 = M_0$.

Lemme 168 :

La décomposition est unique.

Démonstration. Si $M + A = M' + A'$, alors $M - M' = A' - A$ est un processus VF et une martingale locale, donc $M - M' = A' - A = 0$. $\square$

Définition 169 :

Si $X = M + A$ est une semi-martingale, on pose $\langle X, X\rangle_t = \langle M, M\rangle_t$.

Si on considère une seconde semi-martingale $Y = M' + A'$, alors $\langle X, Y\rangle_t := \langle M, M'\rangle_t$.

Proposition 170 :

Pour toute suite $(t_i^n)_{i\leq p_n}$ de subdivisions de $[0, t]$ emboitées, dont le pas tend vers 0, on a :

$$\sum_{i=1}^{p_n}\left(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}\right)\left(Y_{t_i^n} - Y_{t_{i-1}^n}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle X, Y\rangle_t\,.$$

Démonstration. On peut décomposer la somme précédente en quatre sommes, faisant intervenir (M, M'), (M, A'), (A, M') et (A, A') au lieu de (X, Y).

La somme associée à (M, M') converge en probabilité vers $\langle M, M'\rangle_t = \langle X, Y\rangle_t$, d'après ce qui précède.

On peut montrer que les trois autres convergent en probabilité vers 0. Par exemple, pour (M, A'), on majore la valeur absolue de la somme par :

$$\left(\sup_{i=1}^{p_n}\left|M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}\right|\right) \times \sum_{i=1}^{p_n}\left|A'_{t_i^n} - A'_{t_{i-1}^n}\right| \leq \left(\sup_{i=1}^{p_n}\left|M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}\right|\right) \times \int_0^t |\mathrm{d}A'_s|$$

le terme de droite est alors fini p.s. car A est un processus VF, et celui de gauche converge vers 0 p.s. par uniforme continuité des trajectoires de M sur le compact $[0,t]$, d'où le résultat. $\square$

8 Intégrale stochastique

Dans ce chapitre, on se place sur l'espace $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}^+}}, \mathbb{P}\right)$ muni d'une filtration complète.

8.1 Construction de l'intégrale stochastique

8.1.1 Cas des martingales bornées dans L^2

Définition 171 (Espace des martingales L^2) **:**
On pose $\mathbb{H}^2 = \{M,\ M_0 = 0,\ M$ une martingale continue, bornée dans $L^2\}$.

Remarque 172 :
On a montré que $\mathbb{H}^2 = \{M$ une martingale locale, $\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty] < \infty,\ M_0 = 0\}$.

Si $M \in \mathbb{H}^2$, alors $M_t \xrightarrow{\text{p.s.}, L^2} M_\infty$, et $M_t = \mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_t]$.

Définition 173 (Produit scalaire sur $\mathbb{H}^2$) **:**
On définit un produit scalaire sur $\mathbb{H}^2$ par :

$$\langle M, N\rangle_{\mathbb{H}^2} = \mathbb{E}[M_\infty N_\infty] = \mathbb{E}[\langle M, N\rangle_\infty]\,.$$

La norme associée est $\|M\|_{\mathbb{H}^2} = \mathbb{E}[M_\infty^2] = \mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty]$.

Proposition 174 :
L'espace $(\mathbb{H}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{H}^2})$ est un espace de Hilbert.

Démonstration. D'après ce qui précède, il est clair que ce produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc l'espace est préhilbertien. Reste à vérifier la complétude.

Soit $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{H}^2$. Autrement dit, $(M^n_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega, \mathbb{P})$, converge vers une limite Z.

Par inégalité de Doob, $\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}(M^n_t - M^m_t)^2\right] \leq 4\|M^n - M^m\|^2_{\mathbb{H}^2}$ tend vers 0 également. Quitte à extraire une sous-suite indexée par $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on a $\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}\left(M^{n_{k+1}}_t - M^{n_k}_t\right)^2\right] \leq \frac{1}{2^k}$.

On a $\mathbb{E}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}}\|M^{n_{k+1}} - M^{n_k}\|_\infty\right] < \infty$, donc presque-sûrement, la somme est finie, M^{n_k} converge uniformément vers un processus continu M. En particulier, grâce à la convergence *uniforme*, on a $M_\infty = \lim M_\infty^{n_k} = Z$ (presque-sûrement, à modification près, par complétude de la filtration).

Comme pour tout $t \geq 0$, (M_t^n) est de Cauchy dans L^2, elle converge nécessairement vers M_t dans L^2. En outre, comme $M_t^n = \mathbb{E}[M_\infty^n | \mathcal{F}_t]$, en passant à la limite, on a bien $M_t = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_t]$. On a donc bien M une martingale, bornée dans L^2, donc $M_n \xrightarrow{\mathbb{H}^2} M$. $\square$

Définition 175 :

Soit $M \in \mathbb{H}^2$. On pose $L^2(M) = \left\{ H \text{ un processus progressif, } \mathbb{E}\left[\int_0^\infty H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M, M\rangle_s\right] < \infty \right\}$.

Remarque 176 (Tribu progressive est structure hilbertienne) **:**

On rappelle que (H_s) est progressif ssi $(\omega, s) \mapsto H_s(\omega)$ est mesurable dans la tribu *Prog*.

On a alors $L^2(M) = L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+, \mathit{Prog}, \mathrm{d}\mathbb{P}\,\mathrm{d}\langle M, M\rangle_s)$, où la mesure est donnée par :

$$A \mapsto \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathbb{1}_A(\omega, s) \,\mathrm{d}\langle M, M\rangle_s\right],$$

de masse totale $\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty] = \|M\|_{\mathbb{H}^2} < \infty$.

En particulier, $L^2(M)$ est un espace de Hilbert pour $\langle H, K\rangle_{L^2(M)} = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty H_s K_s \,\mathrm{d}\langle M, M\rangle_s\right]$.

Définition 177 (Processus élémentaire) **:**

On appelle processus élémentaire un processus H sous la forme :

$$H_s(\omega) = \sum_{i=0}^{p-1} H_{(i)}(\omega) \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(s)$$

avec une subdivision $0 = t_0 < \cdots < t_p < \infty$, et $H_{(i)}$ bornée, mesurable dans $\mathcal{F}_{t_i}$.

On pose $\mathcal{E}$ l'ensemble des processus élémentaires. C'est un sous-espace vectoriel de $L^2(M)$.

Proposition 178 :

L'espace $\mathcal{E}$ est dense dans $L^2(M)$.

Démonstration. Soit $K \in L^2(M)$ tel que $K \perp \mathcal{E}$. Montrons que $K = 0$, ce qui conclura la preuve.

Posons $X_t = \int\limits_0^t K_s \,\mathrm{d}\langle M, M\rangle_s$. Par l'inégalité de Kunita-Watanabe, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int\limits_0^t |K_s| \,\mathrm{d}\langle M, M\rangle_s\right] &\leq \mathbb{E}\left[\sqrt{\int\limits_0^t K_s^2 \,\mathrm{d}\langle M, M\rangle_s}\sqrt{\langle M, M\rangle_t}\right] \\
&\leq \sqrt{\mathbb{E}\left[\int\limits_0^t K_s^2 \,\mathrm{d}\langle M, M\rangle_s\right]}\sqrt{\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_t]} \\
&\leq \sqrt{\|K\|_{L^2(M)}}\sqrt{\|M\|_{\mathbb{H}^2}} \\
&< \infty\,.
\end{aligned}$$

Donc X est un processus VF bien défini, borné.

En outre, pour toute fonction F bornée $\mathcal{F}_u$-mesurable, on a $H_s = \mathbb{1}_{]u,v]}(s)F(\omega)$ élémentaire, donc $\langle H, K\rangle_{L^2(M)} = 0 = \mathbb{E}[(X_v - X_u)F]$. Par construction de l'espérance conditionnelle, on a $X_u = \mathbb{E}[X_v|\mathcal{F}_u]$. Le processus X est une martingale.

On a donc X une martingale VF, d'où $X = 0$, et donc $K = 0$. □

Lemme 179 :

Soient H un processus progressif et T un TA. Alors $H' = \mathbb{1}_{[0,T]}H$ est aussi progressif.

Définition 180 :

Soit $M \in \mathbb{H}^2$. Pour $H = \sum\limits_{i=0}^{p-1} H_{(i)}\mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]} \in \mathcal{E}$, on définit le processus $H \cdot M$ par :

$$(H \cdot M)_t = \sum_{i=0}^{p-1} H_{(i)}\left(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t}\right).$$

Théorème 181 :

Si $M \in \mathbb{H}^2$ et $H \in \mathcal{E}$, on a $H \cdot M \in \mathbb{H}^2$, et $H \mapsto H \cdot M$ s'étend en isométrie de $L^2(M)$ dans $\mathbb{H}^2$. Le processus $H \cdot M$ est l'unique élément de $\mathbb{H}^2$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{H}^2$:

$$\langle H \cdot M, N\rangle = H \cdot \langle M, N\rangle\,,$$

où $H \cdot \langle M, N\rangle = \int\limits_0^t H_s \,\mathrm{d}\langle M, N\rangle_s$. On note alors $(H \cdot M)_t = \int\limits_0^t H_s \,\mathrm{d}M_s$.

Si T est un TA, alors $(H \cdot M)^T = H \cdot \left(M^T\right) = \left(\mathbb{1}_{[0,T]}H\right) \cdot M$.

Démonstration. L'application $H \mapsto H \cdot M$ est clairement linéaire sur $\mathcal{E}$. Le processus défini par $M^{(i)} = H_{(i)}(M^{t_{i+1}} - M^{t_i})$ est une martingale dans $\mathbb{H}^2$, donc la somme $H \cdot M = \sum\limits_{i=0}^{p-1} M^{(i)}$ aussi.

On peut vérifier que $\left\langle M^{(i)}, M^{(i)}\right\rangle_t = H_{(i)}^2\Big(\langle M, M\rangle_{t_{i+1}\wedge t} - \langle M, M\rangle_{t_i\wedge t}\Big)$ et $\left\langle M^{(i)}, M^{(j)}\right\rangle = 0$

pour $i \neq j$. En conséquence :

$$\langle H \cdot M, H \cdot M \rangle_t = \sum_{i=0}^{p-1} H_{(i)}^2 \Big(\langle M, M \rangle_{t_{i+1} \wedge t} - \langle M, M \rangle_{t_i \wedge t} \Big) = \int_0^t H_s^2 \, \mathrm{d}\langle M, M \rangle_s \,,$$

et en particulier $\| H \cdot M \|_{\mathbb{H}^2}^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty H_s^2 \, \mathrm{d}\langle M, M \rangle_s \right] = \| H \|_{L^2(M)}$. On peut alors naturellement prolonger l'isométrie sur $L^2(M)$ par densité.

Montrons ensuite la propriété sur les crochets. Pour $H \in \mathcal{E}$ on a $\langle H \cdot M, N \rangle = \sum_{i=0}^{p-1} \left\langle M^{(i)}, N \right\rangle$. On vérifie que $\left\langle M^{(i)}, N \right\rangle_t = H_{(i)} \Big(\langle M, N \rangle_{t_{i+1} \wedge t} - \langle M, N \rangle_{t_i \wedge t} \Big)$. En conséquence :

$$\langle H \cdot M, N \rangle_t = \sum_{i=0}^{p-1} H_{(i)} \Big(\langle M, N \rangle_{t_{i+1} \wedge t} - \langle M, N \rangle_{t_i \wedge t} \Big) = \int_0^t H_s \, \mathrm{d}\langle M, N \rangle_s = (H \cdot \langle M, N \rangle)_t \,,$$

autrement dit $\langle H \cdot M, N \rangle = H \cdot \langle M, N \rangle$ pour les fonctions élémentaires. Pour le cas général, soit $(H^n) \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ qui tend vers $H \in L^2(M)$. On a la convergence $\langle H^n \cdot M, N \rangle_\infty \xrightarrow{L^1} \langle H \cdot M, N \rangle_\infty$. En effet, par l'inégalité de Kunita-Watanabe :

$$\begin{aligned} E[|\langle (H - H^n) \cdot M, N \rangle_\infty|] &\leq \sqrt{\mathbb{E}[\langle (H - H^n) \cdot M, (H - H^n) \cdot M \rangle_\infty]} \sqrt{\mathbb{E}[|\langle N, N \rangle_\infty|]} \\ &\leq \| H - H^n \|_{L^2(M)} \| N \|_{\mathbb{H}^2} \\ &\underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \,. \end{aligned}$$

On a de même $((H - H^n) \cdot \langle M, N \rangle)_\infty$ bien défini, dans L^1, tend vers 0 pour $n \to \infty$. Par unicité de la limite et égalité aux rangs finis, on en déduit $\langle H \cdot M, N \rangle_\infty = (H \cdot \langle M, N \rangle)_\infty$. On étend cette égalité à tout temps t fini en utilisant un temps d'arrêt $T = t$ sur N, puisque $\left\langle H \cdot M, N^T \right\rangle = \langle H \cdot M, N \rangle^T$, et de même pour l'autre terme.

Cette relation caractérise entièrement $H \cdot M$. En effet, si on a N' qui vérifie la même relation, alors en particulier $H \cdot M - N' \in \mathbb{H}^2$ et $\langle H \cdot M - N, H \cdot M - N \rangle_\infty = 0$, donc $N = H \cdot M$.

Si $N \in \mathbb{H}^2$, alors en utilisant les propriétés du crochet, pour tout temps d'arrêt T, on a :

$$\begin{aligned} \left\langle (H \cdot M)^T, N \right\rangle_t &= \langle H \cdot M, N \rangle_{t \wedge T} \\ &= (H \cdot \langle M, N \rangle)_{t \wedge T} \\ &= \Big((\mathbb{1}_{[0,T]} H \cdot \langle M, N \rangle) \Big)_t \\ &= \left\langle \left(\mathbb{1}_{[0,T]} H \right) \cdot M, N \right\rangle_t \,, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} \left\langle (H \cdot M)^T, N \right\rangle_t &= \left(H \cdot \langle M, N \rangle^T \right)_t \\ &= \left(H \cdot \left\langle M^T, N \right\rangle \right)_t \\ &= \left\langle H \cdot M^T, N \right\rangle_t \,. \end{aligned}$$

Par unicité, on a donc bien $(H \cdot M)^T = H \cdot \left(M^T \right) = \left(\mathbb{1}_{[0,T]} H \right) \cdot M$. □

Remarque 182 :
On notera également $\int\limits_0^{\cdot} H_s \,\mathrm{d}M_s$ pour désigner le processus $H \cdot M$. Avec cette notation, on a :

$$\left\langle \int\limits_0^{\cdot} H_s \,\mathrm{d}M_s, \int\limits_0^{\cdot} K_s \,\mathrm{d}N_s \right\rangle_t = \int\limits_0^t H_s K_s \,\mathrm{d}\langle M, N\rangle_s \,.$$

Proposition 183 :
Soient $M \in \mathbb{H}^2$, H et K deux processus progressifs tels que $H, KH \in L^2(M)$. Alors on a $K \cdot (H \cdot M) = (KH) \cdot M$.

Informellement, cela revient à poser $Y = \int\limits_0^{\cdot} H_s \,\mathrm{d}M_s$, et à utiliser l'identité $\mathrm{d}Y_s = H_s \,\mathrm{d}M_s$.

Démonstration. Il faut déjà justifier que le terme de gauche est bien défini, que $K \in L^2(H \cdot M)$. Ceci vient du fait que :

$$\mathbb{E}\left[\int\limits_0^{\infty} K_s^2 \,\mathrm{d}\langle H \cdot M, H \cdot M\rangle_s\right] = \mathbb{E}\left[\int\limits_0^{\infty} (K_s H_s)^2 \,\mathrm{d}\langle M, M\rangle_s\right] < \infty \,.$$

On peut caractériser $K \cdot (H \cdot M)$ par les valeurs de $\langle K \cdot (H \cdot M), N\rangle$ pour tout $N \in \mathbb{H}^2$:

$$\langle K \cdot (H \cdot M), N\rangle = K \cdot \langle H \cdot M, N\rangle = K \cdot (H \cdot \langle M, N\rangle) = (KH) \cdot \langle M, N\rangle = \langle (KH) \cdot M, N\rangle \,,$$

d'où l'égalité entre les processus. □

Remarque 184 (Formules des moments) **:**
Soient $M \in \mathbb{H}^2$ et $H \in L^2(M)$. Pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}^+}$, on a :

1. $\mathbb{E}\left[\int\limits_0^t H_s \,\mathrm{d}M_s\right] = 0$,
2. $\mathbb{E}\left[\int\limits_0^t H_s \,\mathrm{d}M_s \int\limits_0^t K_s \,\mathrm{d}N_s\right] = \mathbb{E}\left[\int\limits_0^t H_s K_s \,\mathrm{d}\langle M, N\rangle_s\right]$,
3. En particulier, $\mathbb{E}\left[\left(\int\limits_0^t H_s \,\mathrm{d}M_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int\limits_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M, M\rangle_s\right]$.

Par ailleurs, comme $H \cdot M \in \mathbb{H}^2$, pour $u < t$, on a aussi $\mathbb{E}\left[\int\limits_0^t H_s \,\mathrm{d}M_s \middle| \mathcal{F}_u\right] = \int\limits_0^u H_s \,\mathrm{d}M_s$.

Démonstration. Le premier point est direct, puisqu'on considère l'espérance au temps t de la martingale partant de 0.

Le second point vient du fait que $(H\cdot M)(K\cdot N)-\langle H\cdot M, K\cdot N\rangle$ est ici une *vraie* martingale, donc $\mathbb{E}[(H\cdot M)_t(K\cdot N)_t] = \mathbb{E}[(HK\cdot\langle M,N\rangle)_t]$, d'où le résultat. □

8.1.2 Cas des martingales locales

Définition 185 :

Soit M une martingale locale.

On pose $L^2_{loc}(M) = \left\{ H \text{ progressif}, \forall t\in\mathbb{R}, \int\limits_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M,M\rangle_s \underset{\text{p.s.}}{<} \infty \right\}$.

Théorème 186 :

Soient M une martingale locale, et $H \in L^2_{loc}(M)$. Alors il existe une unique martingale locale, notée $H\cdot M = \int\limits_0 H_s \,\mathrm{d}M_s$, telle que $(H\cdot M)_0 = 0$ et, pour toute martingale locale N, on a $\langle H\cdot M, N\rangle = H\cdot\langle M,N\rangle$.

Lorsque $M\in\mathbb{H}^2$ et $H\in L^2(M)$, ce processus coïncide avec celui déjà défini précédemment.

Si T un TA, alors $(H\cdot M)^T = H\cdot M^T = \left(H\mathbb{1}_{[0,T]}\right)\cdot M$.

Si K est progressif, tel que $K\in L^2_{loc}(H\cdot M)$ et $KH\in L^2_{loc}(M)$, alors $K\cdot(H\cdot M) = (KH)\cdot M$.

Démonstration. Tous les objets manipulés ici sont définis par des accroissements, on peut donc sans perte de généralité se ramener au cas $M_0 = 0$.

Soient les variables $T_n = \inf\left\{ t\geq 0, \int\limits_0^t (1+H_s^2)\,\mathrm{d}\langle M,M\rangle_s \geq n \right\}$ pour $n\in\mathbb{N}$. C'est une famille de TA qui tend vers l'infini p.s.

En particulier, $\langle M,M\rangle_{T_n} \leq n < \infty$, donc $M^{T_n}\in\mathbb{H}^2$, et $\int\limits_0^\infty H_s^2\,\mathrm{d}\left\langle M^{T_n}, M^{T_n}\right\rangle_s \leq n$ donc $H\in L^2\left(M^{T_n}\right)$. En arrêtant le processus au temps T_n, on est de retour dans le cadre précédent, donc on a $(H\cdot M)^{T_n} = H\cdot\left(M^{T_n}\right)\in\mathbb{H}^2$ bien défini.

Si $n<m$, alors $\left(H\cdot\left(M^{T_m}\right)\right)^{T_n} = H\cdot\left(M^{T_n}\right)$. On peut donc étendre cette famille de façon unique en un processus $H\cdot M$. En outre, c'est une martingale locale réduite par $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On peut alors étudier $\langle H\cdot M, N\rangle$. On considère les TA $S_n = \inf\{t\geq 0, |N_t|\geq n\}$ pour $n\in\mathbb{N}$, qui réduisent N. On a en particulier $N^{S_n}\in\mathbb{H}^2$. Par ce qui précède, on a alors :

$$\langle H\cdot M, N\rangle^{T_n\wedge S_n} = \left\langle (H\cdot M)^{T_n}, N^{S_n}\right\rangle = H\cdot\left\langle M^{T_n}, N^{S_n}\right\rangle = H\cdot\langle M,N\rangle^{T_n\wedge S_n} = (H\cdot\langle M,N\rangle)^{T_n\wedge S_n},$$

d'où l'égalité des processus pour tout $t\in\mathbb{R}^+$ en faisant tendre $n\to\infty$.

L'unicité vient du fait que, si une martingale locale X vérifie la même propriété, alors a fortiori pour $N = X - H\cdot M$ on a $\langle X-H\cdot M, X-H\cdot M\rangle = 0$, donc $X = H\cdot M$.

On vérifie de même les derniers points, par extension des propriétés dans le cas $\mathbb{H}^2$, qui s'appliquent sur les processus arrêtés. □

Remarque 187 :

À nouveau, on a $\left\langle \int_0 H_s \,\mathrm{d}M_s, \int_0 K_s \,\mathrm{d}N_s \right\rangle_t = \int_0^t H_s K_s \,\mathrm{d}\langle M, N\rangle_s$.

Remarque 188 (Formules des moments) **:**

Sous l'hypothèse $\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M, M\rangle_s\right] < \infty$, on peut utiliser les formules des moments sur les martingales arrêtées, d'où :

1. $\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s \,\mathrm{d}M_s\right] = 0$,
2. $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s \,\mathrm{d}M_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M, M\rangle_s\right]$.

Lorsque cette espérance est infinie, on généralise trivialement la seconde égalité en :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s \,\mathrm{d}M_s\right)^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M, M\rangle_s\right].$$

Remarque 189 (Liens avec l'intégrale de Wiener) **:**

Dans le cas du mouvement brownien B, pour $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+)$, on avait défini l'intégrale $\int_0^t f(s) \,\mathrm{d}B_s = G\big(f \mathbb{1}_{[0,t]}\big)$ par l'intermédiaire du bruit blanc gaussien G. On peut vérifier que, avec le processus déterministe $H_s(\omega) = f(s)$, on a bien $H \cdot B = \int_0 f(s) \,\mathrm{d}B_s$.

8.1.3 Cas des semi-martingales

Définition 190 :

Soit H un processus progressif. On dit que H est localement borné lorsque, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a $\sup_{s\in[0,t]} |H_s| \underset{\text{p.s.}}{<} \infty$.

Si M est une martingale locale, alors $H \in L^2_{loc}(M)$, donc $H \cdot M$ est une martingale locale.

Si V est un processus VF, alors $\int_0^t |H_s||\mathrm{d}V_s| \underset{\text{p.s.}}{<} \infty$, donc $H \cdot V$ est un processus VF.

Définition 191 :

Soit $X = M + V$ une semi-martingale, et H localement borné. Le processus défini par

$H \cdot X := H \cdot M + H \cdot V$ est encore une semi-martingale, sous sa décomposition canonique.

Proposition 192 :

On a les propriétés suivantes :

1. $(H, X) \mapsto H \cdot X$ est bilinéaire,
2. $(H \cdot X)^T = H \cdot \left(X^T\right) = \left(H \mathbb{1}_{[0,T]}\right) \cdot X$,
3. si H et K localement bornés, alors HK aussi, et $H \cdot (K \cdot X) = (HK) \cdot X$.
4. Posons $H_s = \sum\limits_{i=1}^{p-1} H_{(i)} \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(s)$, avec $H_{(i)}$ mesurable dans $\mathcal{F}_{t_i}$. On a naturellement l'égalité $(H \cdot X)_t = \int\limits_0^t H_s \, \mathrm{d}X_s = \sum\limits_{i=0}^{p-1} H_{(i)} \big(X_{t_{i+1} \wedge t} - X_{t_i \wedge t}\big)$.

Démonstration. Les trois premiers point découlent directement de la définition.

Pour le quatrième point, remarquons déjà que par construction, H est bien localement borné. En outre, on vérifie que les $T_n = \inf\{s \geq 0, \, |H_s| \geq n\} = \inf\big\{t_i, \, \big|H_{(i)}\big| \geq n\big\}$ forment une famille de TA qui tend vers ∞.

Posons $H^n_s = H_s \mathbb{1}_{[0,T_n]}$. Par construction, $H^n \in \mathcal{E}$ est un processus élémentaire, borné par n.

On a donc $(H \cdot M)_{t \wedge T_n} = \int\limits_0^t H^n_s \, \mathrm{d}M_s = \sum\limits_{i=0}^{p-1} \mathbb{1}_{[0,T_n]} H_{(i)} \big(X_{t_{i+1} \wedge t} - X_{t_i \wedge t}\big)$. On en déduit le résultat voulu par convergence presque-sûre lorsque $n \to \infty$. □

8.1.4 Théorèmes limites pour les intégrales stochastiques

Théorème 193 (Convergence dominée) **:**

Soient $(H^n)_{n \in \mathbb{N}}$, H et K des processus progressifs localement bornés, $X = M + V$ une semi-martingale, et $t \geq 0$. On suppose que, presque-sûrement :

1. $\forall s \in [0,t]$, $H^n_s(\omega) \to H_s(\omega)$,
2. $\forall s \in [0,t]$, $|H^n_s|(\omega) \leq K_s(\omega)$.

Alors $\int\limits_0^t H^n_s \, \mathrm{d}X_s \xrightarrow{\mathbb{P}} \int\limits_0^t H_s \, \mathrm{d}X_s$.

Démonstration. En fixant ω tel que les deux propriétés sont satisfaites, on peut appliquer à $(H^n(\omega))$ le théorème de convergence vers $H(\omega)$ dominée par $K(\omega)$, contre la mesure induite par le processus VF V. Autrement dit, on a convergence p.s. de $(H^n \cdot V)$ vers $(H \cdot V)$ donc a fortiori convergence en probabilité.

D'autre part, soit $T_p = \inf\left\{r \geq 0, \int\limits_0^r K_s^2 \, \mathrm{d}\langle M, M\rangle_s \geq p\right\} \wedge t$. On a $\mathbb{P}(T_p = t) \to 1$. En outre, en appliquant la formule des moments :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{T_p} H_s^n \,\mathrm{d}M_s - \int_0^{T_p} H_s \,\mathrm{d}M_s\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{T_p} (H_s^n - H_s) \,\mathrm{d}M_s\right)^2\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\int_0^{T_p} (H_s^n - H_s)^2 \,\mathrm{d}\langle M, M\rangle_s\right] \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,
\end{aligned}$$

car, à nouveau à ω presque-sûr fixé, on peut dominer les termes dans l'intégrale par $(2K)^2$, donc l'intégrale converge presque-sûrement vers 0. En outre, on peut dominer toutes ces intégrales par $\int_0^{T_p} (2K_s)^2 \,\mathrm{d}\langle M, M\rangle_s \leq 4p$, d'espérance finie. En appliquant une *seconde* fois le théorème de convergence dominée, on en déduit bien que $(H^n \cdot M)_{T_p} \xrightarrow{L^2} (H \cdot M)_{T_p}$.

En combinant cette convergence avec $\mathbb{P}(T_p = t) \to 1$, on obtient $(H^n \cdot M)_t \xrightarrow{\mathbb{P}} (H \cdot M)_t$, d'où enfin le résultat souhaité. □

Remarque 194 :

On peut affaiblir les hypothèses pour les vérifier seulement $d\langle M, M\rangle_s$ presque-partout et $|\mathrm{d}V_s|$ presque-partout, ce qui suffit dans la preuve précédente.

Théorème 195 :

Soient H adapté à trajectoires continues (donc progressif, localement borné) et $X = M + V$ une semi-martingale. Pour toute suite de subdivisions $(t_i^n)_{i\leq p_n}$ dont le pas tend vers 0, on a :

$$\sum_{i=0}^{p_n-1} H_{t_i^n}\left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t H_s \,\mathrm{d}X_s\,.$$

Démonstration. Il suffit de considérer $H_s^n = \sum_{i=0}^{p_n-1} \mathbb{1}_{]t_i^n, t_{i+1}^n]}(s) + H_0 \mathbb{1}_{\{0\}}(s)$. On a naturellement la convergence $H_s^n \to H_s$ (pour tout (ω, s)) par continuité des trajectoires. En outre, on domine naturellement $H_s^n \leq \sup_{r\in[0,s]} |H_s| =: K_s$ qui est encore une fonction localement bornée.

Les sommes dans l'énoncé correspondent exactement aux $\int_0^t H_s^n \,\mathrm{d}X_s$, d'où la convergence en probabilité par le théorème de convergence dominée précédent. □

Remarque 196 :

Contrairement au cas de l'intégrale usuelle, on ne peut pas remplacer $H_{t_i^n}$ par une valeur prise ailleurs dans l'intervalle.

D'une part, le processus obtenu ne serait plus adapté à la filtration, mais l'obstruction est plus fondamentale que cela.

Considérons par exemple $H_s = X_s$, et remplaçons $H_{t_i^n}$ par $H_{t_{i+1}^n}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{p_n-1} X_{t_{i+1}^n}\left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}\right) &= \sum_{i=0}^{p_n-1} X_{t_i^n}\left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}\right) + \sum_{i=0}^{p_n-1}\left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}\right)^2 \\ &\xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t X_s \,\mathrm{d}X_s + \langle X, X\rangle_t \,,\end{aligned}$$

ce qui n'est clairement pas la limite obtenue dans le théorème précédent dès lors que $\langle X, X\rangle \neq 0$, que X a des variations infinies ($M \neq 0$).

Ces définitions alternatives peuvent cependant amener à d'autres types de calcul différentiel stochastique que la formule d'Itô.

8.2 La formule d'Itô

Théorème 197 :

Soient $X_1, \ldots, X_p$ des semi-martingales continues. Pour $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} F(X_t^1, \ldots, X_t^p) &= F(X_0^1, \ldots, X_0^p) \\ &+ \sum_{j=1}^{p}\int_0^t \partial_j F(X_s^1, \ldots, X_s^p)\,\mathrm{d}X_s^j \\ &+ \tfrac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{p}\int_0^t \partial_j\partial_k F(X_s^1, \ldots, X_s^p)\,\mathrm{d}\left\langle X^j, X^k\right\rangle_s .\end{aligned}$$

Démonstration. Traitons ici le cas $p = 1$. Pour $t > 0$ fixé, on considère une suite de subdivisions $(t_i^n)_{i \leq p_n}$ de $[0, t]$, dont le pas tend vers 0.

On a toujours $F\left(X_{t_{i+1}^n}\right) - F\left(X_{t_i^n}\right) = g(1) - g(0) = g'(0) + \frac{1}{2}g''(x)$ pour un certain $0 \leq x \leq 1$, avec $g(\theta) = F\left(X_{t_i^n} + \theta\left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}\right)\right)$. On a donc :

$$F\left(X_{t_{i+1}^n}\right) - F\left(X_{t_i^n}\right) = \left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}\right)F'\left(X_{t_i^n}\right) + \frac{1}{2}\left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}\right)^2 f_{i,n}\,,$$

et on peut encadrer $f_{n,i}$ par le minimum et le maximum de F'' entre $X_{t_i^n}$ et $X_{t_{i+1}^n}$. En passant à la somme télescopique, on en déduit alors que :

$$F(X_t) - F(X_0) = \sum_{i=0}^{p_n-1} F'\left(X_{t_i^n}\right)\left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p_n-1} f_{n,i}\left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}\right)^2 .$$

La somme de gauche converge en probabilité vers $\int_0^t F'(X_s)\,\mathrm{d}X_s$, par convergence dominée.

Considérons $\sum_{i=0}^{p_n-1}\left(f_{n,i} - F''\left(X_{t_i^n}\right)\right)\left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}\right)^2$. Si on majore le facteur en F'' par la plus grande différence entre le maximum et le minimum de F'' sur chaque intervalle de la subdivision, on obtient un terme qui tend presque-sûrement vers 0 par uniforme continuité de F'' sur le compact $\{X_s,\, 0 \leq s \leq t\}$, tandis que le terme de droite converge en probabilité vers $\langle X, X\rangle_t$. Ce terme converge donc en probabilité vers 0.

On s'est donc ramené à l'étude de $\sum\limits_{i=0}^{p_n-1} F''\big(X_{t_i^n}\big)\Big(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}\Big)^2$. En utilisant des résultats de convergence dominée, on montre finalement que ces sommes convergent en probabilité vers $\int\limits_0^t F''(X_s)\,\mathrm{d}\langle X, X\rangle_s$, d'où le résultat pour $p = 1$ par unicité de la limite en probabilité. $\square$

Remarque 198 :

En particulier, cette expression met en évidence le fait que le processus $F(X_s^1, \ldots, X_s^p)$ est une semi-martingale.

Remarque 199 (Idées de la preuve pour $p \geq 2$) **:**

Dans ce cas, on considère à nouveau une famille de subdivisions emboitées, et une somme télescopique. Entre deux pas de la subdivision, avec un raccord affine :

$$F\left(X^1_{t_{i+1}n}, \ldots, X^p_{t^n_{i+1}}\right) - F\left(X^1_{t_i n}, \ldots, X^p_{t^n_i}\right) = g(1) - g(0) = g'(0) + \frac{1}{2} g''(\theta)\,,$$

pour un certain $\theta \in [0,1]$. On a $g'(0) = \sum_{j=1}^{p} \partial_j F\left(X^1_{t^n_i}, \ldots, X^p_{t^n_i}\right)\left(X^j_{t^n_{i+1}} - X^j_{t^n_i}\right)$. En sommant sur i, pour chaque valeur de j, on approche l'intégrale stochastique selon X^j, comme dans le cas $p = 1$.

De même, dans le terme de dérivée seconde, par le même argument de majoration que pour $p = 1$, on le ramène à $\sum_{1 \leq j,k \leq p} \sum_{i=0}^{p_n - 1} \partial_j \partial_k F\left(X^1_{t^n_i}, \ldots, X^p_{t^n_i}\right)\left(X^j_{t^n_{i+1}} - X^j_{t^n_i}\right)\left(X^k_{t^n_{i+1}} - X^k_{t^n_i}\right)$, et on fait tendre chaque terme de la somme vers l'intégrale contre $\left\langle X^j, X^k \right\rangle$ par le même argument.

Corollaire 200 (Intégration par parties) **:**

Soit $F(x,y) = xy$. On a alors $X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s \, \mathrm{d}Y_s + \int_0^t Y_s \, \mathrm{d}X_s + \langle X, Y \rangle_t$.

Remarque 201 :

Soit $F(x) = x^2$. Par la formule d'Itô, on a $X_t^2 = X_0^2 + 2 \int_0^t X_s \, \mathrm{d}X_s + \langle X, X \rangle_t$. En particulier, si M est une martingale locale, on a $M_t^2 - \langle M, M \rangle = M_0^2 + 2 \int_0^t M_s \, \mathrm{d}M_s$.

Remarque 202 :

Si $f(x,v) \in \mathcal{C}^2$, pour X une semi-martingale et V VF, on a :

$$f(X_t, V_t) = f(X_0, V_0) + \int_0^t \partial_x f(X_s, V_s) \, \mathrm{d}X_s + \int_0^t \partial_v f(X_s, V_s) \, \mathrm{d}V_s + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_x^2 f(X_s, V_s) \, \mathrm{d}\langle X, X \rangle_s\,.$$

En particulier, lorsque $V_t = a(t)$ avec $a \in \mathcal{C}^1$ est déterministe, on a $\mathrm{d}V_s = a'(s) \, \mathrm{d}s$.

Considérons $X = B$ un $(\mathcal{F}_t)$-MB. Alors :

$$f(B_t, t) = f(B_0, 0) + \int_0^t \partial_x f(B_s, s) \, \mathrm{d}B_s + \int_0^t \left(\partial_v f(B_s, s) + \frac{1}{2} \partial_x^2 f(B_s, s) \right) \mathrm{d}s\,.$$

Si on considère $B = \left(B^1, \ldots, B^d\right)$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$, alors $\left\langle B^j, B^k \right\rangle = 0$ pour

$j \neq k$. Avec $f(x) \in \mathcal{C}^2\big(\mathbb{R}^d\big)$, on a donc :

$$f(B_t) = f(B_0) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \partial_i f(B_s)\,\mathrm{d}B_s^i + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(B_s)\,\mathrm{d}s\,,$$

et on note également la somme centrale sous la forme $\int_0^t \nabla f(B_s)\cdot \mathrm{d}B_s$. Lorsque f est harmonique, lorsque $\Delta f = 0$, on vérifie bien que $f(B)$ est une martingale locale.

Remarque 203 :

Soit $f \in \mathcal{C}^2(U)$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et V un ouvert borné, tel que $\overline{V} \subset U$. On peut trouver $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})^d$, qui coïncide avec f sur un voisinage de V.

Soient $X^1, \dots, X^d$ des semi-martingales continues, et τ_V le temps de sortie de V. C'est un temps d'arrêt. On a alors $f(X_{t\wedge\tau_V}) = g(X_{t\wedge\tau_V})$, donc on peut appliquer la formule d'Itô au processus arrêté.

Si on sait que $\tau_U = \infty$ presque-sûrement, quitte à utiliser une suite croissante d'ouverts (V_n) imbriqués, qui recouvre U asymptotiquement, on obtient à la limite la formule d'Itô sur $f\big(X^1, \dots, X^d\big)$.

En particulier, si X est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, alors $\ln(X_t) = \ln(X_0) + \int_0^t \frac{\mathrm{d}X_s}{X_s} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\mathrm{d}\langle X,X\rangle_s}{X_s^2}$.

Définition 204 :

On dit qu'un processus X à valeurs dans $\mathbb{C}$ est une martingale locale complexe ssi sa partie réelle et imaginaire sont des martingales locales au sens réel usuel.

Proposition 205 (Martingale exponentielle) **:**

Soient M une martingale locale, et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors le processus $\Big(\mathcal{E}(\lambda M)_t = e^{\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2}\langle M,M\rangle_t}\Big)$ est une martingale locale complexe.

Démonstration. En général, pour $F(x,r) \in \mathcal{C}^2$, on a :

$$\begin{aligned} F(M_t, \langle M,M\rangle_t) &= F(M_0,0) + \int_0^t \partial_x F(M_s, \langle M,M\rangle_s)\,\mathrm{d}M_s \\ &+ \int_0^t \partial_r F(M_s, \langle M,M\rangle_s)\,\mathrm{d}\langle M,M\rangle_s + \frac{1}{2}\int_0^t \partial_x^2 F(M_s, \langle M,M\rangle_s)\,\mathrm{d}\langle M,M\rangle_s\,. \end{aligned}$$

Ce processus est une martingale locale dès que $\partial_r F + \frac{1}{2}\partial_x^2 F = 0$, et cette propriété est vérifiée pour $F(x,r) = e^{\lambda x - \frac{1}{2}\lambda^2 r}$, donc a fortiori pour sa partie réelle et imaginaire, ce qui prouve bien que $\mathcal{E}(\lambda M)$ est une martingale locale complexe. □

8.3 Quelques applications

8.3.1 Théorème de caractérisation de Lévy

Théorème 206 :

Soient $M^1, \dots, M^d$ des martingales locales, adaptées à $(\mathcal{F}_t)$. On a l'équivalence entre les propriétés :

1. M est un $(\mathcal{F}_t)$-MB,
2. $\forall 1 \leq i, j \leq d$, $\langle M^i, M^j \rangle_t = \delta_{i,j} t$.

Démonstration. Le sens direct est déjà établi. Pour le sens réciproque, fixons $\xi \in \mathbb{R}^d$. Considérons la martingale locale complexe $\mathcal{E}(iM)$, avec $M_t = \sum_{j=1}^{d} \xi_j M_t^j$.

Par hypothèse sur les crochets, dans ce cas, $\langle M, M \rangle = \|\xi\|_2^2 t$, d'où $\mathcal{E}(iM)_t = \exp\Big(iM + \frac{\|\xi\|^2}{2} t\Big)$. Cette martingale locale est uniformément bornée sur tout intervalle de temps compact, donc $\mathcal{E}(iM)$ est une *vraie* martingale (au sens complexe).

Quitte à mettre les termes en ordre, on en déduit que pour tous $s < t$:

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(i \sum_{j=1}^{d} \big(M_t^j - M_s^j\big)\right) \middle| \mathcal{F}_s\right] = \exp\left(-\frac{1}{2} \|\xi\|_2^2 (t-s)\right).$$

En d'autres termes, conditionnellement à $\mathcal{F}_s$, la transformée de Fourier de $M_t - M_s$ est déterministe, donc $M_t - M_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$, et suit ici la loi $M_t - M_s \sim \mathcal{N}(0, (t-s) I_d)$.

Le processus M est un processus à trajectoires continues, à accroissements stationnaires gaussiens indépendants, avec la covariance souhaitée, donc $(M - M_0)$ est un MB issu de 0. $\square$

8.3.2 Théorème de Dubins-Schwarz

Théorème 207 :

Soit M une martingale locale telle que $\langle M, M \rangle_\infty = \infty$ p.s. Alors il existe un mouvement brownien $(\beta_t)_{t \geq 0}$, tel que $M_t = \beta_{\langle M, M \rangle_t}$.

Démonstration. Quitte à poser $\beta = 0$ sous l'évènement négligeable $\langle M, M \rangle_\infty < \infty$, on se ramène au cas où $\langle M, M \rangle_\infty = \infty$ pour tout ω.

On suppose $M_0 = 0$, pour obtenir un MB issu de 0. Dans le cas général, on aura de même un MB issu de M_0.

Pour tout $r \geq 0$, on considère le TA $\tau_r = \inf\{t \geq 0, \langle M, M \rangle_t \geq r\}$. L'application $r \mapsto \tau_r$ est croissante, continue à gauche, et admet des limites à droite $\tau_{r^+} = \inf\{t \geq 0, \langle M, M \rangle_t > r\}$.

Posons $\beta_r = M_{\tau_r}$ une variable $\mathcal{F}_{\tau_r}$-mesurable. Les trajectoires de β sont continues à gauche, avec des limites à droite $\beta_{r+} = M_{\tau_{r+}}$.

Admettons pour l'instant que M et $\langle M \rangle$ ont les mêmes intervalles de constance. On énoncera plus en détail le lemme ci-après. En particulier, comme $\langle M, M \rangle_{\tau_{r+}} = \langle M, M \rangle_{\tau_r}$, on en déduit $\beta_r = \beta_{r+}$, donc β à trajectoires continues.

Considérons la filtration (complète) définie par $\mathcal{G}_r = \mathcal{F}_{\tau_r}$. On veut montrer que β est une martingale adaptée à la filtration $(\mathcal{G}_r)$. Soient $s < t$. Pour le processus arrêté M^{τ_t}, le crochet à l'infini vaut t, donc c'est une martingale bornée dans L^2. Par théorème d'arrêt :

$$\beta_s = M_{\tau_s} = M^{\tau_t}_{\tau_s} = \mathbb{E}[M^{\tau_t}_\infty | \mathcal{F}_{\tau_s}] = \mathbb{E}[\beta_t | \mathcal{G}_s] \,,$$

donc le processus β est bien une vraie martingale.

En outre, le processus $(M^2 - \langle M, M \rangle)$ arrêté en τ_t est bien une martingale u.i. donc $(\beta_t^2 - t)$ est une martingale locale. On en déduit que $t = \langle \beta, \beta \rangle_t$ est le crochet de β, qui est donc bien un $(\mathcal{G}_t)$-MB par le théorème précédent. □

Lemme 208 (Intervalles de constance) **:**
Les intervalles de constance de M et $\langle M, M \rangle$ sont les mêmes. Autrement dit, on a p.s. :

$$\forall a < b,\ (\forall a \leq t \leq b,\ M_t = M_a) \Leftrightarrow (\langle M, M \rangle_b = \langle M, M \rangle_a) \,.$$

Démonstration. Soient $a < b$ fixés. Montrons l'équivalence p.s. dans ce cas.

Pour le sens direct, on utilise la convergence de $\sum_{i=0}^{p_n - 1} \left(M_{t^n_{i+1}} - M_{t^n_i} \right)^2$ vers le crochet, pour des subdivisions dont le pas tend vers 0.

Pour le sens réciproque, considérons la martingale locale $N_t = M_t - M_{t\wedge a}$. Naturellement, on a $\langle N, N \rangle_t = \langle M, M \rangle_t - \langle M, M \rangle_{t \wedge a}$. Soit ε, qui induit un TA $T_\varepsilon = \inf\{t \geq 0, \langle N, N \rangle_t \geq \varepsilon\} > a$. Le processus $N^2 - \langle N, N \rangle$ arrêté en T_ε est une martingale u.i. Soit $A = \{\langle M, M \rangle_b = \langle M, M \rangle_a\}$. Sous A, on a $T_\varepsilon \geq b$. Pour $t \leq b$, on a alors $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A N_t^2] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A N^2_{t \wedge T_\varepsilon}\right] \leq \mathbb{E}\left[\langle N, N \rangle_{t\wedge T_\varepsilon}\right] \leq \varepsilon$. En passant à la limite, $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A N_t^2] = 0$, donc $M_t = M_a$ p.s. pour $a \leq t \leq b$ sous l'évènement A.

Le résultat est donc presque-sûrement vrai sur tous les intervalles rationnels à la fois, et on obtient le résultat souhaité par continuité des trajectoires. □

Remarque 209 :
Notons bien qu'ici, β n'est *pas* adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)$. La preuve donne en revanche une autre filtration à laquelle il est naturellement adapté.

Remarque 210 :
On pourrait se passer de l'hypothèse $\langle M, M \rangle_\infty = \infty$ quitte à grossir l'espace probabilisé.

Si $\Omega = \{0\}$ est un espace probabilisé trivial, par exemple, le processus $M_t = 0$ est une martingale locale. On ne pourra pas définir le mouvement brownien β directement sur l'espace Ω, mais quitte à augmenter l'espace pour définir un MB β, on retrouve le résultat.

Plus largement, il faudra introduire un autre espace sur lequel définir β quand $\langle M, M\rangle_\infty < \infty$.

8.3.3 Inégalités de Birkholder-Davis-Gundy

Théorème 211 :

Soit $p > 0$. Il existe des constantes $0 < c_p < C_p$ telles que, pour toute martingale locale M issue de 0, en notant $M_t^* = \sup\limits_{0 \le s \le t} |M_s|$, pour tout TA T :

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right] \le \mathbb{E}[(M_T^*)^p] \le C_p \mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right].$$

Démonstration. On va montrer l'inégalité de droite. La gauche peut se faire par des méthodes similaires (la preuve du cas $p \ge 4$ est faite dans l'exercice 4 du TD 4).

Quitte à remplacer M par la martingale locale M^T, on se ramène directement au cas $T = \infty$. Quitte à remplacer M par M^{T_n}, où $T_n = \inf\{t \ge 0,\ |M| \ge n\}$, on se ramène au cas borné, par une constante C. On obtient le cas général par convergence monotone dans l'expression obtenue.

Sous ces hypothèses, considérons d'abord $p > 2$. L'application $x \mapsto |x|^p$ est $\mathcal{C}^2$ dans ce cas. Par la formule d'Itô, $|M_t|^p = p \int_0^t |M_s|^{p-1} \mathrm{sign}(M_s)\, \mathrm{d}M_s + \frac{p(p-1)}{2} \int_0^t |M_s|^{p-2}\, \mathrm{d}\langle M, M\rangle_s$.

Or $\mathbb{E}\left[\int_0^t |M_s|^{2(p-1)}\, \mathrm{d}\langle M, M\rangle_s\right] \le C^{2(p-1)} \mathbb{E}[\langle M, M\rangle_t] < \infty$, donc l'intégrale de gauche est en fait une *vraie* martingale, bornée dans L^2 sur tout intervalle de temps compact, et d'espérance nulle car $M_0 = 0$. En passant à l'espérance dans la formule d'Itô précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|M_t|^p] &= \frac{p(p-1)}{2} \mathbb{E}\left[\int_0^t |M_s|^{p-2}\, \mathrm{d}\langle M, M\rangle_s\right] \\
&\le \frac{p(p-1)}{2} \mathbb{E}\left[(M_t^*)^{p-2} \langle M, M\rangle_t\right] \\
&\le \frac{p(p-1)}{2} \mathbb{E}[(M_t^*)^p]^{\frac{p-2}{2}}\, \mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_t^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{2}{p}}
\end{aligned}$$

par inégalité de Hölder, car $\frac{p-2}{p} + \frac{2}{p} = 1$. En outre, $\mathbb{E}[(M_t^*)^p] \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|M_t|^p]$ par inégalité de Doob. En combinant ces deux inégalités, les puissances se simplifient, et on obtient ainsi l'inégalité de droite avec une constante indépendante de M. Dans le cas $p = 2$, la démonstration est encore plus simple, car il suffit de combiner l'inégalité de Doob avec $\mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E}[\langle M, M\rangle_t]$. On traite le cas $p < 2$ dans le lemme suivant. $\square$

Remarque 212 :

Ainsi, si $M = \int_0 H_s\, \mathrm{d}N_s$, on contrôle M^* à partir de $\langle M, M\rangle = \int_0 H_s^2\, \mathrm{d}\langle N, N\rangle_s$.

Lemme 213 :
Si $p < 2$, on a l'inégalité droite de BDG.

Démonstration. Soit $0 < q = \frac{p}{2} < 1$. On considère le TA $T_x = \inf\{t \geq 0,\, M_t^2 \geq x\}$ pour $x > 0$. Pour tout TA T, on a :

$$\mathbb{P}\big((M_T^*)^2 \geq x\big) = \mathbb{P}\big(M_{T\wedge T_x}^2 \geq x\big) \leq \frac{1}{x}\mathbb{E}\big[M_{T\wedge T_x}^2\big] = \frac{1}{x}\mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_{T\wedge T_x}\big] \leq \frac{1}{x}\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_T]\,.$$

Pour $T = S_x = \inf\{t \geq 0,\, \langle M, M\rangle_t \geq x\}$, en particulier :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big((M_t^*)^2 \geq x\big) &\leq \mathbb{P}(S_x \leq t) + \mathbb{P}\Big(\big(M_{t\wedge S_x}^*\big)^2 \geq x\Big) \\
&\leq \mathbb{P}(\langle M, M\rangle_t \geq x) + \tfrac{1}{x}\mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_{t\wedge S_x}\big] \\
&\leq 2\mathbb{P}(\langle M, M\rangle_t \geq x) + \tfrac{1}{x}\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_t \mathbb{1}_{S_x > t}] \\
&= 2\mathbb{P}(\langle M, M\rangle_t \geq x) + \tfrac{1}{x}\mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_t \mathbb{1}_{\langle M,M\rangle_t < x}\big]\,.
\end{aligned}$$

Or on peut écrire :

$$\mathbb{E}[(M_t^*)^p] = \mathbb{E}\big[(M_t^*)^{2q}\big] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathbb{1}_{x<(M_t^*)^2} \times q x^{q-1}\,\mathrm{d}x\right] = q\int_0^\infty x^{q-1}\mathbb{P}\big((M_t^*)^2 \geq x\big)\,\mathrm{d}x\,,$$

et on peut alors réinjecter l'inégalité précédente pour majorer cette espérance. D'une part, on a :

$$2q\int_0^\infty x^{q-1}\mathbb{P}(\langle M, M\rangle_t \geq x) = 2\mathbb{E}\left[\int_0^{\langle M,M\rangle_t} q x^{q-1}\,\mathrm{d}x\right] = 2\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_t^q]\,.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
q\int_0^\infty x^{q-2}\mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_t \mathbb{1}_{\langle M,M\rangle_t < x}\big] &= q\mathbb{E}\left[\langle M, M\rangle_t \times \int_{\langle M,M\rangle_t}^\infty x^{q-2}\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \tfrac{q}{1-q}\mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_t \times \langle M, M\rangle_t^{q-1}\big]\,.
\end{aligned}$$

On a dont le résultat, avec la constante $C_p = 2 + \frac{p}{2-p} = \frac{4-p}{2-p}$. □

Corollaire 214 :
Soit M une martingale locale, avec $M_0 \in L^1$. Si $\mathbb{E}\big[\sqrt{\langle M, M\rangle_\infty}\big] < \infty$, alors M est une martingale u.i.

Démonstration. On prouve le résultat dans le cas $M_0 = 0$, car lorsque $M_0 \in L^1$, le processus constant égal à M_0 est lui-même une martingale u.i.

Dans ce cas, par l'inégalité BDG en $p=1$, on a $\mathbb{E}[M^*_\infty] \leq C_1 \mathbb{E}\left[\sqrt{\langle M,M\rangle_\infty}\right] < \infty$, donc M^*_∞ est une variable intégrable, qui domine tout le processus M. □

Remarque 215 :

Si $\mathbb{E}\left[\sqrt{\int_0^t H_s^2 \, \mathrm{d}\langle M,M\rangle_s}\right] < \infty$ pour tout $t \geq 0$, alors $\left(\int_0^t H_s \, \mathrm{d}M_s\right)$ est une vraie martingale.

8.4 Représentation des martingales

On considère $(\mathcal{F}_t)$ le complété de la filtration canonique d'un MB B réel, issu de 0. Autrement dit, si on note $\mathcal{N}$ la tribu engendrée par les ensembles inclus dans un mesurable de mesure nulle, on a $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s,\, s \leq t) \vee \mathcal{N}$.

Théorème 216 :

Dans notre cas, comme $\langle B,B\rangle_t = t$, on a :

$$L^2(B) = \left\{ H \text{ progressif, } \mathbb{E}\left[\int_0^\infty H_s^2 \, \mathrm{d}s\right] < \infty \right\} = L^2\big(\Omega \times \mathbb{R}^+, \mathit{Prog}, \mathrm{d}\mathbb{P} \otimes \mathrm{d}s\big)\,.$$

Pour toute variable $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$, il existe un unique processus $H \in L^2(B)$ tel que :

$$Z = \mathbb{E}[Z] + \int_0^\infty H_s \, \mathrm{d}B_s\,.$$

Pour toute $(\mathcal{F}_t)$-martingale M bornée dans L^2, il existe un unique processus $H \in L^2(B)$ et une constante C tels que $M_t = C + \int_0^t H_s \, \mathrm{d}B_s$.

Posons plus généralement $L^2_{loc}(B) = \left\{ H \text{ progressif, } \forall t \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^t H_s \, \mathrm{d}s \overset{\mathbb{P}-\text{p.s.}}{\leq} \infty \right\}$. Alors pour toute martingale locale M, il existe $H \in L^2_{loc}(B)$ tel que $M_t = C + \int_0^t H_s \, \mathrm{d}B_s$.

Démonstration. Commençons par traiter l'unicité dans le cas d'une variable Z. Si H et H' conviennent, alors $\mathbb{E}\left[\int_0^\infty (H_s - H'_s)^2 \, \mathrm{d}\langle B,B\rangle_s\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty H_s - H'_s \, \mathrm{d}B_s\right)^2\right] = 0$, d'où $H = H'$.

Pour l'existence, considérons $\mathcal{H}$ le sous-espace de L^2, constitué des variables Z qui vérifient la propriété. Cet espace est fermé. En effet, supposons que $(Z_n) \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ converge vers Z dans L^2. On associe le processus H^n à Z_n. On a $\int_0^\infty H^n_s \, \mathrm{d}B_s = Z_n - \mathbb{E}[Z_n] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Z - \mathbb{E}[Z]$. On en déduit que

$\mathbb{E}\left[\int\limits_0^\infty (H_s^n - H_s^m)^2 \, \mathrm{d}s\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int\limits_0^\infty H_s^n - H_s^m \, \mathrm{d}B_s\right)^2\right] \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. La suite (H^n) est de Cauchy dans $L^2(B)$, donc elle admet une limite H qui satisfait la propriété pour Z.

Il suffit désormais de montrer que $\mathcal{H}$ contient une famille dense. Soient $0 = t_0 < \cdots < t_p$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$. Montrons que les variables $Z = e^{i\sum\limits_{j=1}^p \lambda_j \left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right)}$, quitte à prendre la partie réelle et imaginaire, sont dans $\mathcal{H}$. Posons $f(s) = \sum\limits_{j=1}^p \lambda_j \mathbb{1}_{]t_{j-1},t_j]}(s)$. Posons désormais $M_t = \int\limits_0^t f(s) \, \mathrm{d}B_s = \sum\limits_{j=1}^p \lambda_j \left(B_{t_j\wedge t} - B_{t_{j-1}\wedge t}\right)$. On a $\langle M, M\rangle_t = \sum\limits_{j=1}^p \lambda_j^2 (t_j \wedge t - t_{j-1}\wedge t)$. On a alors $\mathcal{E}(iM)_t = e^{iM_t + \frac{\langle M,M\rangle_t}{2}}$. En particulier :

$$Z = \mathcal{E}(iM)_{t_p} = e^{i\sum\limits_{j=1}^p \lambda_j \left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right)} \times e^{\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^p \lambda_j^2 (t_j - t_{j-1})}.$$

C'est une martingale locale complexe. On peut donc lui appliquer la formule d'Itô sans soucis, avec $F(x, r) = e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2} r}$. On obtient ainsi le résultat voulu, avec $H_s = \mathbb{1}_{[0,t_p]}(s) f(s) \mathcal{E}(iM)_s$ tel que $H \in L^2(B)$. Par le lemme de densité ci-dessous, on a donc le résultat souhaité, $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$.

Considérons désormais le cas de M une martingale bornée dans L^2. On a donc $M_\infty \in L^2$ telle que $M_t = \mathbb{E}[M_\infty | \mathcal{F}_t]$. On pose $C = \mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_\infty]$. On peut utiliser la première partie sur la variable $Z = M_\infty$, ce qui nous donne un processus H qui satisfait la propriété pour M^∞. En passant à l'espérance conditionnelle, $M_t = C + \int\limits_0^t H_s \, \mathrm{d}B_s$.

Plus généralement, si M est une martingale locale, comme $\mathcal{F}_0 = \sigma(B_0) \vee \mathcal{N}$ est grossière, M_0 est constante, égale à C. Soit $T_n = \inf\{t \geq 0, \, |M_t| \geq n\}$, une suite de TA qui tendent vers $+\infty$ presque-sûrement. On peut appliquer le résultat aux martingales arrêtées M^{T_n}. Comme $\left(M^{T_m}\right)^{T_n} = M^{T_n}$ lorsque $n < m$, par unicité, $H^n = H^m \mathbb{1}_{[0,T_m]}$. On peut donc considérer le processus progressif limite H tel que $H^n = \mathbb{1}_{[0,T_n]} H$. $\square$

Corollaire 217 :

Si $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, alors $Z = \mathbb{E}[Z] + \int\limits_0^t H_s \, \mathrm{d}B_s$.

Lemme 218 :

L'espace E engendré par les variables $\left(e^{i\sum\limits_{i=1}^p \lambda_j \left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right)}\right)$ est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$.

Démonstration. On utilise un argument Hilbertien. Soit $Z \in E^\perp$. Montrons que $Z = 0$.

Fixons $0 = t_0 < \cdots < t_p$. On définit la mesure complexe $\mu(F) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_F\left(B_{t_1}, \ldots, B_{t_p} - B_{t_{p-1}}\right) Z\right]$ sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. En particulier, on a $\widehat{\mu}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = \mathbb{E}\left[Z e^{i\sum\limits_{j=1}^p \lambda_j \left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right)}\right] = 0$ car $Z \in E^\perp$. On a donc $\widehat{\mu} = 0$, d'où $\mu = 0$ par injectivité de la transformée de Fourier. On en déduit que Z est indépendante de $\sigma\big(B_{t_1}, \dots, B_{t_p} - B_{t_{p-1}}\big)$. Par un argument de classes monotone, Z est indépendante de $\sigma(B_t,\, t \geq 0)$.

En outre, $\mathcal{N}$ étant une tribu grossière pour $\mathbb{P}$, Z est naturellement indépendante de $\mathcal{N}$, donc finalement de $\mathcal{F}_\infty$. Z est indépendante d'elle-même, donc constante.

Comme E contient les constantes, $Z = 0$. $\square$

Remarque 219 :

On peut ainsi retrouver la continuité à droite de la filtration. Si Z est mesurable dans $\mathcal{F}_{t^+}$, alors $Z = \mathbb{E}[Z] + \int_0^\infty H_s \,\mathrm{d}B_s$. Pour tout $r > t$, on a $Z = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_r] = \mathbb{E}[Z] + \int_0^r H_s \,\mathrm{d}B_s$. En conséquence, par unicité, $H_s \overset{\mathbb{P}-\text{p.s.}}{=} 0$ presque-partout sur $]r, \infty[$, et donc sur $]t, \infty[$. On a donc finalement $Z = \mathbb{E}[Z] + \int_0^t H_s \,\mathrm{d}B_s$ qui est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

Proposition 220 (Continuité des trajectoires) **:**

Les martingales de $(\mathcal{F}_t)$ admettent une modification à trajectoires continues.

Démonstration. Dans le cas borné dans L^2, la modification de M en $C + \int_0 H_s \,\mathrm{d}B_s$ est bien à trajectoires continues.

Dans le cas général, quitte à arrêter M au temps $K \in \mathbb{N}$, on peut tout de même se ramener à M uniformément intégrable, de limite M_∞. Soit $M_\infty^n = (M_\infty \vee (-n)) \wedge n$. On a naturellement $M_\infty^n \xrightarrow{L^1} M_\infty$.

Soit M^n la martingale u.i. donnée par $M_t^n = \mathbb{E}[M_\infty^n|\mathcal{F}_t]$. La martingale M^n est bornée, donc admet une modification à trajectoires continues. La filtration est continue à droite, donc M admet une modification càdlàg. Par inégalité maximale :

$$\lambda \mathbb{P}\left(\sup_{s\geq 0}|M_s^n - M_s| > \lambda\right) \leq 3\mathbb{E}[|M_\infty^n - M_\infty|] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Quitte à extraire, on a une sous-suite $\theta(n)$ telle que $\mathbb{P}\big(\big\|M^{\theta(n)} - M\big\|_\infty > \frac{1}{2^n}\big) \leq \frac{1}{2^n}$. D'après le théorème de Borel-Cantelli, les évènements complémentaires sont p.s. réalisés à partir d'un rang, donc les trajectoires de M sont limites uniformes des trajectoires de $M^{\theta(n)}$, et donc sont continues. $\square$

Remarque 221 (Extension du résultat) **:**

Soit $B = (B^j)$ un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^d$ issu de 0.

Si $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$, alors il existe d processus progressifs $H^j \in L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+, Prog, \mathrm{d}\mathbb{P} \otimes \mathrm{d}s)$, tels que $Z = \mathbb{E}[Z] + \sum_{j=1}^d \int_0^\infty H_s^j \,\mathrm{d}B_s^j$. On étend de même le résultat aux martingales.

8.5 Théorème de Girsanov

Dans cette sous-section, on se place sur l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$, avec une filtration complète continue à droite.

A priori, changer la mesure de probabilité ne préserve pas les propriétés de martingales. On va montrer que, si $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ est une autre mesure de probabilité, alors les $\mathbb{P}$-semi-martingales sont des $\mathbb{Q}$-semi-martingales.

Proposition 222 :

Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Supposons que $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_\infty$. Pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}^+}$, quitte à restreindre les mesures sur $\mathcal{F}_t$, on pose $D_t = \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t}$.

Alors D est une $\mathbb{P}$-martingale u.i., donc le processus admet une modification à trajectoires càdlàg. Dans ce cas, pour tout TA T, $\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_T} = D_T$.

Si de plus $P \ll Q$ sur $\mathcal{F}_\infty$, alors $\inf\limits_{t \in \overline{\mathbb{R}^+}} D_t \overset{\mathbb{P}-\text{p.s.}}{>} 0$.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{F}_t$ quelconque. On a $\mathbb{E}_\mathbb{P}[\mathbb{1}_A D_\infty] = \mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_\mathbb{P}[\mathbb{1}_A D_t]$. Comme D_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable, on en déduit que $D_t = \mathbb{E}_\mathbb{P}[D_\infty | \mathcal{F}_t]$, D est bien une martingale u.i. Dans ce cas, si T est un TA, pour $A \in \mathcal{F}_T$, on a :

$$Q(A) = \mathbb{E}_\mathbb{P}[\mathbb{1}_A D_\infty] = \mathbb{E}_\mathbb{P}[\mathbb{1}_A \mathbb{E}_\mathbb{P}[D_\infty | \mathcal{F}_T]] = \mathbb{E}_\mathbb{P}[\mathbb{1}_A D_T] .$$

En conséquence, D_T est bien la densité de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$ pour la tribu $\mathcal{F}_T$.

Finalement, considérons $T_\varepsilon = \inf\{t \geq 0, D_t < \varepsilon\}$. C'est le temps d'entrée dans un ouvert pour un processus à trajectoires continues à droite, donc un TA. On a alors la majoration $Q(T_\varepsilon < \infty) = \mathbb{E}_\mathbb{P}[\mathbb{1}_{T_\varepsilon < \infty} D_{T_\varepsilon}] \leq \varepsilon$. En conséquence, $Q\left(\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \left\{T_{\frac{1}{n}} < \infty\right\}\right) = 0$. En conséquence, lorsque $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$, on a $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \left\{T_{\frac{1}{n}} < \infty\right\}\right) = 0$. Finalement, presque-sûrement, $T_{\frac{1}{n}} = \infty$ pour un certain rang $n(\omega)$ d'où $\inf\limits_{t \geq 0} D_t \geq \frac{1}{n}$. □

Proposition 223 :

Soit D une martingale locale (à trajectoires continues), à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. Alors il existe une unique martingale locale L telle que $D_t = \mathcal{E}(L)_t$. De plus, $L_t = \ln(D_0) + \int\limits_0^t \frac{\mathrm{d}D_s}{D_s}$.

Démonstration. On applique la formule d'Itô à $\ln(D_t)$:

$$\ln(D_t) = \ln(D_0) + \int\limits_0^t \frac{\mathrm{d}D_s}{D_s} - \frac{1}{2} \int\limits_0^t \frac{\mathrm{d}\langle D, D\rangle_s}{D_s^2} .$$

En prenant L_t comme annoncé dans l'énoncé, on a alors $\ln(D_t) = L_t - \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t$, d'où $D = \mathcal{E}(L)$ en passant à l'exponentielle.

Si le résultat est vrai pour une martingale locale L', comme $\mathcal{E}(L) = \mathcal{E}(L')$, en passant au logarithme, on a $L' - L = \frac{1}{2}(\langle L, L\rangle - \langle L', L'\rangle)$. On a ainsi égalité entre un processus VF et une martingale locale, d'où $L' = L$. $\square$

Théorème 224 (Théorème de Girsanov) **:**

Soit D la $\mathbb{P}$-martingale u.i. lorsque $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ et $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$. Si D est de plus à trajectoires continues, on a une $\mathbb{P}$-martingale locale telle que $D = \mathcal{E}(L)$.

Sous ces hypothèses, pour toute $\mathbb{P}$-martingale locale M, le processus $\widetilde{M} = M - \langle M, L\rangle$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale.

Démonstration. Grâce au lemme ci-dessous, il suffit de montrer que $\widetilde{M}D$ est une $\mathbb{P}$-martingale locale pour conclure. Par la formule d'Itô, quitte à considérer $M_0 = 0$, on a :

$$\begin{aligned}\widetilde{M}_t D_t &= \int_0^t \widetilde{M}_s \,\mathrm{d}D_s + \int_0^t D_s \,\mathrm{d}\widetilde{M}_s + \left\langle \widetilde{M}, D\right\rangle_t \\ &= \int_0^t \widetilde{M}_s \,\mathrm{d}D_s + \int_0^t D_s \,\mathrm{d}M_s - \int_0^t D_s \,\mathrm{d}\langle M, L\rangle_s + \left\langle \widetilde{M}, D\right\rangle_t .\end{aligned}$$

La partie de gauche est une $\mathbb{P}$-martingale locale. Pour la partie de droite, à variations finies, comme $L_t - L_0 = \int_0^t \frac{1}{D_s} \,\mathrm{d}D_s$, on a naturellement $\langle M, L\rangle_t = \int_0^t \frac{1}{D_s} \,\mathrm{d}\langle M, D\rangle_s$. En conséquence :

$$\int_0^t D_s \,\mathrm{d}\langle M, L\rangle_s = \int_0^t \frac{D_s}{D_s} \,\mathrm{d}\langle M, D\rangle_s = \langle M, D\rangle_t ,$$

donc la partie VF s'annule, on a bien une $\mathbb{P}$-martingale locale. □

Lemme 225 :

Soit X un processus adapté, à trajectoires continues, et T un TA. Si le processus $(XD)^T$ est une $\mathbb{P}$-martingale, alors X^T est une $\mathbb{Q}$-martingale.

Démonstration. Montrons que $X_t^T \in L^1(\mathbb{Q})$. Comme $t \wedge T$ est un TA aussi, et qu'on a explicité la densité de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$ sous la tribu $\mathcal{F}_{t\wedge T}$, on a :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left|X_t^T\right|\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\left|X_t^T\right| D_{t\wedge T}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[(XD)_t^T\right] < \infty .$$

Avec un raisonnement analogue, lorsque $s < t$, si $A \in \mathcal{F}_s$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_A X_{t\wedge T}] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{T\leq s} X_{t\wedge T}] + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{T>s} X_{t\wedge T}] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{T\leq s} X_{s\wedge T}] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{T>s} (XD)_t^T\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{T\leq s} X_{s\wedge T}] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{T>s} (XD)_s^T\right] ,\end{aligned}$$

où la dernière étape est justifiée par le fait que $(XD)^T$ est une $\mathbb{P}$-martingale et que l'évènement vérifie $A \cap \{T > s\} \in \mathcal{F}_s$. En recollant les morceaux, on finit par obtenir $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_A X_{s\wedge T}]$, donc X^T est bien une $\mathbb{Q}$-martingale. □

Corollaire 226 :

Quitte à utiliser une suite de TA qui réduisent le processus, si $X_0 = 0$ et XD est une $\mathbb{Q}$-martingale locale, alors X est une $\mathbb{P}$-martingale locale.

Remarque 227 :

L'hypothèse de continuité des trajectoires n'est pas évidente en général. On a cependant vu que, pour le complété de la filtration canonique d'un MB, une martingale admet toujours une modification à trajectoires continues.

En outre, en pratique, on va souvent *partir* de D pour définir la mesure $\mathbb{Q}$.

Remarque 228 :

D'après le théorème de Girsanov, on a $M = \widetilde{M} + \langle M, L\rangle$ qui est une semi-martingale sous $\mathbb{Q}$. Plus largement, comme les processus VF ne dépendent pas de le mesure de probabilité, $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ admettent le même ensemble de semi-martingales.

Les mesures $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ jouent des rôles symétriques. Notons que le processus $\widetilde{L} = L - \langle L, L\rangle$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale. On a :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}|_{\mathcal{F}_t} = \frac{1}{D_t} = \exp\left(-L_t + \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t\right) = \exp\left(-\widetilde{L}_t + \frac{1}{2}\left\langle \widetilde{L}, \widetilde{L}\right\rangle_t\right) = \mathcal{E}\left(-\widetilde{L}\right)_t.$$

L'application $M \mapsto \widetilde{M}$ est donc une bijection des $\mathbb{P}$-martingales locales sur les $\mathbb{Q}$-martingales locales. En outre, $N \mapsto \widehat{N} := N + \left\langle N, \widetilde{L}\right\rangle$ est son inverse, envoie les $\mathbb{Q}$-martingales locales sur les $\mathbb{P}$-martingales locales.

Dès lors que $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$, le crochet $\langle X, X\rangle$ est le même. Plus largement, si on considère une semi-martingale X et H un processus progressif localement borné, le processus $\int\limits_0 H_s \,\mathrm{d}X_s$ est le même dans les deux cas.

Lemme 229 :

Si B est un $(\mathcal{F}_t)$-MB sous $\mathbb{P}$, alors $\widetilde{B}$ l'est sous $\mathbb{Q}$.

Démonstration. Le processus $\widetilde{B}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale adaptée à la filtration. En outre, $\left\langle \widetilde{B}, \widetilde{B}\right\rangle_t = \langle B, B\rangle_t = t$, donc par le théorème de Lévy, on a bien un mouvement brownien. $\square$

8.5.1 Construction d'une mesure $\mathbb{Q}$

Soit L une martingale locale, issue de 0, telle que $\langle L, L\rangle_\infty < \infty$ presque-sûrement. Dans ce cas, on a vu que $L_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} L_t$ existe p.s.

Pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}^+}$, on pose $D_t = \mathcal{E}(L)_t$. C'est une martingale locale. Pour définir la mesure $\mathbb{Q}$ à densité D sous $\mathbb{P}$, il faut justifier que $\mathbb{E}_\mathbb{P}(\mathcal{E}(L)_\infty) = 1$.

Lemme 230 :
On a $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathcal{E}(L)_\infty] = 1$ ssi $\mathcal{E}(L)$ est une martingale u.i.

Démonstration. Si la martingale est u.i., alors $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathcal{E}(L)_\infty] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathcal{E}(L)_0] = 1$.

Pour le sens direct, notons que $\mathcal{E}(L)$ est une sous-martingale. En conséquence, par le lemme de Fatou, on a $1 \geq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathcal{E}(L)_t] \geq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathcal{E}(L)_\infty]$, et le terme de droite est égal à 1 par hypothèse. Quitte à manipuler des espérances conditionnelles, on justifie que $\mathcal{E}(L)_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathcal{E}(L)_\infty|\mathcal{F}_t]$, la martingale est u.i. $\square$

Ainsi, dès lors que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathcal{E}(L)_\infty] = 1$, on a une martingale locale, qui permet de bien définir la mesure $\mathbb{Q}$, qui vérifie $\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t} = D_t$. On peut alors appliquer le théorème de Girsanov.

Théorème 231 :
Soit L une martingale locale avec $L_0 = 0$. Considérons les propriétés :

1. Condition de Novikov : $\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle L, L\rangle_\infty\right)\right] < \infty$,
2. Condition de Kazamaki : L est une martingale u.i. et $\mathbb{E}[\exp(L_\infty)] < \infty$,
3. $\mathcal{E}(L)$ est une martingale u.i.

On a les implications ($1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$).

Démonstration. Admis. $\square$

8.6 Applications du théorème de Girsanov

8.6.1 Solutions d'équations différentielles stochastiques

Remarque 232 :
Soient B un $(\mathcal{F}_t)$-MB, et $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne, telle que $|b(t,x)| \leq g(t)$ avec $g \in L^2(\mathbb{R}^+)$.

On pose $L_t = \int_0^t b(s, B_s)\,\mathrm{d}B_s$. En particulier, $\langle L, L\rangle_t \leq \int_0^t g(s)^2\,\mathrm{d}s$ est borné. Comme on a $\langle L, L\rangle_\infty \leq \|g\|_2 < \infty$, on vérifie la condition de Novikov, donc on peut définir $\mathbb{Q}$ à densité $\mathcal{E}(L)$.

Lemme 233 :
Soit désormais $\beta = B - \langle B, L\rangle$. C'est un $\mathbb{Q}$-MB.

Démonstration. En effet, β est une $\mathbb{Q}$-martingale locale à trajectoires continues. En outre, on a $\langle \beta, \beta\rangle_t = \langle B, B\rangle_t = t$, ce qui caractérise les mouvements browniens. $\square$

Remarque 234 :
Sous la loi $\mathbb{Q}$, le processus $X = B$ vérifie $X = \beta + \int\limits_0 b(s, X_s)\,\mathrm{d}s$. On a ainsi construit X solution d'une équation différentielle stochastique, tel que $\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}\beta_t + b(t, X_t)\,\mathrm{d}t$.

8.6.2 Formule de Cameron-Martin

Remarque 235 :
Avec $g \in L^2(\mathbb{R}^+)$, on pose $h = \int\limits_0 g(s)\,\mathrm{d}s$ et $L = \int\limits_0 g(s)\,\mathrm{d}B_s$. Naturellement, $\langle B, L\rangle = h$.

On a $D := \mathcal{E}(L) = \exp\left(\mathcal{N}\left(0, \int\limits_0 g(s)^2\,\mathrm{d}s\right) - \frac{1}{2}\int\limits_0 g(s)^2\,\mathrm{d}s\right)$. On vérifie en particulier que $\mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_\infty] = 1$, donc $\mathbb{Q}$ est bien définie. On a alors :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[F(B_t, t)D_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[F(B_t, t)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[F(\beta_t + h(t), t)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[F(B_t + h(t), t)]\,.$$

Définition 236 (Espace de Cameron-Martin) **:**
On pose $\mathcal{H} = \left\{h \in \mathcal{C}^0(R^+, \mathbb{R}),\ \exists \dot{h} \in L^2(\mathbb{R}^+),\ h = \int\limits_0 \dot{h}(s)\,\mathrm{d}s\right\}$.

Soit W la mesure de Wiener sur $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, la mesure induite par le processus (B_t) sur l'espace des trajectoires. Sous W, les projections canoniques $B_t^0(w) := w(t)$ forment un MB.

Proposition 237 (Formule de Cameron-Martin) **:**
Soient $F : (\mathcal{C}^0, \mathbb{R}^+)$ mesurable, et $h \in \mathcal{H}$. On a alors :

$$\int F(w+h)\,\mathrm{d}W(w) = \int \exp\left(\int\limits_0^\infty \dot{h}(s)\,\mathrm{d}w(s) - \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \dot{h}(s)^2\,\mathrm{d}s\right) F(w)\,\mathrm{d}W(w)\,.$$

8.6.3 Loi du temps d'attente pour un mouvement brownien avec drift

Définition 238 :
Soient $c \in \mathbb{R}$ et $a > 0$ fixés. On considère $U_a = \inf\{t \geq 0,\ B_t + ct = a\}$, le temps d'atteinte de a par un MB avec drift à vitesse c. C'est un TA.

Soit $t > 0$ fixé. Posons $h(s) = c \times \min(s, t) \in \mathcal{H}$. En notant $A = \left\{w,\ \sup\limits_{s \leq t} w(s) \geq a\right\}$, par la formule de Cameron-Martin :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(U_a \leq t) & = & \mathbb{P}\left(\sup\limits_{s\leq t}(B_s + c \times h(s)) \geq a\right) \\ & = & \int \mathbb{1}_A(w + c \times h)\,\mathrm{d}W(w) \\ & = & \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A(B) \times \exp\left(cB_t - \frac{1}{2}c^2 t\right)\right]. \end{array}$$

Le terme de droite $M_t := \exp\big(cB_t - \frac{1}{2}c^2t\big)$ est une martingale, et le terme de gauche est juste l'indicatrice de l'évènement $\{T_a \leq t\}$, avec T_a le temps d'atteinte de a par le MB B sans drift.

La loi de T_a a la densité $\frac{1}{t\sqrt{2\pi t}}e^{-a^2/2t}$ sur $\mathbb{R}^+$, donc :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}(U_a \leq t) & = & \mathbb{E}[\mathbb{1}_{T_a \leq t} M_t] \\
& = & \mathbb{E}[\mathbb{1}_{T_a \leq t} M_{T_a}] \\
& = & e^{ca}\mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{T_a \leq t} e^{-\frac{c^2}{2}T_a}\Big] \\
& = & e^{ca} \int\limits_0^t \frac{1}{s\sqrt{2\pi s}} \exp\Big(-\frac{a^2}{2s} - \frac{c^2 s}{2}\Big)\,\mathrm{d}s\,.
\end{array}$$

On a ainsi explicité la densité de la variable U_a sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Si $c \geq 0$, cette densité est d'intégrale 1, $U_a < \infty$ p.s.

Si $c < 0$, l'intégrale vaut $e^{2ca} < 1$. On vérifie que, dans ce cas, si U_a est infini, M_t s'annule en l'infini (à cause du drift), et donc la martingale reste bornée, d'espérance 1.